EPL1110 : solution de l'examen de juin 2021

1 Une question bienveillante :-)

La fonction suivante effectue l'intégration numérique d'une fonction quelconque `f` par une règle de Gauss-Legendre à 4 points sur un quadrilatère défini par ses quatre sommets. Malheureusement, quelques lignes de code ont été subtilisées par un informaticien facétieux :-)

```
double gaussIntegrate(double x[4], double y[4], double (*f) (double, double))
{
    double I = 0;
    const double a = 0.577350269189626;
    const double xsi[4]    = {  a,  a, -a, -a};
    const double eta[4]    = {  a, -a, -a,  a};
    const double weight[4] = {1.0,1.0,1.0,1.0};
    int i,j;

    for (i=0; i<4; i++) {
        double xsiLoc = xsi[i];
        double etaLoc = eta[i];
        double phi[4] = { (1+xsiLoc)*(1+etaLoc)/4.0, (1-xsiLoc)*(1+etaLoc)/4.0,
                          (1-xsiLoc)*(1-etaLoc)/4.0, (1+xsiLoc)*(1-etaLoc)/4.0} ;
        double dphidxsi[4] = {(1+etaLoc)/4.0, -(1+etaLoc)/4.0, -(1-etaLoc)/4.0,  (1-etaLoc)/4.0};
        double dphideta[4] = {(1+xsiLoc)/4.0,  (1-xsiLoc)/4.0, -(1-xsiLoc)/4.0, -(1+xsiLoc)/4.0};
        double dxdxsi = 0;
        double dydxsi = 0;
        double dxdeta = 0;
        double dydeta = 0;


        double xLoc = 0;
        double yLoc = 0;
        for (j=0; j<4; j++)
        {
            xLoc += x[j]*phi[j];
            yLoc += y[j]*phi[j];
            dxdxsi += x[j]*dphidxsi[j];
            dydxsi += y[j]*dphidxsi[j];
            dxdeta += x[j]*dphideta[j];
            dydeta += y[j]*dphideta[j];
        }
        double jacobian = dydeta*dxdxsi-dydxsi*dxdeta;
        I += I + f(xLoc,YLoc)*weigth[i]*jacobian;


    }
    return I;
}
```

1. Compléter le code ci-dessus :-)

   Cette question est une copie conforme du premier devoir et peu être considérée comme élémentaire. Elle n'a pourtant pas été réussie par pas mal d'étudiants qui écrivent parfaitement le jacobien, mais qui oublient d'appliquer le changement de variable pour obtenir les coordonnées du point d'intégration dans l'espace réel. Typiquement, remplacer `xLoc` *et* `yLoc` *par* `xsiLoc` *et* `etaLoc` *fait perdre tous les points de la question !*

2. Supposons que la fonction `f` soit une polynôme de degré n.
   Pour quelles valeurs de n, la règle d'intégration fournira-t-elle un résultat exact ?

   Comme la règle à deux points intégre exactement un polynôme de degré trois, on pourra intégrer exactement une fonction de degré deux en tenant compte de l'expression du jacobien qui n'est pas constant !

   Il est aussi possible de vérifier cela en prenant le code du devoir un !
   Oui, c'est un peu tricky, je le reconnais.

On conclut donc que : $\boxed{n \leq 2}$

2 Une question encore un peu plus bienveillante :-)

Jurgen est désespéré car il a oublié la valeur de pi :-)
Avec une bonne stratégie de vaccination, Marc lui propose de la retrouver au moyen de l'interpolation polynomiale et de l'intégration numérique !

En effet, en intégrant la surface d'un élément triangulaire courbe approchant une fraction $\frac{1}{n}$ du cercle, on peut obtenir une estimation numérique de π. Ici, vous allez faire ce calcul pour le quart de cercle ($n = 4$).

