

Finite elements for dummies : Integrate

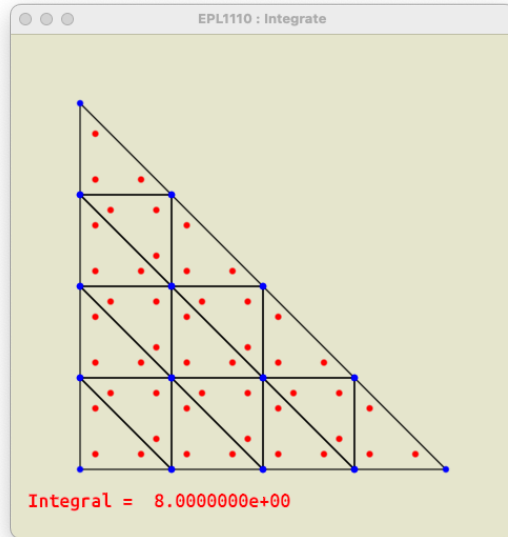
Il s'agit d'intégrer une fonction $f(x, y)$ sur un triangle quelconque défini par ses trois sommets dans le plan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La règle d'intégration consiste à estimer l'intégrale par la somme pondérée des valeurs de la fonction en trois points judicieusement choisis.

$$\underbrace{\int_{\hat{\Omega}} f(x, y) dx dy}_I \approx \underbrace{\sum_{k=1}^3 w_k f(x_k, y_k)}_{I_h}$$

Sur le triangle $\hat{\Omega}$ dont les trois sommets sont $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ dans le plan $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, les poids et points d'intégration d'une règle^a d'intégration d'ordre deux sont donnés par :

ξ_k	η_k	w_k
1/6	1/6	1/6
1/6	2/3	1/6
2/3	1/6	1/6

^a On place parfois les points d'intégration au milieu des 3 côtés du triangle ! C'est juste une autre règle d'intégration :-)



Sur un triangle quelconque Ω défini par les 3 sommets (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3) , on obtiendra le résultat escompté en effectuant un changement de variables donné par :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 X_i \phi_i(\xi, \eta), \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 Y_i \phi_i(\xi, \eta),$$

où les trois fonctions de forme sont respectivement $\phi_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$, $\phi_2(\xi, \eta) = \xi$ et $\phi_3(\xi, \eta) = \eta$. Il faut aussi adapter judicieusement les poids !

Plus précisément, on vous demande de :

1. Tout d'abord, écrire une fonction

```
double integrate(double x[3], double y[3], double(*f)(double, double))
```

qui estime l'intégrale de la fonction **f** sur le triangle défini par ses trois sommets. Si la fonction à intégrer est la fonction $f(x, y) = 1$, vous devez normalement obtenir la surface du triangle. C'est un bon test de validation !

2. Ensuite, écrire une fonction

```
double integrateRecursive(double x[3],double y[3],double(*f)(double,double),int n)
```

qui calcule la même intégrale divisant récursivement le triangle en quatre sous-triangles. Lorsque $n = 0$, on applique la règle d'intégration sur le triangle original, tandis qu'on considère 4, 16 ou 64 sous-triangles lorsque $n = 1, 2$ ou 3 . La décomposition d'un triangle en quatre sous-triangles s'effectue en ajoutant des noeuds sur le milieu des côtés. Il est fortement conseillé de réaliser une implémentation récursive et d'utiliser la première fonction définie.

3. Un morceau de code `main.c` vous est fourni pour tester votre fonction. Il faut donc compiler les deux fichiers séparément et ensuite effectuer une édition de lien entre les deux modules objets.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "fem.h"
#include "glfem.h"

double integrate(double x[3],double y[3],double(*f)(double,double));
double integrateRecursive(double x[3],double y[3],double(*f)(double,double),int n);

double fun(double x,double y)    { return cos(x) + y * y; }
double stupid(double x,double y) { return 1.0; }

int main(int argc, char* argv[])
{
    char    theMessage[256];
    double x[3] = { 0, 1, 0};
    double y[3] = { 0, 0, 1};

    glfemWindowCreate("EPL1110 : Integrate",480,480,3,x,y);
    do {
        glfemWindowUpdate();
        double I = integrateRecursive(x,y,fun,2);
        sprintf(theMessage, "Integral = %14.7e",I);
        glfemDrawMessage(theMessage,(double[2]){16.0, 30.0});
    } while(!glfemWindowShouldClose());

    glfemWindowFree();
    exit(EXIT_SUCCESS);
    return 0;
}
```

4. Vos deux fonctions seront incluses dans un unique fichier `homework.c`, sans y adjoindre le programme de test et les autres fichiers fournis ! Le contenu de ce seul fichier sera soumis via le serveur web du cours et la correction sera effectuée automatiquement. Il est donc indispensable de respecter strictement la signature des fonctions. Votre code devra être strictement conforme au langage C et il est fortement conseillé de bien vérifier la compilation s'exécute correctement sur le serveur. Attention, de nombreuses extensions sont souvent admises dans les environnement de développements standards, même lorsque votre fichier a un suffixe `.c`. Il faut aussi y bien être attentifs à veiller à ce que votre fichier s'exécute correctement sur le serveur.
5. Si vous n'avez pas effectué la seconde étape du devoir, il est judicieux d'inclure une fonction vide dans votre soumission pour au moins réussir le test de compilation.
6. Il est tout-à-fait inutile d'inclure des commentaires, car le correcteur automatique ne va pas les lire. Il n'est toutefois pas inutile d'inclure vos nom et prénom dans l'entête du programme et de mentionner vos éventuelles sources d'inspiration ou de collaboration. Pour rappel, le plagiat est susceptible d'être sanctionné :-)
7. Si tout se passe bien, vous devriez voir apparaître le dessin de la figure : ah oui, là, j'ai juste intégré une fonction constante unitaire : la vraie valeur à trouver, cela c'est votre job.