Séance 2

Fonctions de forme et jacobiens

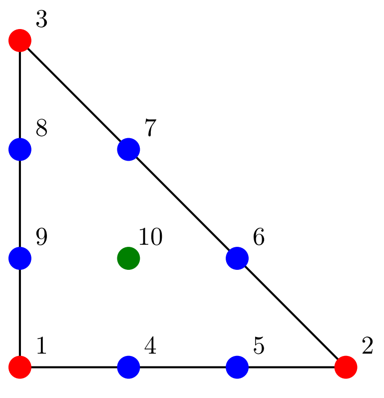
$$\boxed{u(x,y) \quad \approx \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} U_i \ \phi_i(x,y)}_{u^h(x,y)}}$$

4 Considérons le triangle $\widehat{\Omega}$ dont les trois sommets sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$ dans le plan $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$. Les fonctions de forme linéaires pour cet élément sont :

$$\begin{array}{rcl} \phi_1(\xi,\eta) & = & 1-\xi-\eta \\ \phi_2(\xi,\eta) & = & \eta \\ \phi_3(\xi,\eta) & = & \xi \end{array}$$

Quelles sont les fonctions de forme cubiques associées aux dix noeuds définis ci-dessous ?

1. Ecrire les 10 fonctions de forme, sans utiliser un ordinateur !
2. Ensuite, écrire un programme `python` permettant d'obtenir les coefficients des polynômes : vérifier que les polynômes obtenus coïncident.
3. Finalement, faire un petit programme `python` permettant de visualiser ces fonctions de forme et de vérifier que la somme des dix fonctions de forme vaut 1.



5 Considérons le triangle $\widehat{\Omega}$ dont les trois sommets sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$ dans le plan $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$. C'est pas le même élément que celui qui se trouve dans le syllabus.
Bien voir les coordonnées du troisième sommet !

Dessiner l'élément.
Obtenir les trois fonctions de forme **pour cet élément !**

6 Matthieu a oublié la valeur de pi. Nathan lui propose de la retrouver au moyen de l'interpolation polynomiale et de l'intégration numérique.

En effet, en intégrant la surface d'un élément triangulaire courbe approchant une fraction $\frac{1}{n}$ du cercle, on peut obtenir une estimation numérique de π. Ici, vous allez faire ce calcul pour le quart de cercle ($n = 4$).

Sur l'élément triangulaire parent $\widehat{\Omega}$ avec quatre noeuds, on définit quatre fonctions de forme.

On définit ensuite la transformation de cet élément parent $\widehat{\Omega}$ vers l'élément Ω avec les relations :

	ξ_i	η_i
1	0.0	0.0
2	1.0	0.0
3	0.0	1.0
4	0.5	0.5

	X_i	Y_i
1	0.0	0.0
2	1.0	0.0
3	0.0	1.0
4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

$$x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} X_i\phi_i(\xi,\eta) \qquad y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} Y_i\phi_i(\xi,\eta)$$

Les coordonnées des noeuds sont données dans les deux tables.

1. Dessiner $\widehat{\Omega}$ et Ω pour $n = 4$.
2. Ecrire des fonctions de forme polynomiales pour les quatre sommets en respectant scrupuleusement la numérotation de la figure et en plaçant toujours l'origine des repères au noeud inférieur gauche.
3. Ecrire également les dérivées par rapport à ξ et à η.
4. Ecrire la matrice jacobienne en termes de ξ et de η.
5. Sélectionner la règle d'intégration de Hammer qui intègre exactement la surface de l'élément avec le plus petit nombre de points d'intégration : justifier brièvement ce choix.
6. En déduire une expression symbolique de l'estimation de π en termes de nombres entiers et de $\sqrt{2}$ qu'on pourra comparer utilement à la valeur numérique adéquate de la table ci-dessous :

n = 4	3.1045694996615865
8	3.1391475703122271
16	3.1414377167038303
32	3.1415829366419015
64	3.1415920457576907
128	3.1415926155921134
256	3.1415926512148098
512	3.1415926534413545
1024	3.1415926535805161
2048	3.1415926535892131
4096	3.1415926535897567