Séance 3

Formulations faible, forte et discrète

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_s$ tel que

$$\begin{array}{rcll} a\ u''(x) + f(x) & = & 0, & \forall x \in]0,1[, \\ \mathrm{u}(0) & = & 0 & \\ \mathrm{u}(1) & = & 0 & \end{array}$$

7 Considérons le problème aux conditions aux limites défini ci-dessus.
La constante a est un réel strictement positif.
Il s'agit de la *formulation forte* de ce problème.

1. Donner un problème physique[1] qui correspond à ce problème mathématique en définissant a, $u(x)$ et $f(x)$ et en donnant leurs unités.
2. Proposer une définition rigoureuse et si possible pertinente de l'espace $\mathcal{U}_s$?
3. Est-ce que ce problème unidimensionnel fort admet toujours une solution unique ?
4. Ecrire rigoureusement la *formulation faible* en utilisant la procédure présentée au cours : il s'agit de la procédure dite de Galerkin : ne pas oublier d'introduire les espaces $\mathcal{U}$ et $\widehat{\mathcal{U}}$.
5. Les deux espaces $\mathcal{U}$ et $\widehat{\mathcal{U}}$ sont identiques ici : pourquoi ?
6. Au cours, l'enseignant a été paresseux et n'a pas défini rigoureusement ces deux espaces...
En réalité, il s'agit de sous-espaces d'espaces de Sobolev.
Sans regarder dans les notes de cours, les transparents, essayer de trouver la définition de ces deux espaces en faisant uniquement appel aux ressources de Google !
Réfléchir aussi pourquoi il faut choisir ces espaces là en particulier.
7. Quelle est la différence entre les formulations faibles et fortes ?
Ou en d'autres mots, quelle est la différence entre $\mathcal{U}_s$ et $\mathcal{U}$?
8. Ecrire la formulation faible sous la forme d'un problème de minimisation en démontrant[2] rigoureusement leur équivalence.
9. Est-ce la formulation faible ou la formulation forte d'un problème qui est la plus proche de la réalité physique qu'on essaie de modéliser ?
Justifier votre propos.

[1] Ne pas bêtement reprendre l'exemple de la corde à linge présentée pendant le cours : il existe plein d'autres exemples !
[2] Oui, oui : cela a été fait au cours, mais êtes-vous capables de le refaire ?

8 On construit la formation discrète du problème précédent en remplaçant $\mathcal{U}$ par $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$ dans la formulation faible ou variationnelle lorsqu'on approche

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i \tau_i(x)$$

Une façon naturelle d'obtenir les valeurs nodales U_i est d'exiger que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Trouver } u^h(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}^h \text{ tel que} \\ \\ < (\widehat{u}^h)' \; a \; (u^h)' > \quad = \quad < \widehat{u}^h f >, \qquad \forall \widehat{u}^h \in \mathcal{U}^h, \end{array}}$$

Cette formulation discrète peut s'écrire un système linéaire de n équations à n inconnues. En effet, pour obtenir les n équations algébriques fournissant les valeurs nodales, il suffit d'utiliser, comme fonction test $\widehat{u}^h$, les n fonctions de forme globale τ_i qui forme une base de l'espace discret $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$.

Nous allons effectuer la démarche complète pour $a = 1$, $f(x) = x$ sur l'intervalle $\Omega =]0, 1[$ que l'on va diviser en 4 intervalles de même longueur, en utilisant des fonctions de forme linéaires continues.

1. Calculer la solution analytique de ce problème.
2. Ecrire la formulation discrète sous la forme d'une système linéaire :

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} U_j = B_i$$

3. Démontrer que chaque terme de la matrice et du membre se réduit à une intégration sur un ou deux éléments finis.
4. Calculer tous les termes de la matrice de masse A_{ij} et du membre de droite B_i.
5. Sans utiliser aucune calculatrice ou ordinateur, obtenir les 3 valeurs nodales inconnues.
6. Ensuite, écrire un programme `python` qui fait le même calcul.
   C"est nettement plus simple évidemment :-)
7. (**) Observer ensuite que les valeurs nodales correspondent exactement aux valeurs de la solution analytique en ces abscisses : obtenir une démonstration rigoureuse de cette propriété assez miraculeuse qui n'est malencontreusement valable qu'en 1D !

9 Refaire les deux premiers exercices de la séance pour le problème suivant :-)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Trouver } u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_s \text{ tel que} \\ \\ \begin{array}{rcll} a\; u''(x) + f(x) & = & 0, & \forall x \in]0,1[, \\ \mathrm{u(0)} & = & \mathrm{t} & \\ \mathrm{a\ u'(1)} & = & \mathrm{g} & \end{array} \end{array}}$$