

Intégration numérique : solutions

1

Pour rappel, l'intégration numérique consiste à estimer l'intégrale d'une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ en sommant des évaluations pondérées de cette fonction réalisées en un nombre fini n de points $x_k \in [a, b]$. La forme d'une règle d'intégration sur l'intervalle $[-1, 1]$ s'écrit:

$$\underbrace{\int_{-1}^1 f(x) dx}_I \approx \underbrace{\sum_{k=1}^n w_k f(x_k)}_{I_h}$$

où les w_k sont appelés les poids d'intégration, les x_k sont appelés les points d'intégration. On note l'erreur d'intégration par $E_h = I - I_h$.

La règle de quadrature est déterminée par le choix des poids et points d'intégration. Le degré de précision d'une méthode d'intégration est p si elle permet d'intégrer exactement tout polynôme de degré p ou inférieur. Pour intégrer une fonction sur un domaine $[a, b]$ quelconque, on effectue le changement de variable

$$x(\xi) = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2}$$

L'intégrale sur un intervalle quelconque peut donc directement s'obtenir à partir de l'intégrale sur l'intervalle de référence $[-1, 1]$.

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x(\xi)) \frac{dx}{d\xi} d\xi = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(x(\xi)) d\xi$$

Pour alléger les notations dans la suite de la solution, on va donc supposer que notre triangle d'intégration Ω coïncide avec le triangle de référence $\hat{\Omega}$ et substituer (ξ, η) par (x, y) dans le reste de la solution sans perte de généralité.

1. Il suffit de calculer les intégrales exacte sur le domaine Ω des trois monômes 1, x et y :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy &= \frac{1}{2} \\ \int_0^1 \int_0^{1-x} x dx dy &= \frac{1}{6} \\ \int_0^1 \int_0^{1-x} y dx dy &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ensuite, on identifie les trois expressions obtenues avec la quadrature en termes de w_k et cela permet de trouver les trois relations requises pour obtenir les poids :

$$\sum_{k=1}^3 w_k f(x_k, y_k) = \int_{\Omega} f(x, y) d\Omega$$

↓
En considérant les trois fonctions 1, x et y,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

2. On peut évidemment résoudre ce système de trois équations à 3 inconnues. Mais il est possible d'être plus astucieux :-). Un peu d'intuition géométrique permet de deviner que les trois poids doivent être égaux. On peut aussi suspecter à juste titre que tous les points d'intégration sont à mi-chemin entre un sommet et le centre de gravité.

Utiliser l'intuition géométrique et la symétrie est souvent la manière dont on détermine les points et poids des quadratures plus complexes.

$$w_1 = w_2 = w_3$$

On pourra donc se contenter de l'unique première équation pour obtenir l'unique valeur identique.

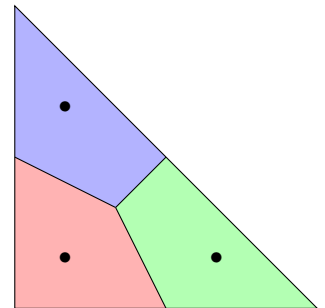
On écrit donc :

$$3w_1 = \underbrace{\int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy}_{=\frac{1}{2}}$$

$$w_1 = \frac{1}{6}$$

On conclut donc :

$w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{6}$



3. On possède trois degrés de liberté avec les poids w_i , il semble donc acquis qu'il sera certainement possible d'intégrer exactement un polynôme quelconque de degré un

$$p(x) = a + bx + cy$$

caractérisé par trois paramètres distincts. Toutefois, comme les abscisses des points d'intégration semblent avoir été choisies de manière astucieuse, il est probable que la quadrature puisse aussi intégrer des polynômes de degré plus élevé.

4. Pour obtenir le degré de précision de la quadrature, il faut juste vérifier que chaque terme polynomial élémentaire de degré croissant est bien correctement intégré par la quadrature...

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 dx dy = \frac{1}{12}$$

$$I_h = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{12}$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} y^2 dx dy = \frac{1}{12}$$

$$I_h = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{12}$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy dx dy = \frac{1}{24}$$

$$I_h = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{18} + \frac{2}{18} \right) = \frac{1}{24}$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^3 dx dy = \frac{1}{20}$$

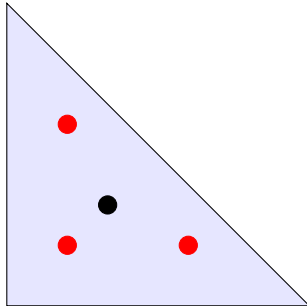
$$I_h = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{216} + \frac{1}{216} + \frac{64}{216} \right) = \frac{11}{216}$$

On conclut donc que le degré de précision p de la méthode vaut deux.

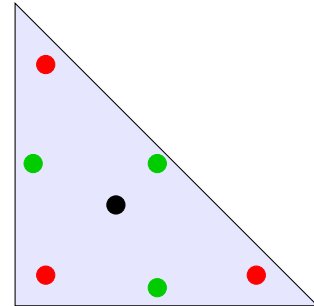
2

Cet exercice est plus compliqué qu'il n'y paraît. Initialement, je pensais que c'était évident. A posteriori, un certain nombre d'assistants, de tuteurs et d'étudiants s'y sont cassé les dents.

1. Esquisser un croquis est évidemment la clé pour trouver la solution :-)



Quadrature de Hammer à 4 points



Quadrature de Hammer à 7 points

2. Pour la quadrature à 4 points, les points 2, 3, 4 sont symétriques.
Pour la quadrature à 7 points, les points 2, 3, 4 et les points 5, 6, 7 sont symétriques.
3. En tirant profit de la symétrie, il ne faut que deux équations pour résoudre obtenir les poids, mais il faut trouver des équations distinctes. Ainsi, exiger de pouvoir intégrer exactement la fonction constante ou la fonction linéaire gènère par exemple exactement la même contrainte.

$$I = \int_{\Omega} d\Omega = \frac{1}{2}$$

$$I_h = w_1 + 3w_2 = \frac{1}{2}$$

$$I = \int_{\Omega} x d\Omega = \frac{1}{6}$$

$$I_h = \frac{w_1}{3} + w_2 = \frac{1}{6}$$

$$I = \int_{\Omega} x^2 d\Omega = \frac{1}{12}$$

$$I_h = \frac{w_1}{9} + w_2 \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{9}{25} \right) = \frac{1}{12}$$

$$I = \int_{\Omega} x^3 d\Omega = \frac{1}{20}$$

$$I_h = \frac{w_1}{27} + w_2 \left(\frac{1}{125} + \frac{1}{125} + \frac{27}{125} \right) = \frac{1}{20}$$

En combinant la contrainte générée par la fonction constante et le fonction quadratique¹, on peut écrire :

$$\frac{1}{9} \left(\frac{1}{2} - 3w_2 \right) + \frac{11}{25} w_2 = \frac{1}{12}$$

$$\left(\frac{11}{25} - \frac{1}{3} \right) w_2 = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{18} \right)$$

$$\frac{33 - 25}{75} w_2 = \frac{3 - 2}{36}$$

$$w_2 = \frac{75}{8 \times 36} = \frac{75}{288} = 0.2604$$

¹On obtient exactement le même résultat en combinant la contrainte de la fonction constante avec celle de la fonction cubique au passage :-)

On conclut donc :

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2} - \frac{75}{96} = -\frac{27}{96} = -0.2812 \\ w_2 = w_3 = w_4 &= \frac{75}{288} = 0.2604 \end{aligned}$$

Obtenir un poids négatif n'est pas vraiment souhaitable, mais il n'est pas toujours possible de l'éviter :-)

La seconde partie de la question est nettement plus compliquée. Pour la règle à 7 points, il faut écrire trois équations distinctes pour obtenir la solution et la résolution est loin d'être évidente.

$$\begin{aligned} I_h &= w_1 + 3w_2 + 3w_5 &= \frac{1}{2} &= \int_{\Omega} d\Omega \\ I_h &= \frac{w_1}{3} + w_2 + w_5 &= \frac{1}{6} &= \int_{\Omega} x d\Omega \\ I_h &= \frac{w_1}{9} + w_2 ((1-2b)^2 + 2b^2) + w_5 ((1-2a)^2 + 2a^2) &= \frac{1}{12} &= \int_{\Omega} x^2 d\Omega \\ I_h &= \frac{w_1}{27} + w_2 ((1-2b)^3 + 2b^3) + w_5 ((1-2a)^3 + 2a^3) &= \frac{1}{20} &= \int_{\Omega} x^3 d\Omega \\ I_h &= \frac{w_1}{81} + w_2 ((1-2b)^4 + 2b^4) + w_5 ((1-2a)^4 + 2a^4) &= \frac{1}{30} &= \int_{\Omega} x^4 d\Omega \end{aligned}$$

On aperçoit immédiatement que les deux premières équations sont équivalentes et qu'il faudra donc utiliser les contraintes liées à l'intégration exacte des fonctions $f(x) = 1$, $f(x) = x^2$ et $f(x) = x^3$.

