[21]

[1] ESPACE VECTORIEL → [2] ESPACE DE BANACH → [3] ESPACE D'HILBERT

$u + v \in \mathcal{U}$
$\alpha u \in \mathcal{U}$
$\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{U}$

* IL EXISTE UNE NORME
* L'ESPACE EST COMPLET

* IL EXISTE UN PRODUIT SCALAIRE

[4]

$$\underbrace{\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \boxed{\|b\|}}_{\text{DEFINITION DE LA CONTINUITE}} \qquad \boxed{\max_v \frac{|b(v)|}{\|v\|}}$$

[22]

$$\boxed{\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 u'v'\,dx \\ b(v) &= \int_0^1 -f v\,dx \end{aligned}}$$

$\leftarrow$ $\cancel{\Delta}$:-)

PROBLEME POSE $\triangleq$ $\exists!$ SOLUTION QUI DEPEND CONTINUMENT DES DONNEES

$u'' + f = 0$
PROBLEME MODELE :-)

$$\underbrace{|a(u,v)|}_{\langle u', v'\rangle_0} \leq \|u'\|_0 \underbrace{\|v'\|_0}_{\leq \|v\|_1}$$

CAUCHY INEQUALITY $\langle u', v'\rangle_0$

CAR $\|v'\|_0^2 + \|v\|_0^2 = \|v\|_1^2$:-)

$$\boxed{|a(u,v)| \leq \|u\|_1 \|v\|_1}$$

C'EST CONTINU

$$u(x) - \underbrace{u(0)}_{=0} = \int_0^x u'(t)\,dt$$

CAUCHY INEQUALITY $\langle u', 1\rangle_0$ WITH $\Omega =]0,x[$

$$[u(x)]^2 \leq \underbrace{\int_0^x dt}_{\leq C} \underbrace{\int_0^x (u'(t))^2\,dt}_{\leq \|u'\|_0^2}$$

$= 1$ si $\Omega \in]0,1[$

EN INTEGRANT SUR Ω :-)

$= 1$:-)

$$\|u\|_0^2 \leq C_1 \|u'\|_0^2$$

$$\|u'\|_0^2 + \|u\|_0^2 \leq C_1 \|u'\|_0^2 + \|u'\|_0^2$$

$$\underbrace{\frac{1}{1+C_1}}_{\alpha} \left[\|u\|_1^2\right] \leq \underbrace{\|u'\|_0^2}_{|a(u,u)|}$$

C'EST COERCIF

$$\boxed{\begin{aligned} C &= 1 \\ \alpha &= 1/2 \end{aligned}}$$

[23] $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ COERCIF POUR H^1_0

PAS COERCIF POUR H^1

IL FAUT QUE $\partial\Omega_D \neq \phi$

CONDITION DE DIRICHLET

$$\underbrace{\int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v}_{\text{C'EST LE PRODUIT SCALAIRE DE } H^1\text{ !}}$$ COERCIF POUR H^1

[24]

$$\boxed{\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 k u'v' + uv \, dx \\ b(v) &= \int_0^1 f v \, dx \end{aligned}}$$

C'EST UN PROBLEME BIEN POSE !

ON A UNE VERSION UN PEU MODIFIEE DU PRODUIT SCALAIRE :-)

$$\mathcal{U} = H^1(\Omega)$$

- $$|a(u,v)|^2 \leq 2 (k^*)^2 \left[\int_0^1 u'v'\right]^2 + \left[\int_0^1 uv\right]^2$$

CAR $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

$$\leq 2 \max((k^{*2}), 1) \left[\underbrace{\left[\int_0^1 u'v'\right]^2}_{\substack{\leq \|u'\|_0^2 \|v'\|_0^2 \\ \leq \|u\|_1^2 \|v\|_1^2}} + \underbrace{\left[\int_0^1 uv\right]^2}_{\substack{\leq \|u\|_0^2 \|v\|_0^2 \\ \leq \|u\|_1^2 \|v\|_1^2}} \right]$$

$$\leq \underbrace{4 \max((k^{*2}), 1)}_{\triangleq \alpha^2} \|u\|_1^2 \|v\|_1^2$$

$$\boxed{|a(u,v)| \leq \alpha \|u\|_1 \|v\|_1}$$

C'EST COERCIF $\square$

LA DEMONSTRATION EST BIEN PLUS SIMPLE QUE POUR [22] CAR ON A UN TERME EN $u(x)$!

