Exercices de révision 1

Eléments finis

Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$J(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}\right)}_{J(\mathbf{v})}$$

1 Considérons le problème suivant.

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_s$ tel que

$$\begin{aligned} a\ u''(x) + f(x) &= 0, & \forall x \in]0,1[, \\ \mathrm{u}(0) &= 0 & \\ \mathrm{u}(1) &= 0 & \end{aligned}$$

La constante a est un réel strictement positif.
Il s'agit de la *formulation forte* de ce problème.

1. Donner un problème physique[1] qui correspond à ce problème mathématique en définissant a, $u(x)$ et $f(x)$ et en donnant leurs unités.
2. Proposer une définition rigoureuse et si possible pertinente de l'espace $\mathcal{U}_s$?
3. Est-ce que ce problème unidimensionnel fort admet toujours une solution unique ?
4. Ecrire rigoureusement la *formulation faible* en utilisant la procédure présentée au cours. Il s'agit de la procédure dite de Galerkin : ne pas oublier d'introduire les espaces $\mathcal{U}$ et $\widehat{\mathcal{U}}$.
5. Quelle est la différence entre les formulations faibles et fortes ? Ou en d'autres mots, quelle est la différence entre $\mathcal{U}_s$ et $\mathcal{U}$?
6. Ecrire la formulation faible sous la forme d'un problème de minimisation en démontrant[2] rigoureusement leur équivalence.
7. Est-ce la formulation faible ou la formulation forte d'un problème qui est la plus proche de la réalité physique qu'on essaie de modéliser ? Justifier votre propos.

[1] Ne pas bêtement reprendre l'exemple de la corde à linge présentée pendant le cours : il existe plein d'autres exemples !
[2] Oui, oui : cela a été fait au cours, mais êtes-vous capables de le refaire ?

2 On construit la formation discrète du problème précédent en remplaçant $\mathcal{U}$ par $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$ dans la formulation faible ou variationnelle lorsqu'on approche

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i \tau_i(x)$$

Une façon naturelle d'obtenir les valeurs nodales U_i est d'exiger que :

> Trouver $u^h(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}^h$ tel que
>
> $$< (\widehat{u}^h)' \ a \ (u^h)' > \quad = \quad < \widehat{u}^h f >, \qquad \forall \widehat{u}^h \in \mathcal{U}^h,$$

Cette formulation discrète peut s'écrire un système linéaire de n équations à n inconnues. En effet, pour obtenir les n équations algébriques fournissant les valeurs nodales, il suffit d'utiliser, comme fonction test $\widehat{u}^h$, les n fonctions de forme globale τ_i qui forme une base de l'espace discret $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$.

Nous allons effectuer la démarche complète pour $a = 1$, $f(x) = x$ sur l'intervalle $\Omega =]0, 1[$ que l'on va diviser en 4 intervalles de même longueur, en utilisant des fonctions de forme linéaires continues.

1. Calculer la solution analytique de ce problème.
2. Ecrire la formulation discrète sous la forme d'une système linéaire :

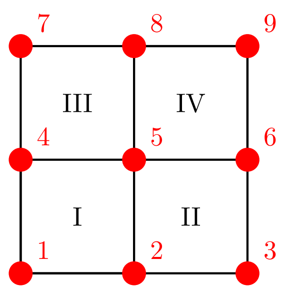
$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} U_j = B_i$$

3. Démontrer que chaque terme de la matrice et du membre se réduit à une intégration sur un ou deux éléments finis.
4. Calculer tous les termes de la matrice de masse A_{ij} et du membre de droite B_i.
5. Sans utiliser aucune calculatrice ou ordinateur, obtenir les 3 valeurs nodales inconnues.
6. Observer ensuite que les valeurs nodales correspondent exactement aux valeurs de la solution analytique en ces abscisses : obtenir une démonstration rigoureuse de cette propriété assez miraculeuse qui n'est malencontreusement valable qu'en 1D !

3 On souhaite résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \boldsymbol{\nabla}^2 u(x,y) + 1 & = & 0, & \forall x \in \Omega, \\ u(x,y) & = & 4 & \forall x \in \partial\Omega, \end{array} \right.$$

en utilisant 4 éléments bilinéaires de côté unitaire qui couvre le domaine $\Omega =]-1, 1[\times]-1, 1[$.



1. Ecrire la formulation discrète de ce problème.

2. Retrouver les quatre fonctions de forme $\phi_i(x, y)$ pour l'élément I.
3. Calculer les dérivées $\phi_{i,x}(x, y)$ et $\phi_{i,y}(x, y)$ des fonctions de forme pour l'élément I.
4. En tirant profit de la symétrie du problème, calculer[3] uniquement les termes requis de la matrice de rigidité et du membre de droite du système linéaire discret.
5. Obtenir l'unique valeur nodale inconnue

Bien observer le problème et réfléchir à la meilleure manière d'effectuer les calculs permet d'obtenir pas mal de simplifications. Avoir une vision géométrique du problème permet d'obtenir la solution beaucoup plus facilement que de se lancer dans une approche purement mécanique...