L'obtention d'une expression analytique simple semble être un vrai challenge : j'attends donc l'étudiant qui trouvera une manière simple de la trouver. Le calcul symbolique semble toutefois montrer que cela doit exister :-)

4. Un exemple simple d'implémentation pourrait être :-)

```
from numpy import *
from numpy.linalg import solve

#
# -1- Hammer : 4 points
#

A = array([[1,3],
           [1/9,11/25]])
I = array([1/2,1/12])
w = solve(A,I)

print("==== Hammer : 4 points ===== ")
print("          w_1 = %10.7f " % w[0])
print("          w_2 = w_3 = %10.7f " % w[1])

#
# -2- Hammer : 4 points
#

a = (6+sqrt(15))/21
b = (6-sqrt(15))/21
A = array([[1,3 ,3],
           [1/27,(1-2*b)**3+2*b**3,(1-2*a)**3+2*a**3],
           [1/9 ,(1-2*b)**2+2*b**2,(1-2*a)**2+2*a**2]])
I = array([1/2,1/20,1/12])
w = solve(A,I)

print("==== Hammer : 7 points ===== ")
print("          w_1 = %10.7f " % w[0])
print("          w_2 = w_3 = w_4 = %10.7f " % w[1])
print("          w_5 = w_6 = w_7 = %10.7f " % w[2])
```

De manière totalement surprenante, ce programme `python` semble démontrer que ma solution est correcte du moins pour la règle de Hammer à 4 points. Tous ceux qui pensent donc que le professeur est complètement allumé peuvent oublier tous leurs espoirs : le projet d'éléments finis sera tel que vous aurez l'impression que le cours de mécanique des fluides est une promenade de santé le long du canal à Molenbeek en période de confinement à Bruxelles, en comparaison avec ce qui vous attend. N'oubliez de prévoir vos gadgets anti-covid et de vous inscrire à une séance de tutorat pour étudiants essentiels.

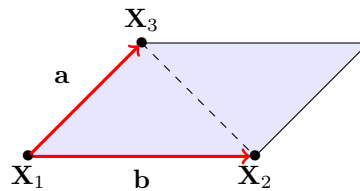
3 On écrit le jacobien comme l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 J(\xi, \eta) &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\
 &= \det \begin{bmatrix} X_2 - X_1 & X_3 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 & Y_3 - Y_1 \end{bmatrix} \\
 &= (X_2 - X_1)(Y_3 - Y_1) - (X_3 - X_1)(Y_2 - Y_1)
 \end{aligned}$$

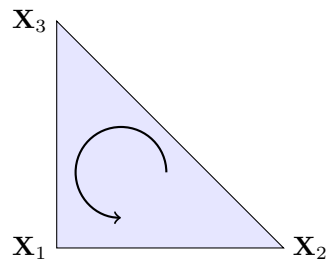
La valeur absolue du jacobien représente le rapport des surfaces élémentaires $d\Omega$ et $d\hat{\Omega}$.

Le signe permet de déterminer l'orientation du triangle.

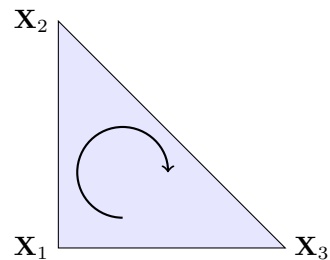
On peut aussi voir que la valeur absolue du jacobien est la norme de vecteur obtenue en faisant le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Le signe du jacobien est l'orientation de ce vecteur.



Pour l'intégration, on prend la valeur absolue car on s'intéresse uniquement au rapport des surfaces, mais le signe permet de distinguer l'orientation du triangle.



$$J > 0$$

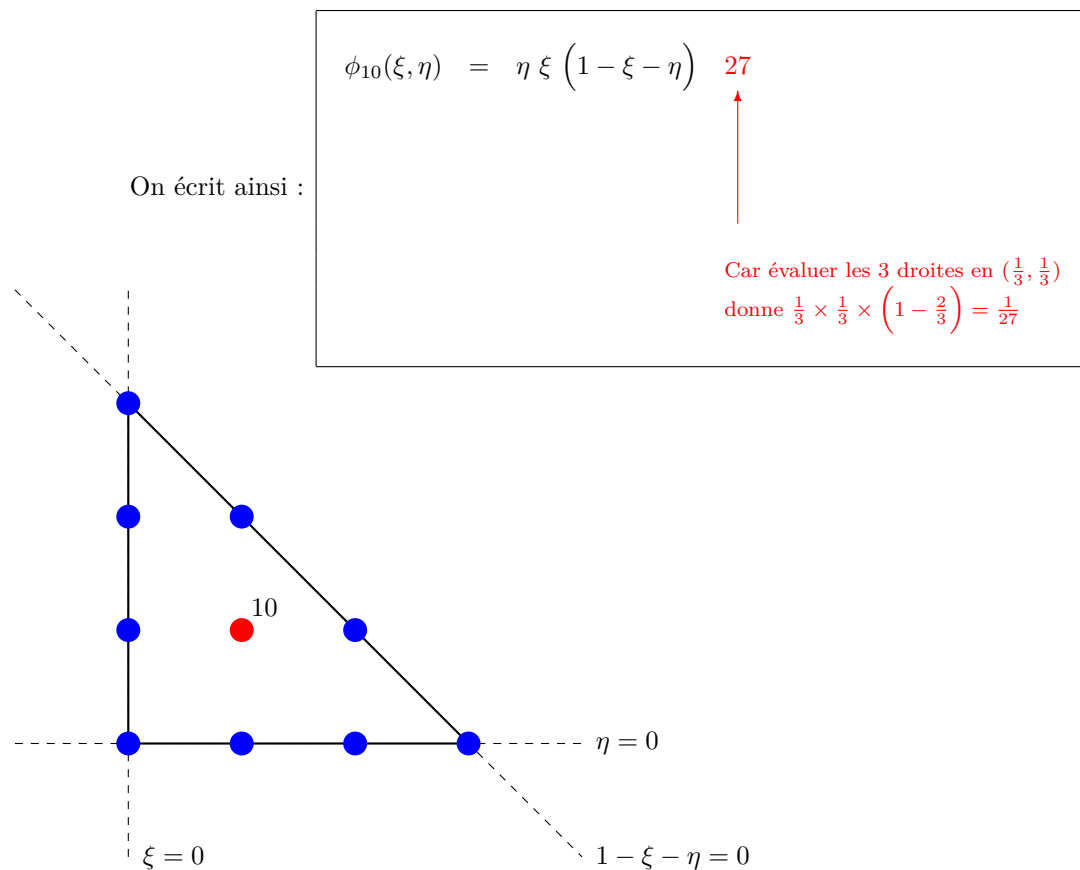


$$J < 0$$

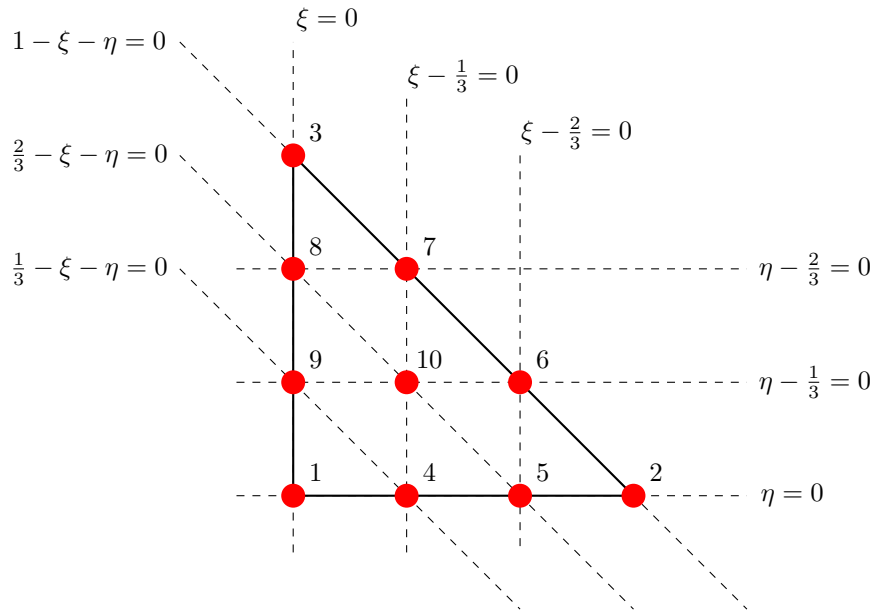
Fonctions de forme et jacobiens : solutions

4 A titre d'exemple, calculons la fonction de forme ϕ_{10} .

On obtient très aisément le polynôme en multipliant les équations implicites des trois droites qui définissent le triangle parent. Il reste juste à trouver la **constante multiplicative** afin que la fonction de forme soit unitaire pour le noeud auquel elle est associée.



