Séance 1

Intégration numérique

$$\underbrace{\int_{\widehat{\Omega}} f(x,y)\ dx\ dy}_{I} \approx \underbrace{\sum_{k=1}^{n} w_k\ f(x_k,y_k)}_{I_h}$$

1 Sur le triangle $\widehat{\Omega}$ dont les trois sommets sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$ dans le plan $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$, la règle d'intégration de Hammer à 3 points est définie par les poids et points suivants :

ξ_k	η_k	w_k
1/6	1/6	w_1
1/6	2/3	w_2
2/3	1/6	w_3

Un petit facétieux a perdu les valeurs des trois poids : en fait, c'est vraiment très facile de les retrouver, ils se trouvent dans les notes du cours de méthodes numériques :-)

1. Comment peut-on calculer ces poids ?
2. Calculer les trois poids.
3. Quel est le degré de précision minimal[1] qu'on peut être certain d'obtenir en choisissant ces poids de la manière la plus clairvoyante ?
4. Quel est le degré de précision de la méthode de Hammer à 3 points ?

[1]Une règle d'intégration a un degré de précision d, si elle permet d'intégrer exactement tout polynômes de degré d ou inférieur :-)

2 Considérons maintenant les règles de Hammer à 4 et 7 points :

ξ_k	η_k	w_k
$1/3$	$1/3$	w_1
$3/5$	$1/5$	w_2
$1/5$	$3/5$	w_3
$1/5$	$1/5$	w_4

ξ_k	η_k	w_k
$1/3$	$1/3$	w_1
$1-2b$	b	w_2
b	$1-2b$	w_3
b	b	w_4
a	$1-2a$	w_5
$1-2a$	a	w_6
a	a	w_7

avec $a = \dfrac{(6+\sqrt{15})}{21}$ et $b = \dfrac{(6-\sqrt{15})}{21}$.

1. Dessiner les points d'intégrations sur un triangle parent.
2. Certains poids seront identiques[2] en raison de la symétrie des points. Lesquels ?
3. Sans faire appel à un ordinateur, obtenir les poids des deux règles !
   Pour la règle à 4 points, c'est vraiment facile.
   Pour la règle à sept points, c'est un peu plus compliqué d'obtenir les trois expressions en fonction de a et b qu'il est évidemment impossible à évaluer numériquement :-)
4. Vérifier avec `python` (numériquement ou avec le calcul symbolique) que vous avez obtenu la bonne valeur.

3 Pour transformer l'intégrale sur un triangle quelconque Ω défini par les 3 sommets (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3), on peut effectuer l'intégrale sur le triangle parent $\widehat{\Omega}$ en effectuant un changement de variables donné par :

$$\begin{array}{rcccccc} x(\xi,\eta) & = & X_1\ (1-\xi-\eta) & + & X_2\ \xi & + & X_3\ \eta \\ y(\xi,\eta) & = & Y_1\ (1-\xi-\eta) & + & Y_2\ \xi & + & Y_3\ \eta \end{array}$$

L'intégrale se transforme ensuite comme suit :

$$\int_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_{\widehat{\Omega}} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))\ J(\xi,\eta)\ d\xi d\eta$$

1. Quel est l'expression du jacobien de la transformation $J(\xi,\eta)$?
2. Quelle est l'interprétation géométrique de ce jacobien ?
3. Le jacobien d'une transformation s'écrit sous la forme d'une valeur absolue d'une expression : quel est le sens géométrique de ce signe ?
4. Quel est le lien entre ce jacobien et le produit vectoriel ?

[2]Pour la règle a 4 points, il n'y a que deux valeurs distinctes de poids et pour la règle à 7 points, il n'y a que trois valeurs distinctes de poids... En gros, il y a donc une et deux inconnues respectivement car une relation est évidente...