Théorème de Lax et Milgram

Si	$\mathcal{U}$ est un espace d'Hilbert a est une forme bilinéaire continue et coercive b est une forme linéaire continue,
alors,	le problème abstrait $\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver } u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U} \text{ tel que} \\ a(\widehat{u}, u) \quad = \quad b(\widehat{u}), \qquad \forall \widehat{u} \in \mathcal{U},\end{array}}$
	a une solution unique qui dépend continûment du terme b

4 Quelle est la différence entre un espace de Banach et un espace d'Hilbert ?

1. Définir le concept d'espace vectoriel.
2. Définir le concept d'espace de Banach.
3. Définir le concept d'espace de Hilbert.
4. Ecrire la relation mathématique qui est équivalente à la phrase u dépend continûment de b.

5 Avec $\Omega =]0, 1[$, considérons le problème classique :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver une fonction } u(x) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ telle que} \\ \begin{array}{rclll} u''(x) & = & f(x), & & \forall\ x \in\ \Omega, \\ u(0) & = & u(1) & = & 0, \end{array}\end{array}}$$

où f appartient à $L^2(\Omega)$ tandis que k est continue et vérifie $0 < k_* \leq k(x) \leq k^* < \infty, \forall x \in \Omega$.

1. Ecrire la forme bilinéaire continue et coercive $a(u, v)$ et la forme linéaire continue $b(u)$ de la formulation faible du problème pour $u \in H_1(\Omega)$.
2. Définir le concept de problème bien posé : a-t-on ici un problème bien posé ?
3. Quel est la constante optimale de continuité[4] de a ?
4. Quelle est la constante optimale de coercivité[5] de a ?

[3] Toutes les intégrales peuvent être obtenues analytiquement ou être obtenues vraiment très facilement en utilisant un peu de géométrie !
[4] En considérant $\mathcal{U}$ un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$,
une forme $a\ : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est une forme continue si $\exists\ c > 0$ tel que $|a(u, v)| \leq c\ \|u\|\|v\|\ \forall u, v \in \mathcal{U}$
[5] Avec toujours le même espace vectoriel,

6 Est-ce que les expressions suivantes sont des formes bilinéaires continues, symétriques et coercives dans les espaces donnés ?

– $a(u,v) = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \; d\Omega$ dans $H_0^1(\Omega)$
– $a(u,v) = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \; d\Omega$ dans $H^1(\Omega)$
– $a(u,v) = \int_\Omega uv + \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \; d\Omega$ dans $H^1(\Omega)$

7 Avec $\Omega =]0,1[$, considérons maintenant le problème suivant :

> Trouver une fonction $u(x) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ telle que
>
> $$\begin{array}{rclcl} -\left(k(x)u'(x)\right)' + u(x) & = & f(x), & & \forall\, x \in\ \Omega, \\ u'(0) & = & u'(1) & = & 0, \end{array}$$

où f appartient à $L^2(\Omega)$ tandis que k est continue et vérifie $0 < k_* \leq k(x) \leq k^* < \infty, \forall x \in \Omega$.

1. Ecrire la forme bilinéaire continue et coercive $a(u,v)$
   et la forme linéaire continue $b(u)$ de la formulation faible de ce problème.
2. Donner le plus grand espace de Sobolev qui contient les solutions faibles de ce problème.
3. Démontrer que la constante de continuité de a est donnée par $c = 2\max(k^*, 1)$.
4. Démontrer que la constante de coercivité de a est donnée par $\alpha = \min(k_*, 1)$.

8 Toujours avec $\Omega =]0,1[$, nous nous intéressons finalement au problème :

> Trouver une fonction $u(x) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ telle que
>
> $$\begin{array}{rclcl} u''''(x) & = & f(x), & & \forall\, x \in\ \Omega, \\ u(0) & = & u'(0) & = & 0, \\ u''(1) & = & u'''(1) & = & 0, \end{array}$$

où f appartient à $L^2(\Omega)$.

1. Ecrire la forme bilinéaire continue et coercive $a(u,v)$
   et la forme linéaire continue $b(u)$ de la formulation faible de ce problème.
2. Donner le plus grand espace de Sobolev qui contient les solutions faibles de ce problème.
3. Démontrer la continuité et la coercivité de a.
4. Donner une situation physique modélisée par ce problème.

9 Démontrer que la définition de continuité d'une application linéaire b

$$\exists c > 0, \quad |b(u)| \leq c||u||, \quad \forall u \in \mathcal{U}$$

est équivalente à la définition usuelle de la continuité d'une fonction b en un point a lorsque $\mathcal{U} = \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leq \delta \Rightarrow |b(x) - b(a)| \leq \epsilon,$$

une forme $a \ : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est une forme coercive si $\exists\ \alpha > 0$ tel que $a(u,u) \geq \alpha\ \|u\|^2\ \forall u \in \mathcal{U}$