Pour les autres fonctions, il faut tracer toutes les droites et effectuer les bonnes combinaisons !



On conclut donc :

$$\phi_1(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{3} - \xi - \eta\right) \left(\frac{2}{3} - \xi - \eta\right) (1 - \xi - \eta) \frac{9}{2}$$

$$\phi_2(\xi, \eta) = \xi \left(\xi - \frac{1}{3}\right) \left(\xi - \frac{2}{3}\right) \frac{9}{2}$$

$$\phi_3(\xi, \eta) = \eta \left(\eta - \frac{1}{3}\right) \left(\eta - \frac{2}{3}\right) \frac{9}{2}$$

$$\phi_4(\xi, \eta) = \xi \left(\frac{2}{3} - \xi - \eta\right) (1 - \xi - \eta) \frac{27}{2}$$

$$\phi_5(\xi, \eta) = \xi \left(\xi - \frac{1}{3}\right) (1 - \xi - \eta) \frac{27}{2}$$

$$\phi_6(\xi, \eta) = \xi \eta \left(\xi - \frac{1}{3}\right) \frac{27}{2}$$

$$\phi_7(\xi, \eta) = \xi \eta \left(\eta - \frac{1}{3}\right) \frac{27}{2}$$

$$\phi_8(\xi, \eta) = \eta \left(\eta - \frac{1}{3}\right) (1 - \xi - \eta) \frac{27}{2}$$

$$\phi_9(\xi, \eta) = \eta (1 - \xi - \eta) \left(\frac{2}{3} - \xi - \eta\right) \frac{27}{2}$$

$$\phi_{10}(\xi, \eta) = \eta \xi (1 - \xi - \eta) 27$$

- Une implémentation possible est fournie par :

```

from numpy import *
from numpy.linalg import solve
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
myColorMap = matplotlib.cm.jet

# =====

def shapeComputeCoefficient(nodes):
    n = len(nodes)
    B = diag(ones(n))
    A = zeros([n,n])
    for i in range(0,n):
        xi = nodes[i,0]
        eta = nodes[i,1]
        A[i,:] = [1, xi, eta, xi*xi, xi*eta, eta*eta, xi**3, xi*xi*eta, xi*eta*eta, eta**3 ]
    return transpose(solve(A,B))

# =====

def shapeCompute(phi,xi,eta):
    return (phi[0] + phi[1]*xi + phi[2]*eta
            + phi[3]*xi**2 + phi[4]*xi*eta + phi[5]*eta**2
            + phi[6]*xi**3 + phi[7]*eta*xi**2 + phi[8]*xi*eta**2
            + phi[9]*eta**3);

# =====

# -1- Computing coefficients

nodes = array([[0,0],[1,0],[0,1],
               [1/3,0],[2/3,0],[2/3,1/3],
               [1/3,2/3],[0,2/3],[0,1/3],[1/3,1/3]])
n = len(nodes)
coeff = shapeComputeCoefficient(nodes)

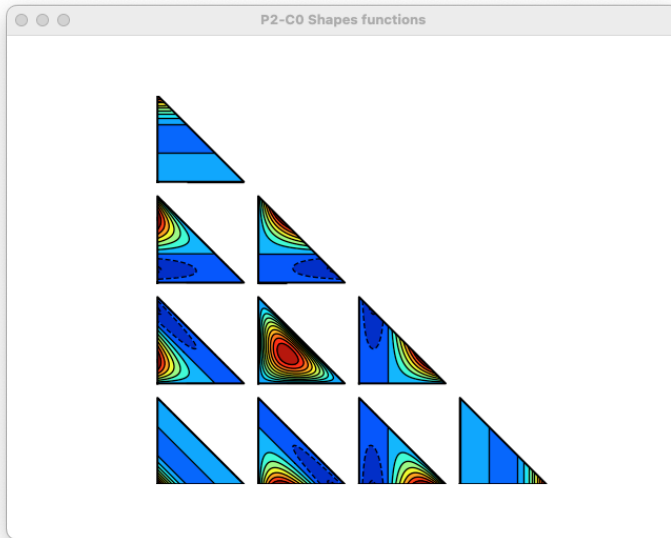
# -2- Checks if the sum is equat to one
#     for a random point (0.2;0.4)

sumPhi = 0;
for i in range(0,n):
    X = 0.2; Y = 0.4
    sumPhi += shapeCompute(coeff[i,:],X,Y)
print("==== Check of the sum of shape fuctions : %14.7e ===== " % sumPhi)

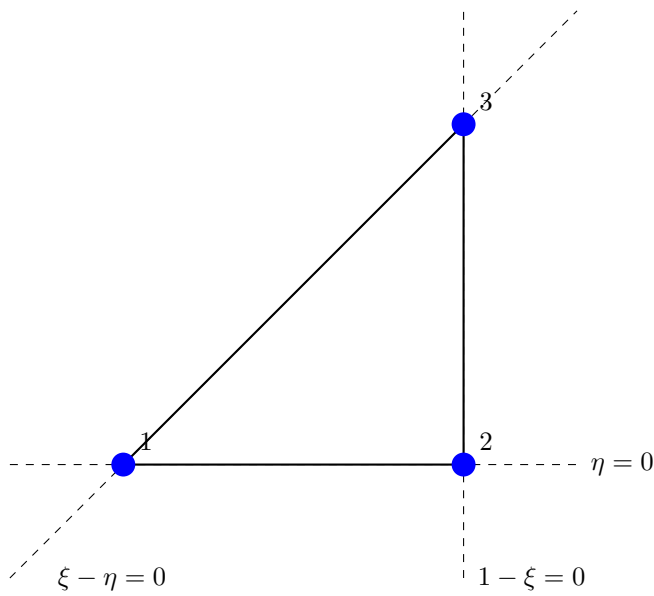
# -3- Nice plot

plt.figure("P2-C0 Shapes functions")
for i in range(0,n):
    Xg,Yg = meshgrid(linspace(0,1,100),linspace(0,1,100))
    Xt = [0,0,1,0]; Yt = [0,1,0,0];
    U = shapeCompute(coeff[i,:],Xg,Yg)
    U[Xg+Yg>1] = nan
    Xg = Xg + 3.5*nodes[i,0];
    Yg = Yg + 3.5*nodes[i,1];
    Xt = Xt + 3.5*nodes[i,0];
    Yt = Yt + 3.5*nodes[i,1];
    plt.contourf(Xg,Yg,U,10,cmap=myColorMap,vmin=-0.3,vmax=1)
    plt.contour(Xg,Yg,U,10,colors='k',linewidths=1)
    plt.plot(Xt,Yt,'-k');
plt.axis("equal"); plt.axis("off")
plt.show()

```



5 Il suffit de faire le même procédé que pour le triangle parent usuel :-)



Et on écrit immédiatement :

$$\phi_1(\xi, \eta) = 1 - \xi$$

$$\phi_2(\xi, \eta) = \xi - \eta$$

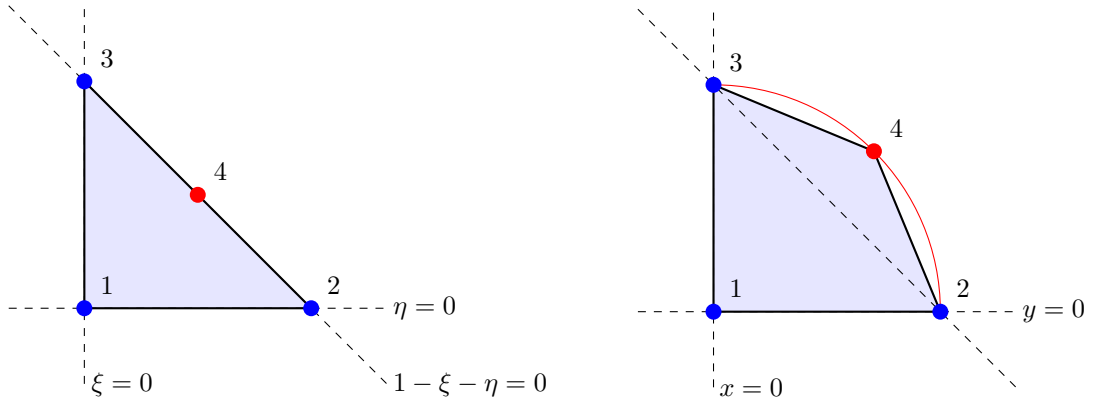
$$\phi_3(\xi, \eta) = \eta$$

On peut aussi observer immédiatement que la somme des trois fonctions vaut toujours un :-)

6

Pour ceux qui se posent la question, ceci pourrait être une très jolie question d'examen !

- Même si cela semble élémentaire, on observe en pratique que pas mal d'étudiants éprouvent des difficultés pour tracer l'élément parent $\widehat{\Omega}$ et l'élément Ω :-)



On voit donc qu'on approche aussi le quart de cercle par un quadrilatère et qu'on va donc estimer la surface du quart de cercle par celle de ce quadrilatère.

