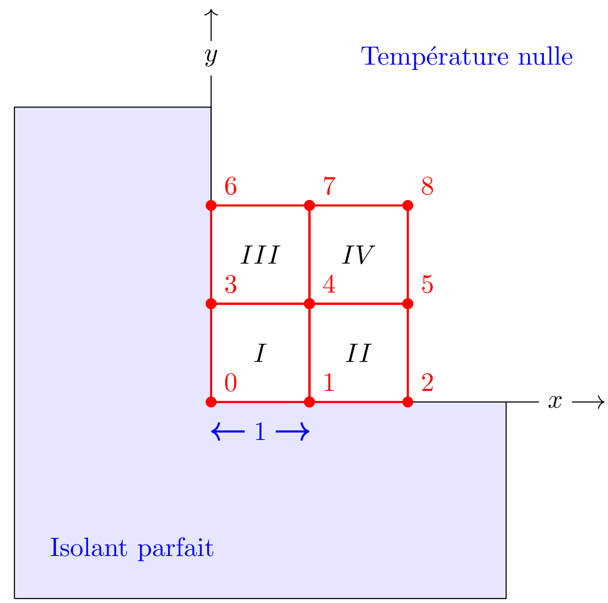
EPL	
Avril 2023	*Eléments finis*
LEPL1110	**Solution**

So easy : Babuška[1] !

Ivo recherche le champ de température $u(x,y)$ dans un domaine carré Ω de côté de longueur deux discrétisé au moyen de quatre éléments bilinéaires de même taille unitaire. Le problème est stationnaire et plan.

$$\nabla \cdot \Big[k \nabla u(x,y) \Big] + f(x,y) = 0$$

La température des zone droite et supérieure est imposée à une valeur nulle, tandis que les parties gauche et inférieure sont parfaitement isolées. La densité de production de chaleur $f = 4$ et la conductivité thermique $k = 6$ sont constantes dans les quatre éléments. Toutes les valeurs numériques sont données dans des unités compatibles !



Il est possible de tirer habilement profit de la symétrie du problème !

Plus précisément, Ivo vous demande :

1. Donner les unités de la conductivité thermique k et de la densité de production de chaleur f.

Il suffit simplement d'écrire : $\boxed{\textit{Les unités de } k \textit{ et } f \textit{ sont } \left[\frac{W}{mK}\right] \textit{ et } \left[\frac{W}{m^3}\right]}$

Attention, comme on écrit un bilan d'énergie,
les unités de l'équation sont celles de la dérivée temporelle de la quantité conservée : $[W]$ *!*

2. Ecrire la formulation faible du problème.

Il suffit d'écrire : $\boxed{\textit{Trouver } u \in \mathcal{U} \textit{ tel que } \quad < k \nabla \widehat{u} \cdot \nabla u > \, = \, < \widehat{u} f >, \quad \forall \widehat{u} \in \widehat{\mathcal{U}}}$

3. Définir l'espace de Sobolev $H_1(\Omega)$ lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}$.

$$\boxed{H_1(\Omega) = \Big\{ v(x) : \ \Omega \to \mathbb{R} \ \ \textit{tels que} \int_\Omega \Big(v(x)\Big)^2 + \Big(v'(x)\Big)^2 \, dx < \infty \Big\}}$$

[1] Ivo Babuška, né en 1926 nous a quitté ce 12 avril 2023. Il était un mathématicien tchéco-américain célèbre pour ses travaux sur la méthode des éléments finis. Un de ses résultats les plus connus sur les éléments finis est la condition LBB (Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi) qui donne des conditions suffisantes pour assurer une formulation discrète stable.

4. Démontrer[2] que la forme bilinéaire associée à la formulation faible est coercive pour cet espace.

   Sans perte de généralité, on suppose qu'une condition essentielle homogène est imposée à l'origine et on écrit :

$$v(x) - \underbrace{v(0)}_{=0} = \int_0^x v'(t)\ dt \qquad \forall x \in \Omega$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy : $< v', 1 > \leq \|v'\|\ \|1\|$

$$\Big[v(x)\Big]^2 \leq \underbrace{\int_0^x dt}_{\leq\ A}\ \underbrace{\int_0^x \Big[v'(t)\Big]^2 dt}_{\leq\ \|v'\|_0^2} \qquad \forall x \in \Omega$$

En intégrant les deux expressions sur Ω

$$\|v\|_0^2 \leq C\ \|v'\|_0^2$$

$$\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2 \leq (C+1)\ \|v'\|_0^2$$

$$\underbrace{\frac{k}{1+C}}_{\alpha}\ \Big[\underbrace{\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2}_{\|v\|_1^2}\Big] \leq \underbrace{k\ \|v'\|_0^2}_{a(v,v)} \qquad \square$$

Et on a donc bien : $\boxed{\exists\ \alpha > 0\ \textit{tel que}\quad a(u,u) \geq \alpha\ \|u\|^2 \qquad \forall u \in \mathcal{U}}$

5. Donner[3] les quatre fonctions de forme bilinéaires non-nulles $\tau_i(x,y)$ sur l'élément I.

6. Donner les dérivées de ces fonctions $\tau_{i,x}(x,y)$ et $\tau_{i,y}(x,y)$ sur l'élément I.

   Les quatres fonctions de forme et leurs dérivées sont données par :

