Intégration numérique : solutions

1 Pour rappel, l'intégration numérique consiste à estimer l'intégrale d'une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ en sommant des évaluations pondérées de cette fonction réalisées en un nombre fini n de points $x_k \in [a, b]$. La forme d'une règle d'intégration sur l'intervalle $[-1, 1]$ s'écrit:

$$\boxed{\underbrace{\int_{-1}^{1} f(x)\ dx}_{I} \quad \approx \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} w_k\ f(x_k)}_{I_h}}$$

où les w_k sont appelés les poids d'intégration, les x_k sont appelés les points d'intégration. On note l'erreur d'intégration par $E_h = I - I_h$.

La règle de quadrature est déterminée par le choix des poids et points d'intégration. Le degré de précision d'une méthode d'intégration est p si elle permet d'intégrer exactement tout polynôme de degré p ou inférieur. Pour intégrer une fonction sur un domaine $[a, b]$ quelconque, on effectue le changement de variable

$$x(\xi) = \frac{b-a}{2}\ \xi + \frac{b+a}{2}$$

L'intégrale sur un intervalle quelconque peut donc directement s'obtenir à partir de l'intégrale sur l'intervalle de référence $[-1, 1]$.

$$I = \int_a^b f(x)\ dx \ = \ \int_{-1}^{1} f(x(\xi))\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\ d\xi \ = \ \frac{b-a}{2}\ \int_{-1}^{1} f(x(\xi))\ d\xi$$

1. Il suffit de calculer les intégrales exacte sur le domaine Ω des trois monômes 1, x et y :

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} dx\ dy \ = \ \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} dx\ dy \ = \ \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} dx\ dy \ = \ \frac{1}{6}$$

Ensuite, on identifie les trois expressions obtenues avec la quadrature en termes de w_k et cela permet de trouver les trois relations requises pour obtenir les poids :

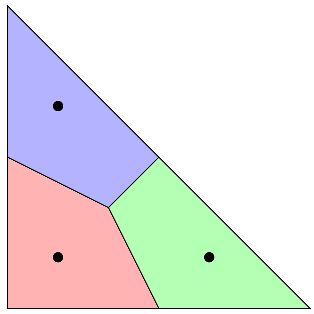
$$\sum_{k=1}^{3} w_k f(x_k, y_k) \ = \ \int_\Omega f(x,y)\ d\Omega$$

$$\Big\downarrow \quad \text{En considérant les trois fonctions 1, } x \text{ et } y,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

2. On peut évidemment résoudre ce système de trois équations à 3 inconnues. Mais il est possible d'être plus astucieux :-) Un peu d'intuition géométrique permet de deviner que les trois poids doivent être égaux. On peut aussi suspecter à juste titre que tous les points d'intégration sont à mi-chemin entre un sommet et le centre de gravité.

   Utiliser l'intuition géométrique et la symétrie est souvent la manière dont on détermine les points et poids des quadratures plus complexes.

   $$w_1 = w_2 = w_3$$

   On pourra donc se contenter de l'unique première équation pour obtenir l'unique valeur identique.

   On écrit donc :

   $$3w_1 = \underbrace{\int_0^1 \int_0^{1-x} dxdy}_{=\frac{1}{2}}$$

   $$w_1 = \frac{1}{6}$$

   On conclut donc : $\boxed{w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{6}}$

3. On possède trois degrés de liberté avec les poids w_i, il semble donc acquis qu'il sera certainement possible d'intégrer exactement un polynôme quelconque de degré un

   $$p(x) = a + bx + cy$$

   caractérisé par trois paramètres distincts. Toutefois, comme les abscisses des points d'intégration semblent avoir été choisies de manière astucieuse, il est probable que la quadrature puisse aussi intégrer des polynômes de degré plus élevé.