- Pour obtenir les quatre fonctions de forme, on part des trois fonctions de forme linéaire. Ensuite, on obtient la fonction de forme associée au quatrième noeud qui s'annule aux 3 autres noeuds et vaut l'unité pour ce quatrième noeud. Ensuite, on calcule le terme $\xi\eta$ à ajouter aux trois autres fonctions de forme pour qu'elles s'annulent au quatrième noeud.

Et on peut facilement en déduire :

$\phi_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$
$\phi_2(\xi, \eta) = \xi - 2\xi\eta$
$\phi_3(\xi, \eta) = \eta - 2\xi\eta$
$\phi_4(\xi, \eta) = 4\xi\eta$

Ici, il est vachement utile de vérifier que $\sum_{i=1}^4 \phi_i(\xi, \eta) = 1$.

- Pour obtenir les dérivées, il suffit tout simplement de dériver :

On écrit ensuite :

$\phi_{1,\xi}(\xi, \eta) = -1$	$\phi_{1,\eta}(\xi, \eta) = -1$
$\phi_{2,\xi}(\xi, \eta) = 1 - 2\eta$	$\phi_{2,\eta}(\xi, \eta) = -2\xi$
$\phi_{3,\xi}(\xi, \eta) = -2\eta$	$\phi_{3,\eta}(\xi, \eta) = 1 - 2\xi$
$\phi_{4,\xi}(\xi, \eta) = 4\eta$	$\phi_{4,\eta}(\xi, \eta) = 4\xi$

A nouveau, il est vachement utile de vérifier que $\sum_{i=1}^4 \phi_{\xi,i}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \phi_{\eta,i}(\xi, \eta) = 0$.

4. Pour le jacobien de la transformation, il faut juste écrire :

$$\begin{aligned}
 J(\xi, \eta) &= \det \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \\
 &= \det \begin{bmatrix} 1 - 2\eta + 2\sqrt{2}\eta & -2\xi + 2\sqrt{2}\xi \\ -2\eta + 2\sqrt{2}\eta & 1 - 2\xi + 2\sqrt{2}\xi \end{bmatrix} \\
 &= (1 - 2\eta + 2\sqrt{2}\eta)(1 - 2\xi + 2\sqrt{2}\xi) - (-2\eta + 2\sqrt{2}\eta)(-2\xi + 2\sqrt{2}\xi) \\
 &= 1 - 2\eta + 2\sqrt{2}\eta - 2\xi + 2\sqrt{2}\xi
 \end{aligned}$$

5. Comme le jacobien est linéaire, une règle d'intégration avec un seul point permettra d'intégrer exactement la surface !

On prend le centre de gravité du triangle situé en $(\xi_1, \eta_1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
Le poids associé est $w_1 = \frac{1}{2}$.

6. Il suffit de calculer l'intégrale :-)

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{4} &\approx \int_{\Omega} dx dy = \int_{\hat{\Omega}} J(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
 &= \frac{1}{2} J\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}\right)
 \end{aligned}$$

On conclut donc : $\pi \approx \frac{2}{3} (4\sqrt{2} - 1) = 3.1046$

C'est une approximation qui est assez acceptable finalement :-)

Formulations fortes, faibles et discrètes : solutions

7

C'est une question un peu plus théorique sur des aspects sur lesquels on reviendra !
On se restreint ici à un cas unidimensionnel avec $\Omega =]0, 1[$.
Mais, il est déjà utile de commencer très doucement à se poser les bonnes questions.

1. Un exemple simple est la conduction thermique unidimensionnelle stationnaire !

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + f = 0$$

avec T la température [K],
 k la conductivité thermique [Watt/K m],
et f une densité de source de chaleur [Watt/m³].

Evidemment, l'exemple de la corde tendue du cours reste toujours pertinent :-)

$$T \frac{d^2 u}{dx^2} + f = 0$$

avec u le déplacement vertical [m],
 T la tension dans la corde [N],
et f une densité linéique de charge [N/m].

2. Il faut juste avoir un espace fonctionnel qui contiennent des fonctions deux fois dérivables :-)

On pourrait choisir :

$$\mathcal{U}_s = \{u(x) \in \mathcal{C}_2(\Omega) \text{ tels que } u(0) = u(1) = 0\}$$

Ici, on a incorporé les deux conditions aux limites dans la définition de l'espace pour avoir une certaine symétrie avec la formulation faible. Ce n'était pas forcément requis, mais cela rendra le reste de la solution plus élégant :-)

3. Eh oui : la solution est directement obtenue comme la double primitive de la fonction f !

$$u(x) = \frac{1}{a} \int \int f(x) dx + Ax + B$$

où les deux constantes sont fixées par les deux conditions aux limites.

□

4. La formulation faible s'écrit sous la forme habituelle :

Trouver $u(x) \in \mathcal{U}$ tel que

$$\underbrace{\langle \hat{u}' \ u' \rangle}_{a(\hat{u}, u)} = \underbrace{\langle \hat{u} \ f \rangle}_{b(\hat{u})}, \quad \forall \hat{u} \in \hat{\mathcal{U}},$$

avec $\mathcal{U} = \hat{\mathcal{U}} = \{u(x) \in H^1(\Omega) \text{ tels que } u(0) = u(1) = 0\}$.

5. Les deux espaces sont identiques lorsque les conditions essentielles sont homogènes : on impose uniquement des valeurs nulles sur la partie de Dirichlet de la frontière du domaine. Ce qui est bien le cas dans le problème considéré.
6. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ dans la définition qui précède a été choisi pour que être certain de l'intégrale que l'expression du problème faible aie du sens. Plus précisément, il s'agit d'avoir

$$\langle \widehat{u}' u' \rangle < \infty$$

Nous reviendrons plus tard sur l'intérêt de cet espace fonctionnel particulier et de ce choix particulier. Mais, si vous avez trouvé seuls sans regarder les notes de cours, les transparents : c'est que vous êtes des étudiants astucieux : bravo :-)

Cet espace contient les fonctions carré-intégrables sur le domaine avec une dérivée première qui est également carré-intégrable. La définition formelle des espaces de Sobolev pour s'écrit sous la forme :

$$L^2(\Omega) = H^0(\Omega) = \left\{ u : x \in]0, 1[\rightarrow u(x) \in \mathcal{R} : \text{avec } \int_0^1 (u(x))^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ u : x \in]0, 1[\rightarrow u(x) \in \mathcal{R} : \text{avec } \int_0^1 (u(x))^2 + (u'(x))^2 dx < \infty \right\}$$

On peut immédiatement observer que si u est un élément de H^1 , alors u et u' sont des fonctions carré-intégrables et appartient à L^2 .

Pour les étudiants curieux, les espaces de Sobolev, ce sont des espaces d'Hilbert qui forment la base de formalisme particulièrement élégant des éléments finis, mais on y reviendra plus tard !

7. L'ensemble des solutions fortes est un sous-ensemble des solutions faibles. Se rappeler l'allure de la solution faible de la corde linge sous une charge ponctuelle qui n'est pas dérivable et qui n'est donc pas une solution forte !

Ce qu'on peut écrire sous la forme :

$$\mathcal{U}_s \subset \mathcal{U}$$

8. La formulation variationnelle sous la forme d'un problème de minimum s'écrit comme suit :

$$\text{Trouver } u(x) \in \mathcal{U} \text{ tel que}$$

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \underbrace{\left(\frac{1}{2} a(v, v) - b(v) \right)}_{J(v)}$$

Pour démontrer l'équivalence entre la formulation faible et la recherche de la fonction qui minimise la fonctionnelle, on recherche une fonction u qui minimise J et s'annule aux deux extrémités. Introduisons \widehat{u} une fonction arbitraire qui s'annule aussi aux deux extrémités. Parmi les fonctions satisfaisant les conditions essentielles, une fonction u rend la fonctionnelle stationnaire si la condition suivante est satisfaite.

$$\left. \frac{dJ(u + \varepsilon \widehat{u})}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \forall \widehat{u},$$

On effectue un peu d'algèbre en prenant $a = 1$ sans perte de généralité.

$$\begin{aligned}
J(u + \varepsilon \hat{u}) &= \frac{1}{2} \langle u' u' \rangle + \varepsilon \langle u' \hat{u}' \rangle + \frac{\varepsilon^2}{2} \langle \hat{u}' \hat{u}' \rangle \\
&- \underbrace{\langle f u \rangle}_{J(u)} - \varepsilon \langle f \hat{u} \rangle
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{dJ(u + \varepsilon \hat{u})}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \langle u' \hat{u}' \rangle - \langle f \hat{u} \rangle$$

et on retrouve la formulation faible.

