Séance 7

Galerkin discontinu à une dimension !

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \\ u(t, L/2) & = & u(t, -L/2) \\ u(0, x) & = & \overline{u}(x) \end{array}$$

Sur chaque élément Ω_e, la solution à un instant t est approchée de manière indépendante par :

$$u(t,x) \;\approx\; u_e^h(t,x) \;=\; \sum_{i=0}^{p} U_i^e(t)\; \phi_i(x)$$

Donc, il y a $n(p+1)$ degrés de liberté, si n est le nombre d'intervalle du domaine et si p est le degré de l'approximation polynomiale locale sur chaque élément.

A tout instant, on obtiendra la solution en appliquant la méthode de Galerkin sur chaque élément $\Omega_e =]X_{e-1}, X_e[$ de manière indépendante en définissant $<>_e$ comme l'opérateur d'intégration sur Ω_e:

$$\sum_{j=0}^{p} < \phi_i \; \frac{\partial u_h}{\partial t} >_e + < \phi_i \frac{\partial c u_e^h}{\partial x} >_e \quad = \quad 0 \qquad\qquad i = 0, \ldots, p$$

En effectuant une intégration par partie,

$$\sum_{j=0}^{p} \underbrace{< \phi_i \phi_j >_e}_{A_{ij}^e} \frac{dU_j^e}{dt} \quad = \quad \overbrace{< \left(c \frac{d\phi_i}{dx} \right) u_e^h >_e - \Big[\phi_i c u^* \Big]_{X_{e-1}}^{X_e}}^{B_i^e(u^h)} \qquad\qquad i = 0, \ldots, p$$

En multipliant par l'inverse de la matrice de masse,

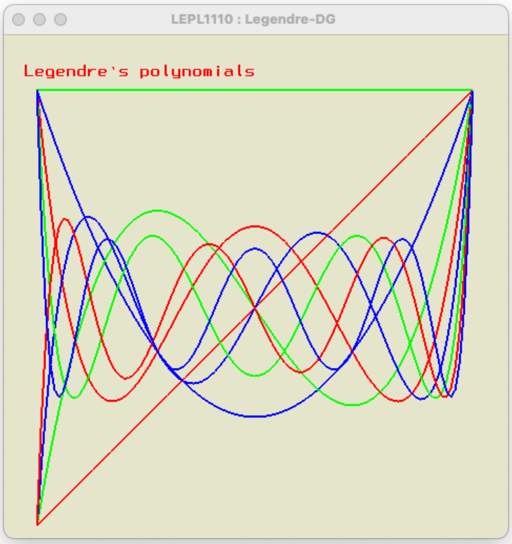
$$\frac{dU_i^e}{dt} \quad = \quad \underbrace{\sum_{j=0}^{p} A_{ij}^{-1} B_j^e(u^h)}_{F_i^e(u^h)} \qquad\qquad i = 0, \ldots, p$$

Le raccord entre les différents problèmes locaux se fait alors astucieusement en sélectionnant de manière unique la valeur de u^* sur chaque sommet entre deux éléments. Pour tenir compte que l'information vient du côté droit et qu'il convient donc d'imposer une condition initiale de ce côté, on choisira de prendre pour u^*, la valeur du coté droit de l'élement situé à gauche : $u^*(X_e) = u_e^h(X_e)$. Finalement, la condition de périodicité impliquera simplement que $u^*(X_0) = u_n^h(X_n)$. Evidemment si la célérité c était négative, il faudrait alors prendre la valeur gauche de l'élément situé à droite par contre :-) Ensuite, l'intégration temporelle des équations différentielles ordinaires pour chaque degré de liberté pourra être effectuée avec une méthode d'Euler explicite ou une méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre.

23 On applique la méthode de Galerkin discontinue pour cette équation de transport avec $c > 0$ et des conditions périodiques. Utiliser comme fonctions de forme $L_i(x)$ les polynômes de Legendre de degré p semble être une idée intéressante pour simplifier les calculs !

Les polynômes de Legendre sur l'intervalle $]-1, 1[$ sont définis par la formule de récurence :

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= 1 \\
L_1(x) &= x \\
&\cdots \\
n\ L_n(x) &= (2n-1)\ x\ L_{n-1}(x) - (n-1)\ L_{n-2}(x)
\end{aligned}
$$



1. Tout d'abord, démontrer l'orthogonalité des polynômes de Legendre.

$$\int_{-1}^{1} L_i(x) L_j(x)\ dx = 0 \qquad\qquad i \neq j$$

2. Que valent $L_i(1)$?
3. Que valent $L_i(-1)$?
4. Obtenir l'expression analytique de la matrice de masse :

$$\int_{-1}^{1} L_i(x) L_i(x)\ dx \qquad\qquad i = 0 \cdots p$$

5. Obtenir l'expression analytique de l'opérateur discret de transport :

$$\int_{-1}^{1} L_i(x) \frac{dL_j}{dx}(x)\ dx \qquad\qquad i,j = 0 \cdots p$$

Il n'est pas interdit de faire appel au calcul symbolique ou à la littérature pour trouver les expressions adéquates ! On observe ainsi que le propriétés des polynômes de Legendre permet d'obtenir la formulation discrète de Galerkin discontinue pour une équation de transport avec des expressions analytiques sans devoir effectuer aucune intégration numérique !

24 Pour résoudre numériquement une équation de transport viral

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

nous considérons les schémas suivants :

Van Laethem (2021)	$\dfrac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = -\beta \dfrac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x}$
Van Ranst (2021)	$\dfrac{2U_j^{n+1} - U_{j-1}^n - U_{j+1}^n}{2\Delta t} = -\beta \dfrac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x}$

où j et n sont respectivement les indices spatiaux et temporels.

On souhaite effectuer l'analyse de stabilité sur un domaine infini en considérant l'évolution d'une perturbation quelconque de la forme $U_j^n = U^n \exp(ikX_j)$ et en calculant le module du facteur d'amplification :

$$G = \frac{U^{n+1}}{U^n}.$$

1. Ces schémas sont-ils explicites ou implicites ?
2. Donner l'expression du nombre complexe G pour les deux schémas.
3. Donner la condition de stabilité en termes de Δx et Δt pour les deux schémas.
   Il peut être utile d'utiliser les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha &= e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \\ 2i\sin\alpha &= e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \end{aligned}$$