Formulations fortes, faibles et discrètes : solutions

7 C'est une question un peu plus théorique sur des aspects sur lesquels on reviendra !
On se restreint ici à un cas unidimensionnel avec $\Omega =]0,1[$.
Mais, il est déjà utile de commencer très doucement à se poser les bonnes questions.

1. Un exemple simple est la conduction thermique unidimensionnelle stationnaire !

$$k\frac{d^2T}{dx^2} + f = 0$$

avec T la température [K],
k la conductivité thermique [Watt/K m],
et f une densité de source de chaleur [Watt/m^3].

Evidemment, l'exemple de la corde tendue du cours reste toujours pertinent :-)

$$T\frac{d^2u}{dx^2} + f = 0$$

avec u le déplacement vertical [m],
T la tension dans la corde [N],
et f une densité linéïque de charge [N/m].

2. Il faut juste avoir un espace fonctionnel qui contiennent des fonctions deux fois dérivables :-)

On pourrait choisir : $$\boxed{\mathcal{U}_s \quad = \quad \{u(x) \in \mathcal{C}_2(\Omega) \text{ tels que } u(0) = u(1) = 0\}}$$

Ici, on a incorporé les deux conditions aux limites dans la définition de l'espace pour avoir une certaine symétrie avec la formulation faible. Ce n'était pas forcément requis, mais cela rendra le reste de la solution plus élégant :-)

3. Eh oui : la solution est directement obtenue comme la double primitive de la fonction f !

$$u(x) = \frac{1}{a}\int\int f(x)\ dx + Ax + B$$

où les deux constantes sont fixées par les deux conditions aux limites.

□

4. La formulation faible s'écrit sous la forme habituelle :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver } u(x) \in \mathcal{U} \text{ tel que} \\[1em] \underbrace{<\ \widehat{u}'\ u'\ >}_{a(\widehat{u},u)} \quad = \quad \underbrace{<\widehat{u}f\ >}_{b(\widehat{u})}, \qquad \forall \widehat{u} \in \widehat{\mathcal{U}},\end{array}}$$

avec $\mathcal{U} = \widehat{\mathcal{U}} = \big\{u(x) \in H^1(\Omega) \text{ tels que } u(0) = u(1) = 0\big\}$.

5. Les deux espaces sont identiques lorsque les conditions essentielles sont homogènes : on impose uniquement des valeurs nulles sur la partie de Dirichlet de la frontière du domaine.
   Ce qui est bien le cas dans le problème considéré.

6. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ dans la définition qui précède a été choisi pour que être certain de l'intégrale que l'expression du problème faible aie du sens. Plus précisément, il s'agit d'avoir

$$< \, \widehat{u}' \; u' > \; < \; \infty$$

   Nous reviendrons plus tard sur l'intérêt de cet espace fonctionnel particulier et de ce choix particulier. Mais, si vous avez trouvé seuls sans regarder les notes de cours, les transparents : c'est que vous êtes des étudiants astucieux : bravo :-)
   Cet espace contient les fonctions carré-intégrables sur le domaine avec une dérivée première qui est également carré-intégrable. La définition formelle des espaces de Sobolev pour s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) \quad = \quad H^0(\Omega) \quad &= \quad \left\{ u : x \in \,]0,1[\, \rightarrow \; u(x) \in \mathcal{R} : \text{avec} \int_0^1 \Big(u(x) \Big)^2 dx < \infty \right\} \\ H^1(\Omega) \quad &= \quad \left\{ u : x \in \,]0,1[\, \rightarrow \; u(x) \in \mathcal{R} : \text{avec} \int_0^1 \Big(u(x) \Big)^2 + \Big(u'(x) \Big)^2 dx < \infty \right\} \end{aligned}$$

   On peut immédiatement observer que si u est un élément de H^1, alors u et u' sont des fonctions carré-intégrables et appartient à L^2.
   Pour les étudiants curieux, les espaces de Sobolev, ce sont des espaces d'Hilbert qui forment la base de formalisme particulièrement élégant des éléments finis, mais on y reviendra plus tard !