Cette condition est nécessaire pour que la fonctionnelle atteigne un minimum en la solution u , mais n'est pas suffisante. Il faut donc encore vérifier que u correspond bien à un minimum en effectuant à nouveau un petit peu d'algèbre pour une fonction quelconque $v \in \mathcal{U}$ qu'il est possible de décomposer en une combinaison de u et d'une variation $\hat{u} \in \hat{\mathcal{U}}$

$$\begin{aligned}
J(v) &= J(u + \hat{u}) \\
&= \frac{1}{2} \langle (u' + \hat{u}')^2 \rangle - \langle f(u + \hat{u}) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle u' u' \rangle + \langle u' \hat{u}' \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{u}' \hat{u}' \rangle \\
&- \underbrace{\langle f u \rangle}_{J(u)} - \underbrace{\langle f \hat{u} \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle f \hat{u} \rangle}_{\geq 0} \\
&\geq J(u)
\end{aligned}$$

car u est solution faible !
car a positif !

Le dernier terme est toujours du signe de a .

La fonctionnelle J atteint donc un minimum en u pour autant que a soit positif.

9. La formulation faible correspond à la forme globale ou intégrale des lois de bilan ou de conservation, tandis que la formulation correspond à la forme locale qu'on déduit de la forme globale en supposant par exemple la continuité des fonctions considérées. En ce sens, la formulation faible ou intégrale peut donc être considérée comme la plus proche de la physique à modéliser. Il est donc heureux que la méthode des éléments finis se base sur d'une formulation faible.

8

1. Obtenir la solution analytique est un jeu d'enfants :-)
Il suffit d'intégrer deux fois la fonction source et de tenir compte des conditions aux limites.

On obtient immédiatement :

$$u(x) = \frac{x(1-x^2)}{6}.$$

2. Comme \mathcal{U}^h a été introduit comme un sous-espace de \mathcal{U} , une façon naturelle d'obtenir les U_i est d'exiger que en gardant $a = 1$ par simplicité :

Trouver $u^h \in \mathcal{U}^h$ tel que

$$\underbrace{\langle (\hat{u}^h)'(u^h)' \rangle}_{a(\hat{u}^h, u^h)} = \underbrace{\langle \hat{u}^h f \rangle}_{b(\hat{u}^h)}, \quad \forall \hat{u}^h \in \mathcal{U}^h,$$

ou de manière strictement équivalente :

Trouver $u^h \in \mathcal{U}^h$ tel que

$$J(u^h) = \min_{v^h \in \mathcal{U}^h} \underbrace{\left(\frac{1}{2} a(v^h, v^h) - b(v^h) \right)}_{J(v^h)},$$

C'est la *formulation discrète* qui un système linéaire de n équations à n inconnues. Pour obtenir les n équations algébriques fournissant les valeurs nodales, il suffit de substituer u^h dans l'expression de la fonctionnelle

$$J(u^h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^h)'(u^h)' d\Omega - \int_{\Omega} f u^h d\Omega,$$

$$J(u^h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n U_i \tau_i' \right) \left(\sum_{j=1}^n U_j \tau_j' \right) d\Omega - \int_{\Omega} f \left(\sum_{i=1}^n U_i \tau_i \right) d\Omega,$$

$$J(u^h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_i U_j \int_{\Omega} (\tau_i') \tau_j' d\Omega - \sum_{i=1}^n U_i \int_{\Omega} f \tau_i d\Omega,$$

$$J(u^h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_i U_j A_{ij} - \sum_{i=1}^n U_i B_i,$$

où la matrice A_{ij} et le vecteur B_i sont définis par

$$A_{ij} = \int_{\Omega} (\tau_i') \tau_j' d\Omega,$$

$$B_i = \int_{\Omega} f \tau_i d\Omega.$$

Le minimum de la fonctionnelle est obtenu lorsque

$$0 = \frac{\partial J(u^h)}{\partial U_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij} U_j - B_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ce sont exactement les équations que nous aurions obtenues en sélectionnant les n fonctions de forme τ_j comme fonction arbitraire \hat{u}^h dans la formulation faible. Comme ces fonctions de forme forment une base du sous-espace d'approximation, cela revient bien à considérer que les équations sont satisfaites pour n'importe quel élément de \mathcal{U}^h .

3. Connaissant les fonctions de forme globales τ_i et la fonction f , nous devons calculer les composantes A_{ij} de la matrice de raideur et B_i du vecteur de forces nodales. Une fonction de forme τ_i est associée au noeud i , et s'annule hors des éléments auxquels appartient ce noeud. Soient Ω_e et Ω_{e+1} les deux éléments contenant le noeud. Au lieu de calculer A_{ij} sur le domaine Ω , il suffit d'effectuer l'intégration sur ces deux seuls éléments

$$A_{ij} = \int_{\Omega_e} \tau_{j,x}(x) \tau_{i,x}(x) dx + \int_{\Omega_{e+1}} \tau_{j,x}(x) \tau_{i,x}(x) dx$$

$$B_i = \int_{\Omega_e} f(x) \tau_i(x) dx + \int_{\Omega_{e+1}} f(x) \tau_i(x) dx$$

En passant aux fonctions de forme locale sur chaque élément, on écrit pour un i intérieur :

$$A_{i \ i-1} = \int_{\Omega_e} \phi_{2,x}^e(x) \phi_{1,x}^e(x) dx$$

$$A_{ii} = \int_{\Omega_e} \phi_{2,x}^e(x) \phi_{2,x}^e(x) dx + \int_{\Omega_{e+1}} \phi_{1,x}^{e+1}(x) \phi_{1,x}^{e+1}(x) dx$$

$$A_{i \ i+1} = \int_{\Omega_{e+1}} \phi_{1,x}^{e+1}(x) \phi_{2,x}^{e+1}(x) dx$$

$$B_i = \int_{\Omega_e} \phi_2^e(x) f(x) dx + \int_{\Omega_{e+1}} \phi_1^{e+1}(x) f(x) dx$$

On décompose ensuite chaque terme :

$$A_{i \ i-1} = A_{21}^e$$

$$A_{ii} = A_{22}^e + A_{11}^{e+1}$$

$$A_{i \ i+1} = A_{12}^{e+1}$$

$$B_i = B_2^e + B_1^{e+1}$$

avec les *matrices locales* et des *vecteurs locaux* :

$$A_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \phi_{i,x}^e(x) \phi_{j,x}^e(x) dx$$

$$B_i^e = \int_{\Omega_e} f(x) \phi_i^e(x) dx$$

Finalement, il reste uniquement à calculer ces

$$A_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \phi_{i,x}^e(x) \phi_{j,x}^e(x) dx = \int_{-1}^1 \left(\phi_{i,\xi}(\xi) \frac{d\xi}{dx} \right) \left(\phi_{j,\xi}(\xi) \frac{d\xi}{dx} \right) \left(\frac{dx}{d\xi} d\xi \right)$$

$$= \int_{-1}^1 \phi_{i,\xi}(\xi) \phi_{j,\xi}(\xi) \frac{d\xi}{dx} d\xi = \frac{2}{h} \int_{-1}^1 \phi_{i,\xi}(\xi) \phi_{j,\xi}(\xi) d\xi$$

$$B_i^e = \int_{\Omega_e} \phi_i^e(x) x dx = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \phi_i(\xi) x(\xi) d\xi$$

En reprenant les fonctions de formes linéaires et en écrivant $x(\xi)$ sur Ω_e

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi) &= (1 - \xi)/2 \\ \phi_2(\xi) &= (1 + \xi)/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{1,\xi}(\xi) &= -1/2 \\ \phi_{2,\xi}(\xi) &= 1/2\end{aligned}$$

$$x(\xi) = X_e \phi_1(\xi) + X_{e+1} \phi_2(\xi)$$

on obtient finalement :

$$\begin{aligned}A_{ij}^e &= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ B_i^e &= \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2X_e + X_{e+1} \\ X_e + 2X_{e+1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

4. Pour quatre intervalles, on obtient $h = 0.25$ et le système non contraint est :

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 6/4 \\ 12/4 \\ 18/4 \\ 11/4 \end{bmatrix}$$

Après l'imposition des conditions aux frontières essentielles, on obtient le système :

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 6/4 \\ 12/4 \\ 18/4 \end{bmatrix}$$

5. La solution peut ensuite être calculée :-)

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/128 \\ 8/128 \\ 7/128 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. Le programme `python`, cela sera peut-être pour mardi soir mais sans garantie toutefois :-)
7. Et pour démontrer que les valeurs nodales en 1D sont toujours exactes, on attend la jolie réponse d'un étudiant futé²

9

La solution est laissée aux bons soins du lecteur. C'est aussi un excellent défi pour l'étudiant de l'obtenir ! Est-ce qu'on obtiendra encore des valeurs nodales exactes ?