4. Pour obtenir le degré de précision de la quadrature, il faut juste vérifier que chaque terme polynomial élémentaire de degré croissant est bien correctement intégré par la quadrature...

   $$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 \, dxdy = \frac{1}{12} \qquad I_h = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{12}$$

   $$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} y^2 \, dxdy = \frac{1}{12} \qquad I_h = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{12}$$

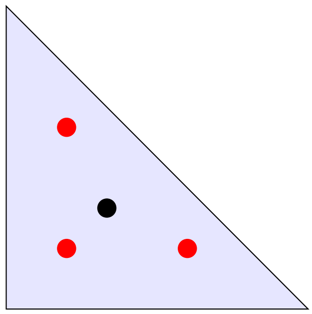
   $$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \, dxdy = \frac{1}{24} \qquad I_h = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{18} + \frac{2}{18}\right) = \frac{1}{24}$$

   $$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^3 \, dxdy = \frac{1}{20} \qquad I_h = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{216} + \frac{1}{216} + \frac{64}{216}\right) = \frac{11}{216}$$

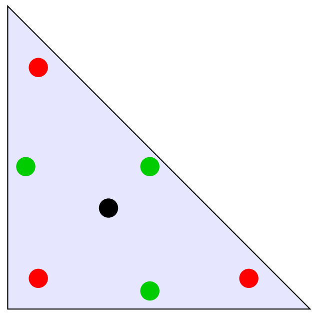
   On conclut donc que le degré de précision p de la méthode vaut deux.

2 Cet exercice est plus compliqué qu'il n'y paraît. Initialement, je pensais que c'était évident. A posteriori, un certain nombre d'assistants, de tuteurs et d'étudiants s'y sont cassé les dents.

1. Esquisser un croquis est évidemment la clé pour trouver la solution :-)



Quadrature de Hammer à 4 points



Quadrature de Hammer à 7 points

2. Pour la quadrature à 4 points, les points $2, 3, 4$ sont symétriques.
   Pour la quadrature à 7 points, les points $2, 3, 4$ et les points $5, 6, 7$ sont symétriques.
3. En tirant profit de la symétrie, il ne faut que deux équations pour résoudre obtenir les poids, mais il faut trouver des équations distinctes. Ainsi, exiger de pouvoir intégrer exactement la fonction constante ou la fonction linéaire génère par exemple exactement la même contrainte.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_\Omega d\Omega = \frac{1}{2} & \qquad I_h &= w_1 + 3w_2 = \frac{1}{2}\\
I &= \int_\Omega x\ d\Omega = \frac{1}{6} & \qquad I_h &= \frac{w_1}{3} + w_2 = \frac{1}{6}\\
I &= \int_\Omega x^2\ d\Omega = \frac{1}{12} & \qquad I_h &= \frac{w_1}{9} + w_2\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{9}{25}\right) = \frac{1}{12}\\
I &= \int_\Omega x^3\ d\Omega = \frac{1}{20} & \qquad I_h &= \frac{w_1}{27} + w_2\left(\frac{1}{125}+\frac{1}{125}+\frac{27}{125}\right) = \frac{1}{20}
\end{aligned}
$$

En combinant la contrainte générée par la fonction constante et le fonction quadratique[1], on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2} - 3w_2\right) + \frac{11}{25}w_2 &= \frac{1}{12}\\
\left(\frac{11}{25} - \frac{1}{3}\right) w_2 &= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{18}\right)\\
\frac{33-25}{75}\ w_2 &= \frac{3-2}{36}\\
&\downarrow\\
w_2 &= \frac{75}{8 \times 36} = \frac{75}{288} = 0.2604
\end{aligned}
$$

[1] On obtient exactement le même résultat en combinant la contrainte de la fonction constante avec celle de la fonction cubique au passage :-)

On conclut donc :
$$\boxed{\begin{array}{rcccccl} & & w_1 & = & \frac{1}{2} - \frac{75}{96} & = & -\frac{27}{96} = -0.2812 \\ w_2 & = w_3 & = w_4 & = & \frac{75}{288} & = & 0.2604 \end{array}}$$

Obtenir un poids négatif n'est pas vraiment souhaitable,
mais il n'est pas toujours possible de l'éviter :-)

La seconde partie de la question est nettement plus compliquée. Pour la règle à 7 points, il faut écrire trois équations distinctes pour obtenir la solution et la résolution est loin d'être évidente.

$$\begin{array}{rcl} I_h & = & w_1 + 3w_2 + 3w_5 & = & \frac{1}{2} & = & \int_\Omega d\Omega \\ I_h & = & \frac{w_1}{3} + w_2 + w_5 & = & \frac{1}{6} & = & \int_\Omega x\ d\Omega \\ I_h & = & \frac{w_1}{9} + w_2\left((1-2b)^2 + 2b^2\right) + w_5\left((1-2a)^2 + 2a^2\right) & = & \frac{1}{12} & = & \int_\Omega x^2\ d\Omega \\ I_h & = & \frac{w_1}{27} + w_2\left((1-2b)^3 + 2b^3\right) + w_5\left((1-2a)^3 + 2a^3\right) & = & \frac{1}{20} & = & \int_\Omega x^3\ d\Omega \\ I_h & = & \frac{w_1}{81} + w_2\left((1-2b)^4 + 2b^4\right) + w_5\left((1-2a)^4 + 2a^4\right) & = & \frac{1}{30} & = & \int_\Omega x^4\ d\Omega \end{array}$$

