Séance 6

Lax et Milgram

Si	$\mathcal{U}$ est un espace d'Hilbert a est une forme bilinéaire continue et coercive b est une forme linéaire continue,
alors,	le problème abstrait $\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver } u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U} \text{ tel que} \\ a(\widehat{u}, u) \;=\; b(\widehat{u}), \quad \forall \widehat{u} \in \mathcal{U},\end{array}}$
	a une solution unique qui dépend continûment du terme b

17 Quelle est la différence entre un espace de Banach et un espace d'Hilbert ? Sans regarder dans les notes de cours, les transparents, essayer de trouver la définition de ces concepts en faisant uniquement appel aux ressources de Google !

1. Définir le concept d'espace vectoriel.
2. Définir le concept d'espace de Banach.
3. Définir le concept d'espace de Hilbert.
4. Ecrire la relation mathématique qui est équivalente à la phrase u dépend continûment de b.

18 Avec $\Omega =]0,1[$, considérons le problème classique :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver une fonction } u(x) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ telle que} \\ \begin{array}{rcll} u''(x) & = & f(x), & \forall\, x \in \Omega, \\ u(0) & = & u(1) \;=\; 0, & \end{array}\end{array}}$$

où f appartient à $L^2(\Omega)$ tandis que k est continue et vérifie $0 < k_* \leq k(x) \leq k^* < \infty, \forall x \in \Omega$.

1. Ecrire la forme bilinéaire continue et coercive $a(u,v)$ et la forme linéaire continue $b(u)$ de la formulation faible du problème pour $u \in H_1(\Omega)$.
2. Définir le concept de problème bien posé : a-t-on ici un problème bien posé ?
3. Quel est la constante optimale de continuité[1] de a ?
4. Quelle est la constante optimale de coercivité[2] de a ?

[1] En considérant $\mathcal{U}$ un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$,
une forme $a \; : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est une forme continue si $\exists\, c > 0$ tel que $|a(u,v)| \leq c\, \|u\| \|v\| \;\forall u, v \in \mathcal{U}$

[2] Avec toujours le même espace vectoriel,
une forme $a \; : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est une forme coercive si $\exists\, \alpha > 0$ tel que $a(u,u) \geq \alpha\, \|u\|^2 \;\forall u \in \mathcal{U}$

19 Est-ce que les expressions suivantes sont des formes bilinéaires continues, symétriques et coercives dans les espaces donnés ?

- $a(u,v) = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \; d\Omega$ dans $H^1_0(\Omega)$
- $a(u,v) = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \; d\Omega$ dans $H^1(\Omega)$
- $a(u,v) = \int_\Omega uv + \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \; d\Omega$ dans $H^1(\Omega)$

20 Avec $\Omega =]0,1[$, considérons maintenant le problème suivant :

Trouver une fonction $u(x) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} -\left(k(x)u'(x)\right)' + u(x) &= f(x), && \forall\, x \in\ \Omega, \\ u'(0) &= u'(1) = 0, \end{aligned}$$

où f appartient à $L^2(\Omega)$ tandis que k est continue et vérifie $0 < k_* \leq k(x) \leq k^* < \infty, \forall x \in \Omega$.

1. Ecrire la forme bilinéaire continue et coercive $a(u,v)$ et la forme linéaire continue $b(u)$ de la formulation faible de ce problème.
2. Donner le plus grand espace de Sobolev qui contient les solutions faibles de ce problème.
3. Démontrer que la constante de continuité de a est donnée par $c = 2\max(k^*, 1)$.
4. Démontrer que la constante de coercivité de a est donnée par $\alpha = \min(k_*, 1)$.

21 Toujours avec $\Omega =]0,1[$, nous nous intéressons finalement au problème :

Trouver une fonction $u(x) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} u''''(x) &= f(x), && \forall\, x \in\ \Omega, \\ u(0) &= u'(0) = 0, \\ u''(1) &= u'''(1) = 0, \end{aligned}$$

où f appartient à $L^2(\Omega)$.

1. Ecrire la forme bilinéaire continue et coercive $a(u,v)$ et la forme linéaire continue $b(u)$ de la formulation faible de ce problème.
2. Donner le plus grand espace de Sobolev qui contient les solutions faibles de ce problème.
3. Démontrer la continuité et la coercivité de a.
4. Donner une situation physique modélisée par ce problème.

22 Démontrer que la définition de continuité d'une application linéaire b

$$\exists c > 0, \quad |b(u)| \leq c||u||, \quad \forall u \in \mathcal{U}$$

est équivalente à la définition usuelle de la continuité d'une fonction b en un point a lorsque $\mathcal{U} = \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad ||x - a|| \leq \delta \Rightarrow |b(x) - b(a)| \leq \epsilon,$$