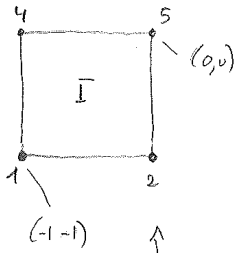
²Le premier qui me fournit une démonstration élégante et correcte reçoit un bonus de 2 points pour la note finale de l'examen. La date de l'email fera foi pour départager deux étudiants qui soumettent une bonne réponse. Oui, cela a été publié et se trouve dans des livres savants. Il suffit d'être curieux :-)

Equation de Poisson : solutions

10 Une solution provisoire est disponible :-)

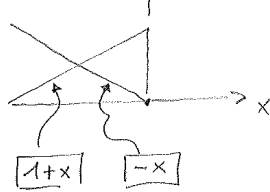
15

$$\sum_j \langle \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \rangle U_j = \langle \phi_i \rangle$$



$$\begin{aligned} \phi_1(x,y) &= xy \\ \phi_2(x,y) &= -(1+x)y \\ \phi_3(x,y) &= (1+x)(1+y) \\ \phi_4(x,y) &= -x(1+y) \end{aligned}$$

$$\sum \phi_i = 1 \dots$$



$$\begin{array}{cc} \phi_{i,x} & \phi_{i,y} \\ y & x \\ -y & -(1+x) \\ (1+y) & (1+x) \\ -(1+y) & -x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sum \phi_{i,x} &= 0 \\ \sum \phi_{i,y} &= 0 \end{aligned}$$

IL FAUT JUSTE CALCULER

$$4 \int_{\Omega_I} \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] U_j = 4 \int_{\Omega_I} \phi_i \quad B_5^c$$

LES 4 CONTRIBUTIONS DES QUATRE ELEMENTS POUR LE NOEUD CENTRAL

$$4 A_{55}^e$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



RESOUDRE $\nabla^2 u + 1 = 0$ SUR Ω
 $u = 0$ SUR $\partial \Omega$

PERMET D'OBTENIR u car $u = v + y \dots$

INTEGRER
 A_{SS}^e EST EQUIVALENT A INTEGRER A_{II}^e !

SYMETRIE
 DE A_{II}^e

$$\begin{bmatrix} 0 & x & x & x \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \\ x & x & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$$

- TOUS LES TERMES DIAGONAUX SONT EGaux
- LA SOMME D'UNE LIGNE VAUT ZERO (si! si!)

$$A_{II}^e = A_{SS}^e = \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 x^2 dx dy + \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 y^2 dx dy = \frac{2}{3}$$

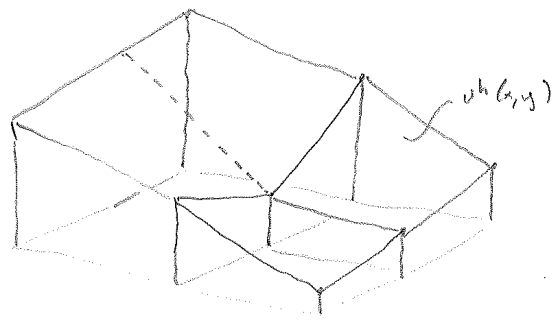
$$\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{3}$$

$$B_1^e = \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 xy dx dy = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{4}$$

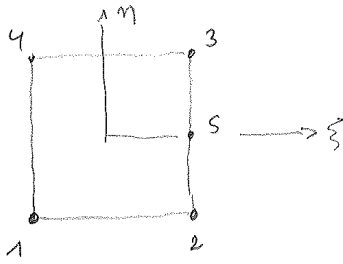
$$\frac{2}{3} U_S = \frac{1}{4}$$

$$U_S = \frac{3}{8}$$

16



Une solution provisoire est disponible :-)



$$\phi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\xi, \eta) &= 0 & \eta \geq 0 \\ &= -\frac{1}{2}(1+\xi)\eta & \eta \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)\eta & \eta \geq 0 \\ &= 0 & \eta \leq 0 \end{aligned}$$

$$\phi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$\begin{aligned} \phi_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta) & \eta \geq 0 \\ &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1+\eta) & \eta \leq 0 \end{aligned}$$

$$U_\alpha(\xi, \eta) = U_4 \underbrace{\frac{(1-\xi)\eta}{2}}_{\phi'_4} + U_\alpha \underbrace{\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{2}}_{\phi'_\alpha} + U_3 \underbrace{\frac{(1+\xi)\eta}{2}}_{\phi'_3} + U_5 \underbrace{\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2}}_{\phi'_5}$$

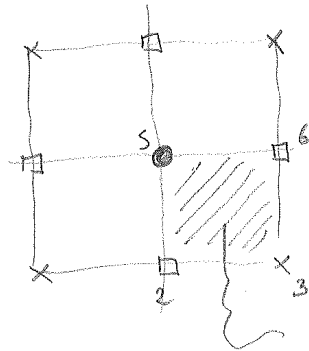
$$U_\alpha = \frac{U_1 + U_4}{2}$$

$$= U_4 \left[\frac{(1-\xi)\eta}{2} + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \right]$$

$$= \frac{(1-\xi)}{4} \underbrace{[1-\eta+2\eta]}_{(1+\eta)} \quad \text{:-)}$$

18

$$\sum_j \langle \nabla \phi_i, \nabla \phi_j \rangle U_j = \langle \phi_i \rangle + \sum_j \langle \phi_i \phi_j \rangle U_j$$

3 VALEURS
DISTINCTESRESOLVRE
LE PROBLEME
SUR V_4 PAR SYMETRIE

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_6 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} +$$

LES
EQUATIONS
POUR
SOIT IDENTIQUES

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_6 \\ U_5 \end{bmatrix}$$



$$\langle \phi_2, \phi_2 \rangle$$

$$= \int_0^1 x^2 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\langle \phi_2, \phi_3 \rangle = \int_0^1 x(1-x) = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} 2U_2 - U_3 - U_5 = \frac{3}{2} + 2U_2 + U_3 \\ -2U_2 + 4U_3 + 2U_5 = \frac{3}{2} + 4U_3 + 2U_2 \\ -2U_2 - 2U_3 + 4U_5 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$4U_2 = -\frac{3}{2} + 2U_5$

$2U_3 = -U_5 - \frac{3}{2}$

$$\left[\cancel{U_5} + \frac{3}{2} \right] + \left[\frac{3}{4} - \cancel{U_5} \right] + 4U_5 = \frac{3}{2}$$

$U_5 = -3$

A VERIFIER :-)

Solveurs linéaires creux: solutions

13 Be patient :-)

14 Be patient :-)

15 Be patient :-)

16 Be patient :-)

Lax et Milgram : solutions

17 Be patient :-)

18 Be patient :-)

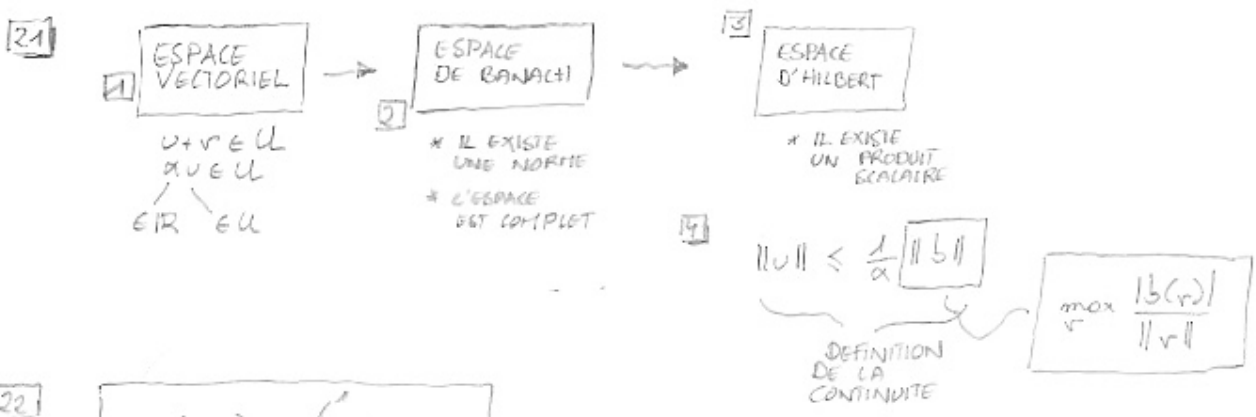
19 Be patient :-)

20 Be patient :-)

21 Be patient :-)

22 Be patient :-)

Il y a une solution provisoire : attention, il faut décaler les numéros des exercices de 4 :-)



22

$$a(u, v) = \int_0^1 u' v' dx$$

$$b(v) = \int_0^1 f v dx$$

PROBLEME POSÉ \triangleq $\exists!$ SOLUTION QUI DÉPEND CONTINUEMENT DES DONNÉES

$$u'' + f = 0$$

PROBLEME MODÈLE \rightarrow

$|a(u, v)| \leq \|u'\|_0 \|v'\|_0$
 $\langle u', v' \rangle_0$
 CAUCHY INEQUALITY $\langle u', v' \rangle_0$
 $\leq \|u'\|_1 \|v'\|_1$
 CAR $\|v'\|_0^2 + \|v\|_0^2 = \|v\|_1^2 \rightarrow$

$|a(u, v)| \leq \|u\|_1 \|v\|_1$
 C'EST CONTINU

$u(x) - \underbrace{u(0)}_{=0} = \int_0^x u'(t) dt$

CAUCHY INEQUALITY $\langle u', v' \rangle_0$ WITH $\Omega =]0, x[$
 $[u(x)]^2 \leq \int_0^x dt \int_0^x (v'(t))^2 dt$
 $\leq C \leq \|u'\|_0^2$
 $= 1 \rightarrow$ $= 1$ si $\Omega \in]0, 1[$
 EN INTEGRANT SUR $\Omega \rightarrow$

$\|u\|_0^2 \leq C_1 \|u'\|_0^2$

$\|u'\|_0^2 + \|u\|_0^2 \leq C_1 \|u'\|_0^2 + \|u'\|_0^2$

$\frac{1}{1+C_1} [\|u\|_1^2] \leq \|u'\|_0^2$
 $\alpha |a(u, u)|$
 C'EST COERCIF

$C = 1$
 $\alpha = 1/2$

23

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

COERCIF POUR H_0^1 PAS COERCIF POUR H^1

IL FAUT
QUE $\partial\Omega_D \neq \emptyset$
CONDITION
DE DIRICHLET

$$\int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{COERCIF POUR } H^1$$

C'EST LE PRODUIT SCALAIRE DE H^1 !