Sur l'élément triangulaire parent $\widehat{\Omega}$ avec quatre noeuds, on définit quatre fonctions de forme. On définit ensuite la transformation de cet élément parent $\widehat{\Omega}$ vers l'élément Ω :

	ξ_i	η_i
1	0.0	0.0
2	1.0	0.0
3	0.0	1.0
4	0.5	0.5

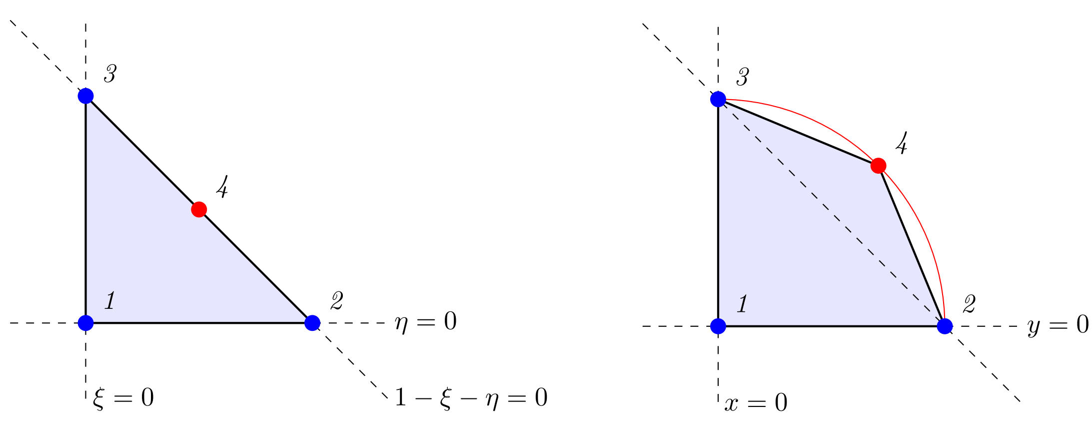
	X_i	Y_i
1	0.0	0.0
2	1.0	0.0
3	0.0	1.0
4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

$$x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} X_i \phi_i(\xi,\eta) \qquad\qquad y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} Y_i \phi_i(\xi,\eta)$$

Les coordonnées des noeuds sont données dans les deux tables.

1. Dessiner $\widehat{\Omega}$ et Ω pour $n = 4$.
   Oui : c'est une question très bienveillante :-)

   C'est exactement un exercice fait en séance et il y a encore des étudiants qui éprouvent des difficultés pour tracer l'élément parent $\widehat{\Omega}$ et l'élément Ω :-)



On voit donc qu'on approche aussi le quart de cercle par un quadrilatère et qu'on va donc estimer la surface du quart de cercle par celle de ce quadrilatère.

2. Donner les fonctions de forme polynomiales $\phi_i(\xi, \eta)$ pour les quatre noeuds de $\widehat{\Omega}$.

Et on peut facilement en déduire :
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \phi_1(\xi,\eta) & = & 1-\xi-\eta \\ \phi_2(\xi,\eta) & = & \xi-2\xi\eta \\ \phi_3(\xi,\eta) & = & \eta-2\xi\eta \\ \phi_4(\xi,\eta) & = & 4\xi\eta \end{array}}$$

Ici, il est vachement utile de vérifier que $\sum_{i=1}^{4} \phi_i(\xi,\eta) = 1$.

3. Donner les dérivées des fonctions de forme par rapport à ξ et à η.

Pour obtenir les dérivées, il suffit tout simplement de dériver :

On écrit ensuite :

$\phi_{1,\xi}(\xi,\eta) = -1$	$\phi_{1,\eta}(\xi,\eta) = -1$
$\phi_{2,\xi}(\xi,\eta) = 1-2\eta$	$\phi_{2,\eta}(\xi,\eta) = -2\xi$
$\phi_{3,\xi}(\xi,\eta) = -2\eta$	$\phi_{3,\eta}(\xi,\eta) = 1-2\xi$
$\phi_{4,\xi}(\xi,\eta) = 4\eta$	$\phi_{4,\eta}(\xi,\eta) = 4\xi$

A nouveau, il est vachement utile de vérifier que $\sum_{i=1}^{4} \phi_{\xi,i}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} \phi_{\eta,i}(\xi,\eta) = 0$.

4. Obtenir le jacobien de la transformation en termes de ξ et de η.

Pour le jacobien de la transformation, il faut juste écrire :

$$\begin{aligned}
J(\xi,\eta) &= \det \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} 1-2\eta+2\sqrt{2}\eta & -2\xi+2\sqrt{2}\xi \\ -2\eta+2\sqrt{2}\eta & 1-2\xi+2\sqrt{2}\xi \end{bmatrix} \\
&= \Big(1-2\eta+2\sqrt{2}\eta\Big)\Big(1-2\xi+2\sqrt{2}\xi\Big) - \Big(-2\eta+2\sqrt{2}\eta\Big)\Big(-2\xi+2\sqrt{2}\xi\Big) \\
&= 1-2\eta+2\sqrt{2}\eta-2\xi+2\sqrt{2}\xi
\end{aligned}$$

5. Sélectionner la règle d'intégration de Hammer qui intègre exactement la surface de l'élément avec le plus petit nombre de points d'intégration : justifier brièvement ce choix.