7. L'ensemble des solutions fortes est un sous-ensemble des solutions faibles.
   Se rappeler l'allure de la solution faible de la corde linge sous une charge ponctuelle qui n'est pas dérivable et qui n'est donc pas une solution forte !

   Ce qu'on peut écrire sous la forme : $\boxed{\mathcal{U}_s \quad \subset \quad \mathcal{U}}$

8. La formulation variationnelle sous la forme d'un problème de minimum s'écrit comme suit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Trouver } u(x) \in \mathcal{U} \text{ tel que} \\[1em] J(u) \quad = \quad min_{v \,\in\, \mathcal{U}} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} \; a(v,v) - b(v) \right)}_{J(v)}, \end{array}}$$

   Pour démontrer l'équivalence entre la formulation faible et la recherche de la fonction qui minimise la fonctionnelle, on recherche une fonction u qui minimise J et s'annule aux deux extréimités. Introduisons $\widehat{u}$ une fonction arbitraire qui s'annule aussi aux deux extrémités. Parmi les fonctions satisfaisant les conditions essentielles, une fonction u rend la fonctionnelle stationnaire si la condition suivante est satisfaite.

$$\frac{dJ(u + \varepsilon \widehat{u})}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \quad = \quad 0, \qquad\qquad \forall \widehat{u},$$

   On effectue un peu d'algèbre en prenant $a = 1$ sans perte de généralité.

$$
\begin{aligned}
J(u+\varepsilon\widehat{u}) \;=\; & \underbrace{\tfrac{1}{2} < u' \; u' > - < f \; u >}_{J(u)} + \varepsilon < u' \; \widehat{u}' > - \varepsilon < f \; \widehat{u} > + \tfrac{\varepsilon^2}{2} < \widehat{u}' \; \widehat{u}' >
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dJ(u+\varepsilon\widehat{u})}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \;=\; < u' \; \widehat{u}' > - < f \; \widehat{u} >
$$

et on retrouve la formulation faible.

Cette condition est nécessaire pour que la fonctionnelle atteigne un minimum en la solution u, mais n'est pas suffisante. Il faut donc encore vérifier que u correspond bien à un minimum en effectuant à nouveau un petit peu d'algèbre pour une fonction quelconque $v \in \mathcal{U}$ qu'il est possible de décomposer en une combinaison de u et d'une variation $\widehat{u} \in \widehat{\mathcal{U}}$

$$
\begin{aligned}
J(v) \;&=\; J(u+\widehat{u}) \\
&=\; \tfrac{1}{2} < (u' + \widehat{u}')^2 > - < f(u+\widehat{u}) > \\
&=\; \underbrace{\tfrac{1}{2} < u' \; u' > - < f \; u >}_{J(u)} + \underbrace{< u' \; \widehat{u}' > - < f \; \widehat{u} >}_{\substack{= 0 \\ \text{car } u \text{ est solution faible !}}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} < \widehat{u}' \; \widehat{u}' >}_{\substack{\geq 0 \\ \text{car } a \text{ positif !}}} \\
&\geq\; J(u)
\end{aligned}
$$

Le dernier terme est toujours du signe de a.
La fonctionnelle J atteint donc un minimum en u pour autant que a soit positif.

9. La formulation faible correspond à la forme globale ou intégrale des lois de bilan ou de conservation, tandis que la formulation correspond à la forme locale qu'on déduit de la forme globale en supposant par exemple la continuité des fonctions considérées. En ce sens, la formulation faible ou intégrale peut donc être considérée comme la plus proche de la physique à modéliser. Il est donc heureux que la méthode des éléments finis se base sur d'une formulation faible.

8

1. Obtenir la solution analytique est un jeu d'enfants :-)
   Il suffit d'intégrer deux fois la fonction source et de tenir compte des conditions aux limites.