24

$$a(u, v) = \int_0^1 k u' v' + uv \, dx$$

$$b(u) = \int_0^1 f u \, dx$$

$$U = H^1(\Omega)$$

C'EST
UN PROBLEME !
BIEN POSE !ON
A UNE
VERSION UN PEU
MODIFIEE DU
PRODUIT SCALAIRE :-)

$$|a(u, v)|^2 \leq 2(k^+)^2 \left[\int_0^1 u' v' \right]^2 + \left[\int_0^1 uv \right]^2$$

CAR
 $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

$$\leq 2 \max(k^+, 1) \left[\left[\int_0^1 u' v' \right]^2 + \left[\int_0^1 uv \right]^2 \right]$$

$$\leq \|u'\|_0^2 \|v'\|_0^2 \leq \|u\|_0^2 \|v\|_0^2$$

$$\leq \|u\|_1^2 \|v\|_1^2 \leq \|u\|_1^2 \|v\|_1^2$$

$$\leq 4 \max(k^+, 1) \|u\|_1^2 \|v\|_1^2$$

$\triangleq \alpha^2$

$$|a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_1 \|v\|_1$$

C'EST COERCIF □LA DEMONSTRATION EST BIEN
PLUS SIMPLE QUE POUR [22]CAR ON A
UN TERME
EN $uv(x)$!

$$a(u, v) = \int_0^1 k(u, v)^2 + u^2 \, dx$$

$$\geq \underbrace{\min(k_+, 1)}_{\triangleq c} \int_0^1 u^2 + v^2 \, dx$$

$\|u\|_1^2$

C'EST CONTINU □IDENTIQUE
QUE POUR
LE CAS [22]

25

$$\int_0^1 v'''' r = \int_0^1 f r$$

$b(r)$

$$\left\{ u \in H_2(\Omega) \begin{array}{l} u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{array} \right\} \triangleq U$$

CONDITIONS ESSENTIELLES

$$\left[v'''' r \right]_0^1 - \int_0^1 v'''' r$$

= 0
CAR $v''''(1) = 0$
 $v(0) = 0$

CONDITION NATURELLE HOMOGENE

$$- \left[v'' v' \right]_0^1 + \int_0^1 v'' v''$$

= 0
CAR $v''(1) = 0$
 $v'(0) = 0$

CONDITION NATURELLE HOMOGENE

$a(u, v)$

ESPACE DE SOBOLEV REQUIS $H_2(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_0^1 v'' v'' dx$$

$$b(r) = \int_0^1 f r dx$$

• COERCIVITE ?

$$v'(x) - \underbrace{v'(0)}_0 = \int_0^x v''(t) dt$$

$$(v'(x))^2 \leq C \int_0^x (v'')^2(t) dt$$

$$\|v'\|_0^2 \leq C_1 \|v''\|_0^2$$

ON A AUSSI $\|v\|_0^2 \leq C_2 \|v'\|_0^2$

$$\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2 + \|v''\|_0^2 \leq C \|v''\|_0^2$$

car $\|v\|_0^2 \leq C_1 \|v''\|_0^2$
 $\|v\|_0^2 \leq C_2 \|v'\|_0^2 \leq C_1 C_2 \|v''\|_0^2$

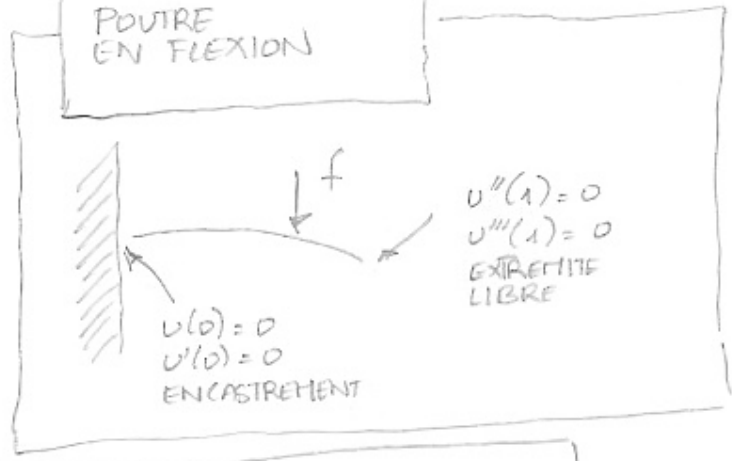
$\exists \alpha$ tel que $\alpha \|v\|_2 \leq a(v, v)$

• CONTINUITÉ ?

$$|a(u,v)| \leq \underbrace{\|u''\|_0^2}_{\leq \|u\|_2^2} \underbrace{\|v''\|_0^2}_{\leq \|v\|_2^2}$$

□

$EI u'''' = f$
 POUTRE
 EN FLEXION



26 $\forall \epsilon \exists \delta$ tel que $\|x - a\| < \delta \Rightarrow |b(x) - b(a)| < \epsilon$

$a = 0 \rightarrow b(a) = 0$
 CAR b LINÉAIRE

$\epsilon = 1$

$$\exists \delta \quad \|x\| < \delta \Rightarrow |b(x)| < 1$$

$$\forall u \quad |b(u)| = \left| b\left(\frac{\|u\|}{\delta} \frac{\delta}{\|u\|} u\right) \right|$$

$$|b(u)| = \|u\| \frac{1}{\delta} \left| b\left(\frac{\delta}{\|u\|} u\right) \right|$$

$x := \frac{\delta}{\|u\|} u$

≤ 1 ← EN VERTU DE

$$\forall u \quad |b(u)| \leq \frac{1}{\delta} \|u\|$$

□

L'IMPLICATION
 INVERSE SE DÉMONTRE
 DE MANIÈRE QUASIMENT
 SYMÉTRIQUE :-)

LE PREMIER
 ÉTUDIANT / TUTEUR / ASSISTANT
 QUI M'ENVOIE LA RÉPONSE
 BIEN RÉDIGÉE REÇOIT UN BONUS SPÉCIAL
 DE JFR :-)

Galerkin discontinu à une dimension : solutions

23 Be patient :-)

24 Be patient :-)

The DG method : solutions

25

Be patient :-)

26

L'exercice est un peu calculatoire, je le reconnais bien volontiers, mais il permet de bien comprendre tous les ingrédients qui composent la méthode de Galerkin discontinue ! Pour mémoire, c'était la question d'examen de juin 2012 et les étudiants l'avaient trouvée assez indigeste !

1. il suffit juste de donner la solution dite d'Alembert :

$$c(t, x, y) = c_0(t - x + 1)$$

Afin que $c(t, -1, y) = c_0(t)$, on doit inclure une translation adéquate supplémentaire ! Pour les incrédules, cette solution satisfait bien notre équation aux dérivées partielles car :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = c'_0(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial c}{\partial x} = -c'_0(t)$$

□

2. Les quatre fonctions de forme bilinéaires sont données par :

$$\phi_i(\xi, \eta) = \frac{(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)}{4}$$

3. Il suffit de développer :

$$\begin{array}{ccc} x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 X_i \phi_i(\xi, \eta) & & y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 X_i \phi_i(\xi, \eta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x(\xi, \eta) = \xi & & y(\xi, \eta) = \eta \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \end{array}$$

Ensuite, on obtient immédiatement le jacobien :

$$\begin{array}{c} J(\xi, \eta) = \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \downarrow \\ J(\xi, \eta) = \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \times 1 - \left(-\frac{\eta}{2}\right) \times 0 = \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \end{array}$$

On conclut donc :

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \xi \\ y(\xi, \eta) &= \eta(1 - \xi/2) \\ J(\xi, \eta) &= (1 - \xi/2) \end{aligned}$$

4. L'obtention de la formulation discrète s'obtient en appliquant la procédure de Galerkin.

Dans l'équation différentielle, on remplace c par son approximation c^h .

