Solveurs linéraires creux: solutions

13

1. L'algorithme général de Cholesky pour construire la matrice triangulaire inférieure $\mathbf{L}$ à partir de la matrice $\mathbf{A}$ est le suivant:

$$L_{11} = \sqrt{A_{11}} \qquad L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2} \qquad i = 2, \dots, n$$

$$L_{i1} = \frac{A_{i1}}{L_{11}} \quad i = 2, \dots, n \qquad L_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk}}{L_{jj}} \qquad \begin{array}{l} j = 2, \dots, n \\ i = j+1, \dots, n \end{array}$$

Ici, la matrice $\mathbf{A}$ a une largeur de bande de 2, ce qui signifie que $A_{ij} = 0$ si $|i-j| > 1$. Par conséquent, tous les éléments A_{i1} sont nuls pour $i > 2$. Cela implique que les éléments L_{ij} sont nuls si $|i-j| > 1$, car ces derniers sont construits récursivement à partir des A_{ij} et des L_{i1}. A titre d'exemple, considérons les termes suivants:

$$\begin{aligned}
L_{52} &= \frac{\overbrace{A_{52}}^{=0} - \overbrace{L_{51}}^{=0} L_{21}}{L_{22}} = 0 \\
L_{53} &= \frac{\overbrace{A_{53}}^{=0} - \overbrace{L_{51}}^{=0} L_{31} - \overbrace{L_{52}}^{=0} L_{32}}{L_{33}} = 0 \\
L_{54} &= \frac{A_{54} - \overbrace{L_{51}}^{=0} L_{41} - \overbrace{L_{52}}^{=0} L_{42} - \overbrace{L_{53}}^{=0} L_{43}}{L_{44}} = \frac{A_{54}}{L_{44}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que seuls les termes $L_{i,i-1}$ sont non-nuls et valent:

$$L_{i,i-1} = \frac{A_{i,i-1}}{L_{i-1,i-1}} \qquad i = 2, \dots, n.$$

En injectant ce résultat dans l'expression de L_{ii}, on obtient finalement l'algorithme de Cholesky pour cette matrice:

$$L_{11} = \sqrt{A_{11}} \qquad L_{i,i-1} = \frac{A_{i,i-1}}{L_{i-1,i-1}} \qquad i = 2, \dots, n$$

$$L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - L_{i,i-1}^2} \qquad i = 2, \dots, n.$$

2. En observant que $A_{ii} = 2$ et $A_{i,i-1} = -1\ \forall i$, et en identifiant L_{ii} comme d_i et $L_{i,i-1}$ comme e_i, on obtient les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
d_1 &= \sqrt{2} \\
e_i &= \frac{-1}{d_i} && i = 1, \dots, n-1 \\
d_i &= \sqrt{2 - e_{i-1}} && i = 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Un rapide calcul des premières valeurs des e_i et i permet d'obtenir les expressions explicites suivantes:

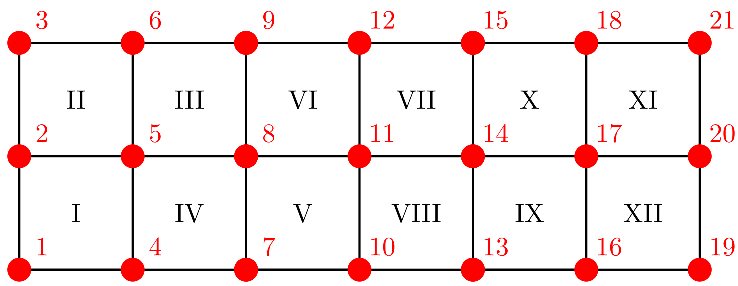
$$\begin{aligned}
d_i &= \sqrt{\frac{i+1}{i}} && i = 1, \dots, n \\
e_i &= -\sqrt{\frac{i}{i+1}} && i = 1, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

3. La solution se trouve dans le Notebook de Jérôme et Louis :-)

14

1. Pour un solveur bande, c'est la numérotation des noeuds qui est importante car on souhaite que les numéros des noeuds qui ont un élément en commun soient proches afin que les termes qui correspondent aux interactions entre ces deux noeuds soient le plus proches possible de la diagonale de la matrice. Pour un solveur frontal, c'est la numérotation des élements qui est importante car l'on souhaite qu'un noeud donné intervienne dans des élements dont le numéro est proche afin de ne pas devoir retenir trop longtemps les informations à propos de ce noeud et ainsi minimiser la taille nécessaire pour la matrice active.

2. Ici, on va numéroter les noeuds selon leurs coordonnées en X puisqu'il y a moins de noeuds avec la même valeur de X que de noeuds avec la même valeur de Y. Ensuite, pour les noeuds dont le X est équivalent, on les numérotera systématiquement dans le même ordre, soit toujours de haut en bas, soit toujours de bas en haut. Pour les élements, il s'agit de minimiser la longueur du front, c'est à dire de l'interface entre la partie du domaine qui a déjà été visitée et celle qui ne l'a pas encore été. Pour ce faire, il convient de numéroter les éléments dans le sens de la largeur du domaine. Par exemple, on constate qu'en numérotant dans la largeur, on obtient toutes les informations concernant le noeud numéro 2 (avec la numérotation choisie ici arbitrairement comme celle idéale pour le solveur bande) après l'élément II, alors qu'en numérotant dans la longueur on n'aurait obtenu toutes les informations concernant le noeud 2 qu'après l'élément XII.



3. La largeur de bande β d'une matrice $\mathbf{A}$ se définit comme suit:

$$\beta(\mathbf{A}) = max_{ij}\{|i-j|,\ \forall(i,j) \text{ tels que } A_{ij} \neq 0\} + 1.$$

   Cela correspond à la différence maximale entre les indices de deux noeuds appartenant à un même élement, augmentée de 1 afin qu'une matrice diagonale ait une largeur de bande de 1. Dans notre cas, on constate que cette différence maximale vaut 4, soit une largeur de bande $\beta = 5$.

4. Pour calculer la largeur de front, il est d'abord nécessaire d'établir un tableau dans lequel sont repris tous les noeuds appartenant à chaque élement:

Elément	Noeuds
I	1 2 4 5
II	2 3 5 6
III	4 5 7 8
IV	5 6 8 9
V	7 8 10 11
...	...

   Sur base de cela, il est possible de déterminer l'élément de disparition de chaque noeud, c'est à dire le dernier élément dans lequel ce noeud est impliqué:

Noeud	Elément de disparition
1	I
2	II
3	II
4	III
5	IV
6	IV
...	...

Il s'agit maintenant de regarder à propos de quels noeuds nous devons retenir des informations lorsque les matrices locales de chaque élement sont assemblées:

Elément	Noeuds	n_{act}
I	$\boxed{1}$ 2 4 5	4
II	$\boxed{2}$ 4 5 $\boxed{3}$ 6	5
III	$\boxed{4}$ 5 6 7 8	5
IV	$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 7 8 9	5
V	7 8 9 10 11	5
...	...	...

La largeur de front est donc de $n_{act} = 5$.

5. $O(n^3)$
6. $O(n\beta^2)$
7. $O(nn_{act}^2)$

15 La solution se trouve dans le Notebook de Jérôme et Louis :-)

16 La solution se trouve dans le Notebook de Jérôme et Louis :-)