Séance 8

The DG Method

$$\sum_{j=1}^{3} \underbrace{< \phi_i \phi_j >_e}_{A^e_{ij} = \hat{A}_{ij} J_e} \frac{dC^e_j}{dt} = \overbrace{< \left(u \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) c^h_e >_e + \ll \phi_i \beta c^* \gg_e}^{B^e_i(c^h)}$$

En multipliant par l'inverse,

$$\frac{dC^e_i}{dt} = \underbrace{\sum_{j=1}^{3} \hat{A}^{-1}_{ij} B^e_j(c^h)/J_e}_{F^e_i(c^h)}$$

25 Pour un triangle, on peut écrire que $A^e_{ij} = \hat{A}_{ij} J_e$ où $\hat{A}_{ij}$ est la matrice de masse sur le triangle parent.

1. Est-ce qu'on peut écrire la même relation pour un quadrilatère ?
2. Calculer les neuf composantes de la matrice $\hat{A}_{ij}$.

26 Considérons le quadrilatère Ω défini par les quatre sommets $\mathbf{X}_i$. Nous souhaitons obtenir une concentration $c(t, x, y)$ qui satisfait sur ce quadrilatère l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

en imposant que $c(t, -1, y) = c_0(t)$ avec $c_0(t) = 0, \forall t < 0$.
La fonction c_0 est supposée continue.

	X_i	Y_i
1	1	0.5
2	-1	1.5
3	-1	-1.5
4	1	-0.5

On applique la méthode d'Euler explicite avec une formulation Galerkin discontinue appliquée à un unique élément quadrilatère qui sera défini comme l'entièreté du domaine Ω.

Plus précisément, on vous demande de :

1. Obtenir la solution analytique de ce problème $c(t, x, y)$.
2. Donner les fonctions de forme bilinéaires $\phi_i(\xi, \eta)$ sur l'élément parent[1] afin de simplifier au plus l'expression de l'isomorphisme. $\widehat{\Omega} = [-1, 1] \times [-1, 1]$.
3. Calculer l'isomorphisme $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ entre $\widehat{\Omega}$ et Ω.
   Calculer le jacobien de la transformation $J(\xi, \eta)$.
4. En définissant adéquatement β et c^*, déduire la formulation discrète :

[1] Les coordonnées des quatre sommets de $\widehat{\Omega}$ sont -dans l'ordre- : $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(1, -1)$

$$\sum_{j=1}^{4} < \phi_i \phi_j > \frac{C_j^n - C_j^{n-1}}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{4} < \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_j > C_j^{n-1} + \ll \phi_i \beta c^* \gg$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{j=1}^{4} \underbrace{< \phi_i \phi_j >}_{A_{ij}} C_j^n = \underbrace{\Delta t \Big(\sum_{j=1}^{4} < \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_j > C_j^{n-1} + \ll \phi_i \beta c^* \gg \Big) + \sum_{j=1}^{4} < \phi_i \phi_j > C_j^{n-1}}_{B_i}$$

où j et n sont les indices spatiaux et temporels respectivement des valeurs nodales.

5. Indiquer la valeur numérique de βc^* sur les quatre côtés de l'élément Ω si $c^* = 1$ partout.
6. Calculer la matrice A_{ij} et le membre de droite B_i
   en supposant que $\Delta t = 1$, $C_j^{n-1} = 0$ et un flux unitaire à l'entrée gauche.
7. Calculer les quatre valeurs C_j^n pour le système linéaire ainsi construit.