On aperçoit immédiatement que les deux premières équations sont équivalentes et qu'il faudra donc utiliser les contraintes liées à l'intégration exacte des fonctions $f(x) = 1$, $f(x) = x^2$ et $f(x) = x^3$.
L'obtention d'une expression analytique simple semble être un vrai challenge : j'attends donc l'étudiant qui trouvera une manière simple de la trouver. Le calcul symbolique semble toutefois montrer que cela doit exister :-)

4. Un exemple simple d'implémentation pourrait être :-)

```
from numpy import *
from numpy.linalg import solve

#
# -1- Hammer : 4 points
#

A = array([[1,3],
           [1/9,11/25]])
I = array([1/2,1/12])
w = solve(A,I)

print("====== Hammer : 4 points ========= ")
print("              w_1 = %10.7f " % w[0])
print("        w_2 = w_3 = %10.7f " % w[1])

#
# -2- Hammer : 4 points
#

a = (6+sqrt(15))/21
b = (6-sqrt(15))/21
A = array([[1,3 ,3],
           [1/27,(1-2*b)**3+2*b**3,(1-2*a)**3+2*a**3],
           [1/9 ,(1-2*b)**2+2*b**2,(1-2*a)**2+2*a**2]])
I = array([1/2,1/20,1/12])
w = solve(A,I)

print("====== Hammer : 7 points ========= ")
print("              w_1 = %10.7f " % w[0])
print("  w_2 = w_3 = w_4 = %10.7f " % w[1])
print("  w_5 = w_6 = w_7 = %10.7f " % w[2])
```

De manière totalement surprenante, ce programme `python` semble démontrer que ma solution est correcte du moins pour la règle de Hammer à 4 points. Tous ceux qui pensent donc que le professeur est complètement allumé peuvent oublier tous leurs espoirs : le projet d'éléments finis sera tel que vous aurez l'impression que le cours de mécanique des fluides est une promenade de santé le long du canal à Molenbeek en période de confinement à Bruxelles, en comparaison avec ce qui vous attend. N'oubliez de prévoir vos gadgets anti-covid et de vous inscrire à une séance de tutorat pour étudiants essentiels.

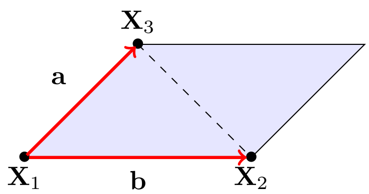
On écrit le jacobien comme l'expression suivante :

$$
\begin{aligned}
J(\xi,\eta) &= \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} X_2 - X_1 & X_3 - X_1 \\[2ex] Y_2 - Y_1 & Y_3 - Y_1 \end{bmatrix} \\
&= (X_2 - X_1)(Y_3 - Y_1) - (X_3 - X_1)(Y_2 - Y_1)
\end{aligned}
$$

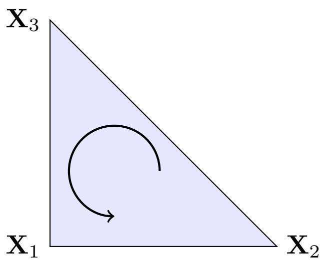
La valeur absolue du jacobien représente le rapport des surfaces élémentaires $d\Omega$ et $d\hat{\Omega}$.

Le signe permet de déterminer l'orientation du triangle.

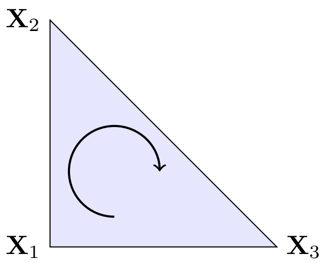
On peut aussi voir que la valeur absolue du jacobien est la norme de vecteur obtenue en faisant le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Le signe du jacobien est l'orientation de ce vecteur.



Pour l'intégation, on prend la valeur absolue car on s'intéresse uniquement au rapport des surfaces, mais le signe permet de distinguer l'orientation du triangle.



$J > 0$



$J < 0$