Comme le jacobien est linéaire, une règle d'intégration avec une seul point permettra d'intégrer exactement la surface !

On prend le centre de gravité du triangle situé en $(\xi_1,\eta_1) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.
Le poids associé est $w_1 = \frac{1}{2}$.

6. En déduire l' expression symbolique de l'estimation de π en termes de nombres entiers et de $\sqrt{2}$. Obtenir ensuite la valeur numérique qu'on pourra comparer utilement à la valeur adéquate de la table ci-dessous. Non, il n'est pas nécessaire d'avoir un calculatrice pour faire ce modeste calcul :-)

n = 4	3.1045694996615865
8	3.1391475703122271
16	3.1414377167038303
32	3.1415829366419015
64	3.1415920457576907
128	3.1415926155921134

Il suffit de calculer l'intégrale :-)

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} \quad \approx \quad \int_{\Omega} dx\ dy \quad &= \quad \int_{\widehat{\Omega}} J(\xi,\eta)\ d\xi\ d\eta \\
&= \quad \frac{1}{2}\ J\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \\
&= \quad \frac{1}{2}\ \left(1-\frac{4}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) \\
&= \quad \frac{1}{2}\ \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

On conclut donc : $\boxed{\pi \quad \approx \quad \tfrac{2}{3}\left(4\sqrt{2}-1\right) \quad = \quad 3.1046}$

3 Un peu de magnétostatique un fifrelin moins bienveillant :-)

Dans l'air ou le vide, l'effet local des forces électromagnétiques s'exprime sous la forme de la divergence du tenseur de Maxwell $\mathbf{f} = \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\sigma}$ avec ce dernier défini comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{BB} + \frac{2}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\ \boldsymbol{\delta}$$

Le champ vectoriel d'induction magnétique est supposé bidimensionnel : $\mathbf{B}(x,y) = [B_x(x,y), B_y(x,y), 0]$. Le symbole $\boldsymbol{\delta}$ représente le tenseur identité et μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.

1. Comment peut-on obtenir **B** à partir du potentiel vecteur magnétique **A** ?
   Quelles sont les uniques composantes non-nulles de **A** dans notre cas ?

   La champ vectoriel d'induction magnétique s'obtient comme le rotationnel du vecteur $\mathbf{A}(x,y) = [0, 0, A_z(x,y)]$ *qui n'a qu'une unique composante qu'on notera* $a(x,y)$ *!*

   Il suffit juste d'écrire :
   $$\boxed{\mathbf{B} \;=\; \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \;=\; \left[\frac{\partial a}{\partial y}, -\frac{\partial a}{\partial x}, 0\right]}$$

2. Démontrer l'expression dite de Arkkio qui permet de calculer le couple C sur le rotor.

   $$C = \frac{L}{\mu_0 d} \int_{\Omega_g} B_r \; B_\theta \; r \; d\Omega = -\frac{L}{\mu_0 d} \int_{\Omega_g} \frac{\partial a}{\partial \theta} \; \frac{\partial a}{\partial r} \;\; d\Omega$$

   où le domaine Ω_g qui est une région annulaire de largeur constante d entourant le rotor et qui représente le tiers de l'entrefer dans notre maillage. La profondeur du rotor est L.
   Expliquer ce que représente le symbole a :-)

   Le couple qui s'exerce sur le rotor Ω_r *produit par la force de Lorentz induite par le champ d'induction magnétique créé par les courants qui passe dans les bobines du rotor s'écrit :*

   $$\mathbf{C} \;=\; L \int_{\Omega_r} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\sigma} \; d\Omega$$

   $$\Big\downarrow \quad \textit{En appliquant le théorème de la divergence,}$$

   $$\mathbf{C} \;=\; L \int_{\partial\Omega_r} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \; ds$$

   $$\Big\downarrow \quad \textit{En effectuant une moyenne sur une famille de cylindres concentriques de l'entrefer,}$$

   $$\mathbf{C} \;=\; \frac{L}{d} \int_{\Omega_g} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \; d\Omega$$

