Séance 4

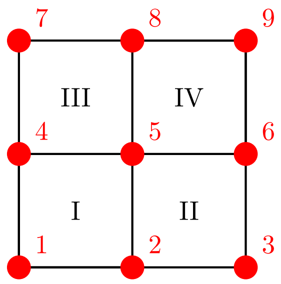
Equation de Poisson

$$\overbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} U_i\, U_j \underbrace{\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}\tau_i)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\tau_j)\; d\Omega}_{A_{ij}} - \sum_{i=1}^{n} U_i \underbrace{\int_\Omega f\;\tau_i\; d\Omega}_{B_i}}^{J(u^h)}$$

10 On souhaite résoudre le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \boldsymbol{\nabla}^2 u(x,y) + 1 & = & 0, & \forall x \in \Omega, \\ u(x,y) & = & 4 & \forall x \in \partial\Omega, \end{array}\right.$$

en utilisant 4 éléments bilinéaires de côté unitaire qui couvre le domaine $\Omega =]-1,1[\times]-1,1[$.

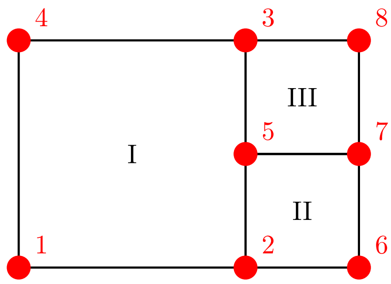


1. Ecrire la formulation discrète de ce problème.
2. Retrouver les quatre fonctions de forme $\phi_i(x,y)$ pour l'élément I.
3. Calculer les dérivées $\phi_{i,x}(x,y)$ et $\phi_{i,y}(x,y)$ des fonctions de forme pour l'élément I.
4. En tirant profit de la symétrie du problème, calculer[1] uniquement les termes requis de la matrice de rigidité et du membre de droite du système linéaire discret.
5. Obtenir l'unique valeur nodale inconnue

Bien observer le problème et réfléchir à la meilleure manière d'effectuer les calculs permet d'obtenir pas mal de simplifications. Avoir une vision géométrique du problème permet d'obtenir la solution beaucoup plus facilement que de se lancer dans une approche purement mécanique...

[1]Toutes les intégrales peuvent être obtenues analytiquement ou être obtenues vraiment très facilement en utilisant un peu de géométrie !

11 Considérons le maillage non-conforme défini ci-dessous... Sur chacun des segments, on souhaite avoir une représentation linéaire et continue : la valeur doit donc être identique pour les deux éléments séparés par un segment commun. Les éléments II et III seront des éléments bilinéaires usuels.



1. Dessiner la représentation d'une solution quelconque sur ce maillage.
2. Construire les fonctions de formes pour les cinq noeuds de l'éléments I afin d'avoir une solution discrète globale continue.
3. Montrer que l'élément I peut être obtenu comme l'assemblage de deux éléments bilinéaires usuels en imposant que la valeur nodale associée au noeud qui serait situé entre les sommets 1 et 4 serait alors contrainte comme la moyenne de U_1 et U_4.

12 On reprend le premier exercice de la séance, mais on modifie les conditions aux limites :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \boldsymbol{\nabla}^2 u(x,y) + 1 & = & 0, & \forall x \in \Omega, \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} u(x,y) & = & u, & \forall x \in \partial\Omega, \end{array}\right.$$

On a toujours 4 éléments bilinéaires de côté unitaire pour le domaine $\Omega =]-1,1[\times]-1,1[$.

1. Ajouter les termes frontières dans la formulation discrète de ce problème.
2. En tirant profit de la symétrie du problème, combien de valeurs nodales seront différentes ?
3. Considérer la matrice de rigidité discrète d'un seul élément.
   Quelles sont les différentes symétries que l'on peut observer ?
   Que vaut la somme des tous les éléments d'une même ligne ?
4. Obtenir les équations discrètes et l'ensemble des valeurs nodales : le calcul est un peu plus compliqué et plus long que pour le premier exercice de la séance, mais c'est encore faisable !