- $$a(v,v) = \int_0^1 k (v')^2 + v^2 \, dx$$

$$\geq \underbrace{\min(k_*, 1)}_{\triangleq c} \underbrace{\int_0^1 v'^2 + v^2 \, dx}_{\|v_1\|^2}$$

C'EST CONTINU $\square$

IDEM QUE POUR LE CAS [22]

$\boxed{25}$

$$\underbrace{\int_0^1 u'''' v}_{} = \underbrace{\int_0^1 f v}_{b(v)}$$

$$\boxed{\left\{ u \in H_2(\Omega) \quad \underbrace{\begin{matrix} u(0)=0 \\ u'(0)=0 \end{matrix}}_{\text{CONDITIONS ESSENTIELLES}} \right\} \triangleq \mathcal{U}}$$

$$\underbrace{\left[u''' v\right]_0^1}_{} - \underbrace{\int_0^1 u''' v'}_{}$$

$= 0$
CAR $\underbrace{\begin{matrix} u'''(1)=0 \\ v(0)=0 \end{matrix}}_{}$
CONDITION NATURELLE HOMOGENE

$$-\underbrace{\left[u'' v'\right]_0^1}_{} + \underbrace{\int_0^1 u'' v''}_{}$$

$= 0$
CAR $\underbrace{\begin{matrix} u''(1)=0 \\ v'(0)=0 \end{matrix}}_{}$
CONDITION NATURELLE HOMOGENE

$a(u,v)$

$\boxed{\text{ESPACE DE SOBOLEV REQUIS } H_2(\Omega)}$

$$\boxed{\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 u'' v''\, dx \\ b(v) &= \int_0^1 f v\, dx \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{• COERCIVITE ?}}$

$$v'(x) - \underbrace{v'(0)}_{=0} = \int_0^x v''(t)\, dt$$

$$(v'(x))^2 \leq C \int_0^x (v'')^2(t)\, dt$$

$$\boxed{\|v'\|_0^2 \leq C_1 \|v_0''\|_0^2}$$

$\boxed{\text{ON A AUSSI } \|v\|_0^2 \leq C_2 \|v_0'\|_0^2}$

$$• \overbrace{\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2 + \|v''\|_0^2}^{\|v\|_2^2} \leq C \|v''\|_0^2$$

car $\|v'\|_0^2 \leq C_1 \|v''\|_0^2$
$\|v\|_0^2 \leq C_2 \|v'\|_0^2 \leq C_1 C_2 \|v''\|_0^2$

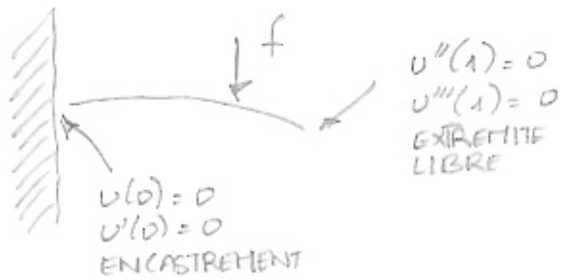
$$\boxed{\exists \alpha \text{ tel que } \alpha \|v\|_2 \leq a(v,v)}$$

• CONTINUITE ?

$$|a(u,v)| \leq \underbrace{\|u''\|_0^2}_{\leq \|u\|_2^2} \; \underbrace{\|v''\|_0^2}_{\leq \|v\|_2^2} \qquad \square$$

$EI\, u'''' = f$

POUTRE
EN FLEXION



[26] $\forall \varepsilon \;\; \exists \delta$ tel que $\|x-a\| < \delta \Rightarrow |b(x) - b(a)| < \varepsilon$

$a = 0 \rightarrow b(a) = 0$
CAR b LINEAIRE

$\varepsilon = 1$ $\quad \boxed{\exists \delta \quad \|x\| < \delta \Rightarrow |b(x)| < 1}$

$$\forall u \quad |b(u)| = \left| b\left(\frac{\|u\|}{\delta} \frac{\delta}{\|u\|} u \right) \right|$$

$$|b(u)| = \|u\| \frac{1}{\delta} \underbrace{\left| b\Big(\underbrace{\delta \frac{u}{\|u\|}}_{x \; :-)} \Big) \right|}_{\leq 1}$$

EN VERTU DE

$$\boxed{\forall u \quad |b(u)| \leq \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{c} \|u\|} \qquad \square$$

L'IMPLICATION
INVERSE SE DEMONTRE
DE MANIERE QUASIMENT
SYMETRIQUE :-)

LE PREMIER,
ETUDIANT / TUTEUR / ASSISTANT
QUI M'ENVOIE LA REPONSE
BIEN REDIGEE RECOIT UN BONUS SPECIAL
DE JFR :-)