   La région Ω_g *peut être vue comme l'intégrale d'une famille de cylindres concentriques où on calcule le couple à chacun de ces cylindres. On effecue ainsi une moyenne le long de la direction radiale des intégrales le long des cercles qui doivent fournir la même valeur ! Et faire cette moyenne se fait tout simplement en effectuant une intégrale de volume et en divisant le résultat par l'épaisseur d du domaine. Finalement, il faut juste écrire les expressions qui apparaissent dans l'expression de* $\boldsymbol{\sigma}$ *fournie dans l'énoncé !*

   $$\begin{aligned}
   \mathbf{B} \;&=\; B_r \; \mathbf{e}_r + B_\theta \; \mathbf{e}_\theta \\
   \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \;&=\; \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} \; B_r + \frac{2}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \; \mathbf{e}_r \\
   \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \;&=\; \frac{B_r \; r}{\mu_0}(\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}) \;=\; \frac{B_r B_\theta \; r}{\mu_0}\mathbf{e}_z
   \end{aligned}$$

Et on déduit l'expression d'Arkkio[1] *:*

$$C = \frac{L}{\mu_0 d} \int_{\Omega_g} B_r \; B_\theta \; r \; d\Omega = -\frac{L}{\mu_0 d} \int_{\Omega_g} \frac{\partial a}{\partial \theta} \frac{\partial a}{\partial r} \quad d\Omega$$

3. Pourquoi peut-on se contenter d'une expression de $\boldsymbol{\sigma}$ qui n'est valable que dans le vide pour obtenir les effets des forces à distance électromagnétiques sur le rotor qui est en acier ?

   On peut calculer le couple exercé en appliquant le théorème de la divergence sur la surface physique de la pièce mobile, mais également sur n'importe quelle surface fermée englobant la pièce mobile et de l'air ou tout autre milieu électromagnétiquement neutre.

   L'astuce consiste à choisir Ω_g dans l'entrefer qui ne contient que de l'air. Cela nous permet d'utiliser l'expression du tenseur de Maxwell qui n'est valable que dans le vide et dans l'air ! Attention, même en utilisant la perméabilité de l'acier, cette expression n'est pas valable dans l'acier du rotor : il faut être précis dans votre réponse !

4. Que représente la notation $\boldsymbol{\nabla}^\perp$?
   Eh oui, il fallait lire les transparents de Jean-François :-)

   C'est une manière d'écrire le rotationnel dans un problème bidimensionnel :-)

   Il suffit juste d'écrire : $\boxed{\boldsymbol{\nabla}^\perp \quad = \quad \left[\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}, 0\right]}$

5. Quelles sont les unités de la perméabilité magnétique du vide μ_0 ?
   Il peut être utile de savoir que les unités du vecteur d'induction magnétique sont : [kg s^{-2} A^{-1}] :-)

   En utilisant l'expression du tenseur de Maxwell et en connaissant les unités d'une contrainte N/m^2*, on peut directement obtenir le résultat demandé sans avoir aucune notion d'électromagnétisme !*

   Les unités de la perméabilité magnétique sont : $\boxed{\left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2 \text{ A}^2}\right]}$

6. Et finalement, un bonus spécial offert par Jean-François à son insu :-)
   Combien de smiley :-) est-ce que Vincent a incorporé dans cet examen[2] ?

   Il y avait 17 smileys et 7 bienveillant(e)(s) !
   Cette question a plutôt été bien réussie dans l'ensemble malgré quelques petites erreurs de dénombrement dues au stress, vraisemblablement :-)

---

[1] Il faut ici bien noter que $B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial \theta}$: il n'y a pas d'erreur dans l'énoncé :-)

Quelques étudiants se contentent de démontrer cette dernière ligne : non, non !
Il faut bien démontrer que vous aviez lu l'énoncé du projet !

[2] A titre d'indice bienveillant, ce nombre est une prédiction personnelle du nombre de mois qui seront nécessaires aux sympathiques membres de notre police bienveillante pour retrouver Jurgen :-)
Ne passer quand-même pas trop de temps à la question bonus : hein :-)
Ah oui, un tout dernier bonus peut être obtenu en comptant le nombre de fois où j'ai utilisé le mot bienveillant :-)
Vraiment totalement incorrigible, l'enseignant :-)