   On obtient immédiatement : $\boxed{u(x) \;=\; \dfrac{x(1-x^2)}{6}.}$

2. Comme $\mathcal{U}^h$ a été introduit comme un sous-espace de $\mathcal{U}$, une facon naturelle d'obtenir les U_i est d'exiger que en gardant $a = 1$ par simplicité :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver } u^h \in \mathcal{U}^h \text{ tel que} \\ \underbrace{< (\widehat{u}^h)'(u^h)' >}_{a(\widehat{u}^h, u^h)} \quad = \quad \underbrace{< \widehat{u}^h f >}_{b(\widehat{u}^h)}, \qquad \forall \widehat{u}^h \in \mathcal{U}^h,\end{array}}$$

ou de manière strictement équivalente :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver } u^h \in \mathcal{U}^h \text{ tel que} \\ J(u^h) \quad = \quad min_{v^h \in \mathcal{U}^h} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\ a(v^h, v^h) - b(v^h)\right)}_{J(v^h)},\end{array}}$$

C'est la *formulation discrète* qui un système linéaire de n équations à n inconnues. Pour obtenir les n équations algébriques fournissant les valeurs nodales, il suffit de substituer u^h dans l'expression de la fonctionnelle

$$\begin{aligned}
J(u^h) &= \tfrac{1}{2} \int_\Omega (u^h)'(u^h)'\ d\Omega - \int_\Omega f\ u^h\ d\Omega, \\
J(u^h) &= \tfrac{1}{2} \int_\Omega (\sum_{i=1}^n U_i \tau_i')\ (\sum_{j=1}^n U_j \tau_j')\ d\Omega - \int_\Omega f\ (\sum_{i=1}^n U_i \tau_i)\ d\Omega, \\
J(u^h) &= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_i\ U_j\ \int_\Omega (\tau_i')\tau_j')\ d\Omega - \sum_{i=1}^n U_i \int_\Omega f\ \tau_i\ d\Omega, \\
J(u^h) &= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_i\ U_j\ A_{ij} - \sum_{i=1}^n U_i B_i,
\end{aligned}$$

où la matrice A_{ij} et le vecteur B_i sont définis par

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_\Omega (\tau_i')\tau_j')\ d\Omega, \\
B_i &= \int_\Omega f \tau_i\ d\Omega.
\end{aligned}$$

Le minimum de la fonctionnelle est obtenu lorsque

$$0 = \frac{\partial J(u^h)}{\partial U_i} = \sum_{j=1}^n\ A_{ij}\ U_j - B_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ce sont exactement les équations que nous aurions obtenues en sélectionnant les n fonctions de forme τ_j comme fonction arbitraire $\widehat{u}^h$ dans la formulation faible. Comme ces fonctions de forme forment une base du sous-espace d'approximation, cela revient bien à considérer que les équations sont satisfaites pour n'importe quel élément de $\mathcal{U}^h$.

3. Connaissant les fonctions de forme globales τ_i et la fonction f, nous devons calculer les composantes A_{ij} de la matrice de raideur et B_i du vecteur de forces nodales. Une fonction de forme τ_i est associée au noeud i, et s'annule hors des éléments auxquels appartient ce noeud. Soient Ω_e et Ω_{e+1} les deux éléments contenant le noeud. Au lieu de calculer A_{ij} sur le domaine Ω, il suffit d'effectuer l'intégration sur ces deux seuls éléments

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\Omega_e} \tau_{j,x}(x)\ \tau_{i,x}(x)\ dx + \int_{\Omega_{e+1}} \tau_{j,x}(x)\ \tau_{i,x}(x)\ dx \\ B_i &= \int_{\Omega_e} f(x)\tau_i(x)dx + \int_{\Omega_{e+1}} f(x)\tau_i(x)\ dx \end{aligned}$$

En passant aux fonctions de forme locale sur chaque élément, on écrit pour un i intérieur :

$$\begin{aligned} A_{i\ i-1} &= \int_{\Omega_e} \phi^e_{2,x}(x)\ \phi^e_{1,x}(x)\ dx \\ A_{ii} &= \int_{\Omega_e} \phi^e_{2,x}(x)\ \phi^e_{2,x}(x)\ dx + \int_{\Omega_{e+1}} \phi^{e+1}_{1,x}(x)\ \phi^{e+1}_{1,x}(x)\ dx \\ A_{i\ i+1} &= \int_{\Omega_{e+1}} \phi^{e+1}_{1,x}(x)\ \phi^{e+1}_{2,x}(x)\ dx \\ B_i &= \int_{\Omega_e} \phi^e_2(x)\ f(x)\ dx + \int_{\Omega_{e+1}} \phi^{e+1}_1(x)\ f(x)\ dx \end{aligned}$$