$\tau_0(x,y) = (1-x)(1-y)$	$\tau_{0,x} = y-1$	$\tau_{0,y} = x-1$
$\tau_1(x,y) = x(1-y)$	$\tau_{1,x} = 1-y$	$\tau_{1,y} = -x$
$\tau_4(x,y) = xy$	$\tau_{4,x} = y$	$\tau_{4,y} = x$
$\tau_3(x,y) = (1-x)y$	$\tau_{3,x} = -y$	$\tau_{3,y} = 1-x$

   Ces deux sous-questions étaient vraiment élémentaires et peu d'erreurs sont donc admises. En particulier, il fallait bien veiller à obtenir les expressions correctes, en vérifiant que:

$$\sum \tau_i = 1, \qquad \sum \tau_{i,x} = \sum \tau_{i,y} = 0.$$

7. Calculer les matrices locales et membres de droite des éléments[4].

   Il faut évidemment choisir les intégrales les plus simples à calculer et tirer profit de symétries ! En utilisant une numérotation locale circulaire, on calcule que :

[2] On se limite bien au cas unidimensionnel, comme cela a été fait au cours et en séances d'exercices.

[3] Dans ce problème, il est vraiment plus simple de ne pas utiliser l'isomorphisme vers l'élément parent !

[4] Bien noter que les matrices locales et les membres de droites locaux des quatre éléments sont identiques :-)

$$
\begin{array}{rclcl}
 & & A^e_{11} & = 2\int_0^1\int_0^1 x^2\ dxdy & = \frac{4}{6} \\
A^e_{12} & = & A^e_{14} & = -\int_0^1\int_0^1 y^2\ dxdy + \int_0^1\int_0^1 x(1-x)\ dxdy & = -\frac{1}{6} \\
 & & A^e_{13} & = 2\int_0^1\int_0^1 x(x-1)\ dxdy & = -\frac{2}{6} \\
 & & B^e_{i} & = \int_0^1\int_0^1 xy\ dxdy & = \frac{1}{4}
\end{array}
$$

En tirant ensuite profit de toutes les symétries,
on en déduit directement que les matrices et membres de droites locaux s'écrivent :

$$
\boxed{A^e_{ij} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B^e_i = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}
$$

Observer que la somme de tous les éléments d'une ligne de la matrice vaut bien zéro !

8. Quelles sont les composantes de la matrice de raideur requises pour obtenir les quatre valeurs nodales inconnues[5], en tenant compte des conditions essentielles homogènes du problème ?

   En imposant les conditions essentielles sur cinq valeurs nodales,
   il ne reste plus que quatre inconnues !

$$
\begin{bmatrix}
\blacksquare & \blacksquare & & \blacksquare & \blacksquare & & & & \\
\blacksquare & \blacksquare & & \blacksquare & \blacksquare & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
\blacksquare & \blacksquare & & \blacksquare & \blacksquare & & & & \\
\blacksquare & \blacksquare & & \blacksquare & \blacksquare & & & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ 0 \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

9. Assembler ces composantes (et uniquement celles-là !) du système linéaire global.

   On assemble les matrices locales des 4 éléments.
   Attention, de ne pas oublier les éléments extra-diagonaux !

$$
\frac{k}{6}\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 4+4 & -2 & -1-1 \\ -1 & -2 & 4+4 & -1-1 \\ -2 & -1-1 & -1-1 & 4+4+4+4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}
=
\frac{f}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1+1 \\ 1+1+1+1 \end{bmatrix}
$$

Comme $k = 6$ *et* $f = 4$,

$$
\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 16 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

[5] Il est possible de répondre en représentant graphiquement la matrice et le vecteur et en cochant les termes adéquats !

*** 10. Obtenir[6] les trois fractions correspondant aux quatre valeurs nodales inconnues U_0, U_1, U_3 et U_4.

Par symétrie, on a que $U_1 = U_3$, *et on peut donc réduire le système :*

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -1 & 6 & -2 \\ -2 & -4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

En remplacant L_1 *par* $L_1 + 4L_2$,
En remplacant L_3 *par* $L_3 - 2L_2$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 22 & -10 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -16 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En remplacant L_1 *par* $L_1 + 11L_3/8$,
En remplacant L_3 *par* $L_3/4$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 17.5 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_4 = \frac{18}{35}$$

A partir de la dernière équation $4U_1 = 5U_4$, *on déduit :*

$$U_1 = \frac{5}{4} \times \frac{18}{35} = \frac{9}{14}$$

Ensuite, on utilise la seconde équation $U_0 = -2 + 6U_1 - 2U_4$ *pour obtenir :*

$$U_0 = -2 + \frac{54}{14} - \frac{36}{35} = \frac{-70 + 135 - 36}{35} = \frac{-70 + 135 - 36}{35} = \frac{29}{35}$$

Et, on peut donc conclure : $\boxed{U_0 = \frac{29}{35} \qquad U_1 = \frac{9}{14} \qquad U_4 = \frac{18}{35}}$

Bravo aux 12 étudiant(e)s sur 332 qui ont trouvé les 3 fractions : c'était encore trop facile !

[6] Question réservée pour les étudiants qui trouvent l'interrogation trop simple et voudraient obtenir plus que 20/20 :-)