Ensuite, on intègre le produit du résidu avec chaque fonction de forme ϕ_i .

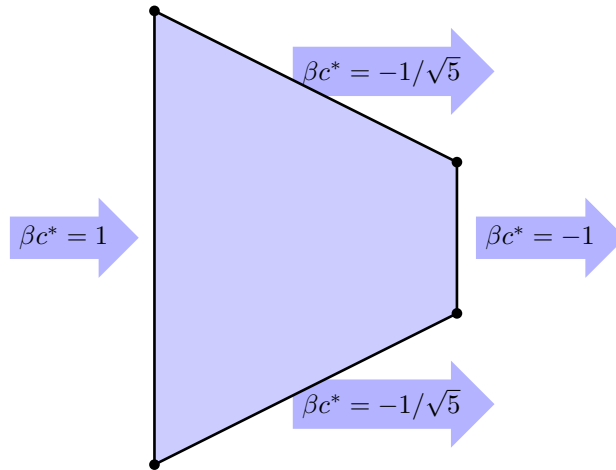
Plus précisément, cela revient à écrire :

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\partial c^h}{\partial t} + \frac{\partial c^h}{\partial x} \right) \phi_i \right\rangle &= 0 \\ \downarrow \text{En intégrant par parties,} \\ \left\langle \phi_i \frac{\partial c^h}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \phi_i}{\partial x} c^h \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (c^h \phi_i) \right\rangle \\ \downarrow \text{En appliquant le théorème de la divergence,} \\ \left\langle \phi_i \frac{\partial c^h}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \phi_i}{\partial x} c^h \right\rangle - \ll \phi_i n_x c^* \gg \end{aligned}$$

Afin d'obtenir une méthode stable et précise, la méthode de Galerkin discontinue consiste à choisir la valeur amont pour le calcul de la concentration sur les termes d'interface. Plus précisément, cela revient définir c^* comme la valeur amont de la concentration. On observe aussi que β doit être défini comme l'opposé composante horizontale de la normale sortante.

$$\begin{aligned} \left\langle \phi_i \frac{\partial c^h}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \phi_i}{\partial x} c^h \right\rangle - \ll \phi_i n_x c^* \gg \\ \downarrow \text{En remplaçant } c^h \text{ par } \sum_{j=1}^4 \phi_j C_j(t), \\ \sum_{j=1}^4 \left\langle \phi_i \phi_j \right\rangle \frac{dC_j}{dt}(t) &= \sum_{j=1}^4 \left\langle \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_j \right\rangle C_j(t) - \ll \phi_i n_x c^* \gg \\ \downarrow \text{En utilisant un schéma d'Euler explicite pour l'intégration temporelle,} \\ \sum_{j=1}^4 \left\langle \phi_i \phi_j \right\rangle \frac{C_j^n - C_j^{n-1}}{\Delta t} &= \sum_{j=1}^4 \left\langle \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_j \right\rangle C_j^{n-1} - \ll \phi_i n_x c^* \gg \end{aligned}$$

5. Il faut calculer la composante horizontale de la normale de chacun des segments frontières. Par exemple, sur le segment supérieur, le vecteur tangent unitaire est donnée par $(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$ et donc la composante horizontale de la normale sortante est bien $-1/\sqrt{5}$:-)



En multipliant la longueur des cotés (respectivement 3, $\sqrt{5}$ et 1) par les densités de flux qui y correspondent, on vérifie immédiatement que la somme des flux entrants et sortants doit s'annuler :-)

$$(3 \times 1) + (-1 \times 1) + 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} \right) = 0$$

$$3 - 1 - 2 = 0 \quad \square$$

6. Il suffit d'intégrer l'expression suivante en tenant compte des diverses combinaisons de signe. C'est un peu calculatoire, mais ce n'est pas bien compliqué : il n'est pas inutile d'observer qu'il est possible d'intégrer de manière distincte dans les deux directions :-)

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_i(\xi, \eta) \phi_j(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{16} \int_{-1}^1 (1 \pm \xi)(1 \pm \xi)(1 - \xi/2) d\xi \int_{-1}^1 (1 \pm \eta)(1 \pm \eta)(1 - \xi/2) d\eta \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de calculer toutes les intégrales unidimensionnelles...

Oui, c'est très très fastidieux : je le reconnais bien volontiers !

Eliminer directement les termes de puissance impaire permet de gagner pas mal de temps ... et d'éviter un paquet d'erreurs.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (1+\xi)(1+\xi)(1-\xi/2) d\xi &= \int_{-1}^1 (1+2\xi+\xi^2)(1-\xi/2) d\xi \\
&= \int_{-1}^1 (1+2\xi+\xi^2-\xi/2-\xi^2-\xi^3/2) d\xi = \left[\xi \right]_{-1}^1 = 2 \\
\int_{-1}^1 (1-\xi)(1-\xi)(1-\xi/2) d\xi &= \int_{-1}^1 (1-2\xi+\xi^2)(1-\xi/2) d\xi \\
&= \int_{-1}^1 (1-2\xi+\xi^2+\xi/2+\xi^2+\xi^3/2) d\xi = \left[\xi + \frac{2\xi^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{10}{3} \\
\int_{-1}^1 (1-\xi)(1+\xi)(1-\xi/2) d\xi &= \int_{-1}^1 (1-\xi^2)(1-\xi/2) d\xi = \int_{-1}^1 (1-\xi/2-\xi^2+\xi^3/2) d\xi = \left[\xi - \frac{\xi^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \\
\int_{-1}^1 (1-\eta)(1+\eta) d\eta &= \int_{-1}^1 (1-\eta^2) d\eta = \left[\eta - \frac{\eta^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \\
\int_{-1}^1 (1+\eta)(1+\eta) d\eta &= \int_{-1}^1 (1+2\eta+\eta^2) d\eta = \left[\eta + \frac{\eta^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3} \\
\int_{-1}^1 (1-\eta)(1-\eta) d\eta &= \int_{-1}^1 (1-2\eta+\eta^2) d\eta = \left[\eta + \frac{\eta^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Finalement, on peut en déduire la matrice de masse (ouf :-) :

$$A_{ij} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} \frac{6}{3} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \frac{4}{3} & \frac{6}{3} \frac{4}{3} \\ & \frac{10}{3} \frac{8}{3} & \frac{10}{3} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \frac{4}{3} \\ & & \frac{10}{3} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \frac{8}{3} \\ & & & \frac{6}{3} \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 3 \\ & 10 & 5 & 2 \\ & & 10 & 3 \\ & & & 6 \end{bmatrix}$$

Le membre de droite est obtenu immédiatement puisque les flux sont tous nuls sauf sur le segment de gauche de longueur trois. Donc, il suffit juste d'intégrer une fonction de forme linéaire sur l'élément parent unidimensionnel.

On écrit simplement :

$$B_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. En fait, si on a effectué avec soin tous les calculs qui précèdent (si, si deux étudiants l'ont fait !), cette dernière étape est assez immédiate en observant que par symétrie $C_1 = C_4$ et $C_2 = C_3$. On omet les indices temporels pour un peu alléger un brin les notations :-)
Il faut uniquement résoudre un tout petit système de deux équations :

$$\begin{cases} 9C_1 + 6C_2 = 0 \\ 6C_1 + 15C_2 = 27 \end{cases}$$

Et donc après pas mal d'efforts et de courage, on peut conclure :

$$\begin{aligned} C_1 &= C_4 = -\frac{18}{11} \\ C_2 &= C_3 = \frac{27}{11} \end{aligned}$$

Pas vraiment exceptionnelle comme solution, au passage !

On constate toutefois que la quantité de matière de la solution correspond exactement à ce qui a été incorporé par la frontière gauche : c'est bien une méthode conservative.

Equations des eaux peu profondes : solutions

27

Le terme γu représente la dissipation des échelles non-résolues. Les unités de γ sont $\left[\frac{1}{s}\right]$

Le terme $\frac{\tau}{\rho h}$ représente le forçage dû au vent. Les unités de τ sont celles d'une pression $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

28

En prenant $g \approx 10 [m/s^2]$,
et la profondeur de l'océan (pas la hauteur de la vague !) $h \approx 4000 [m]$,

on obtient : $\sqrt{gh} = 200 [m/s] = 720 [km/h]$

29

On calcule les valeurs propres du problème linéarisé en écrivant :

$$0 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & h \\ g & u - \lambda \end{bmatrix}$$

↓

$$\lambda^2 - u\lambda - gh = 0$$

On conclut que $\lambda = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 4gh}}{2}$

On observe ici que le problème devient non-linéaire puisque les valeurs propres obtenus dépendent de la solution ! Cela nécessitera de résoudre un problème non-linéaire avec une méthode itérative à chaque pas de temps ou d'utiliser une approximation du solveur exact de Riemann.