

EPL	
S9 : Avril 2023	<i>Eléments finis</i>
LEPL1110	<i>Vous pouvez conserver cet énoncé !</i>

So easy : Babuška¹ !

Ivo recherche le champ de température $u(x, y)$ dans un domaine carré Ω de côté de longueur deux discrétisé au moyen de quatre éléments bilinéaires de même taille unitaire. Le problème est stationnaire et plan.

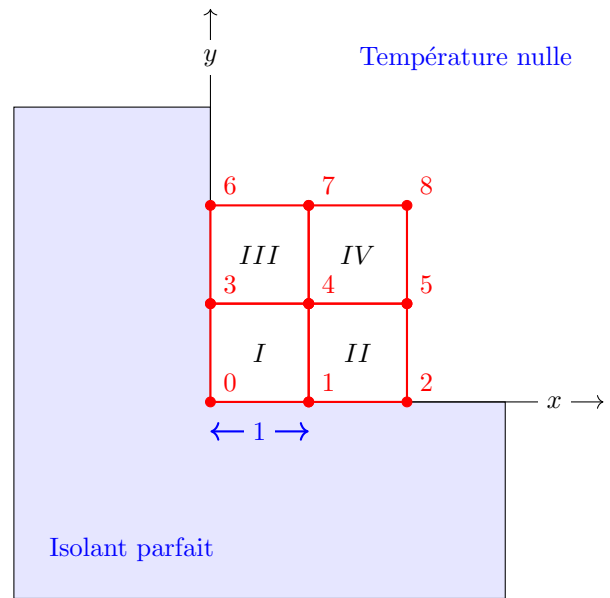
$$\nabla \cdot [k \nabla u(x, y)] + f(x, y) = 0$$

La température des zone droite et supérieure est imposée à une valeur nulle, tandis que les parties gauche et inférieure sont parfaitement isolées. La densité de production de chaleur $f = 4$ et la conductivité thermique $k = 6$ sont constantes dans les quatre éléments. Toutes les valeurs numériques sont données dans des unités compatibles !

Il est possible de tirer habilement profit de la symétrie du problème !

Plus précisément, Ivo vous demande :

1. Donner les unités de la conductivité thermique k et de la densité de production de chaleur f .
2. Ecrire la formulation faible du problème.
3. Définir l'espace de Sobolev $H_1(\Omega)$ lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}$.
4. Démontrer² que la forme bilinéaire associée à la formulation faible est coercive pour cet espace.
5. Donner³ les quatre fonctions de forme bilinéaires non-nulles $\tau_i(x, y)$ sur l'élément I .
6. Donner les dérivées de ces fonctions $\tau_{i,x}(x, y)$ et $\tau_{i,y}(x, y)$ sur l'élément I .
7. Calculer les matrices locales et membres de droite des éléments⁴.
8. Quelles sont les composantes de la matrice de raideur requises pour obtenir les quatre valeurs nodales inconnues⁵, en tenant compte des conditions essentielles homogènes du problème ?
9. Assembler ces composantes (et uniquement celles-là !) du système linéaire global.
- *** 10. Obtenir⁶ les trois fractions correspondant aux quatre valeurs nodales inconnues U_0, U_1, U_3 et U_4 .



¹Ivo Babuška, né en 1926 nous a quitté ce 12 avril 2023. Il était un mathématicien tchéco-américain célèbre pour ses travaux sur la méthode des éléments finis. Un de ses résultats les plus connus sur les éléments finis est la condition LBB (Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi) qui donne des conditions suffisantes pour assurer une formulation discrète stable.

²On se limite bien au cas unidimensionnel, comme cela a été fait au cours et en séances d'exercices.

³Dans ce problème, il est vraiment plus simple de ne pas utiliser l'isomorphisme vers l'élément parent !

⁴Bien noter que les matrices locales et les membres de droites locaux des quatre éléments sont identiques :-)

⁵Il est possible de répondre en représentant graphiquement la matrice et le vecteur et en cochant les termes adéquats !

⁶Question réservée pour les étudiants qui trouvent l'interrogation trop simple et voudraient obtenir plus que 20/20 :-)

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre prénom et votre numéro magique !

EPL	Nom :	Numéro magique (= 1 pt)
S9 : Avril 2023	Prénom :	
LEPL1110	Année et filières :	