On décompose ensuite chaque terme :

$$\begin{aligned} A_{i\ i-1} &= A^e_{21} \\ A_{ii} &= A^e_{22} + A^{e+1}_{11} \\ A_{i\ i+1} &= A^{e+1}_{12} \\ B_i &= B^e_2 + B^{e+1}_1 \end{aligned}$$

avec les *matrices locales* et des *vecteurs locaux* :

$$\begin{aligned} A^e_{ij} &= \int_{\Omega_e} \phi^e_{i,x}(x)\ \phi^e_{j,x}(x)\ dx \\ B^e_i &= \int_{\Omega_e} f(x)\phi^e_i(x)\ dx \end{aligned}$$

Finalement, il reste uniquement à calculer ces

$$\begin{aligned} A^e_{ij} &= \int_{\Omega_e} \phi^e_{i,x}(x)\ \phi^e_{j,x}(x)\ dx\ =\ \int_{-1}^{1} \left(\phi_{i,\xi}(\xi)\frac{d\xi}{dx}\right)\ \left(\phi_{j,\xi}(\xi)\frac{d\xi}{dx}\right)\ \left(\frac{dx}{d\xi}\ d\xi\right) \\ &= \int_{-1}^{1} \phi_{i,\xi}(\xi)\phi_{j,\xi}(\xi)\frac{d\xi}{dx}\ d\xi\ =\ \frac{2}{h}\int_{-1}^{1} \phi_{i,\xi}(\xi)\phi_{j,\xi}(\xi)\ d\xi \\ B^e_i &= \int_{\Omega_e} \phi^e_i(x)\ x\ dx\ =\ \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} \phi_i(\xi)\ x(\xi)\ d\xi \end{aligned}$$

En reprenant les fonctions de formes linéaires et en écrivant $x(\xi)$ sur Ω_e

$$\begin{aligned}
\phi_1(\xi) &= (1-\xi)/2 \\
\phi_2(\xi) &= (1+\xi)/2 \\[1em]
\phi_{1,\xi}(\xi) &= -1/2 \\
\phi_{2,\xi}(\xi) &= 1/2 \\[1em]
x(\xi) &= X_e\phi_1(\xi) + X_{e+1}\phi_2(\xi)
\end{aligned}$$

on obtient finalement :
$$\boxed{\begin{aligned}
A^e_{ij} &= \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\[1em]
B^e_i &= \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2X_e + X_{e+1} \\ X_e + 2X_{e+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}}$$

4. Pour quatre intervalles, on obtient $h = 0.25$ et le système non contraint est :

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 1/4 \\ 6/4 \\ 12/4 \\ 18/4 \\ 11/4 \end{bmatrix}$$

   Après l'imposition des conditions aux frontières essentielles, on obtient le système :

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 6/4 \\ 12/4 \\ 18/4 \end{bmatrix}$$

5. La solution peut ensuite être calculée :-)

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/128 \\ 8/128 \\ 7/128 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. Le programme `python`, cela sera peut-être pour mardi soir mais sans garantie toutefois :-)
7. Et pour démontrer que les valeurs nodales en 1D sont toujours exactes, on attend la jolie réponse d'un étudiant futé[2]

9 La solution est laissée aux bons soins du lecteur. C'est aussi un excellent défi pour l'étudiant de l'obtenir ! Est-ce qu'on obtiendra encore des valeurs nodales exactes ?

[2] Le premier qui me fournit une démonstration élégante et correcte reçoit un bonus de 2 points pour la note finale de l'examen. La date de l'email fera foi pour départager deux étudiants qui soumettent une bonne réponse. Oui, cela a été publié et se trouve dans des livres savants. Il suffit d'être curieux :-)