

## Eléments finis pour l'élasticité linéaire...

Nous considérerons successivement l'élasticité linéaire, la théorie de la corde et de la membrane tendue, la théorie de la poutre en flexion et des plaques et coques, ainsi que le problème de Stokes. On montre que ces problèmes admettent une formulation variationnelle et ne sont qu'une simple généralisation de notre problème elliptique modèle qui était l'équation de Poisson.

### 1 Formulation abstraite d'un problème elliptique

Tout d'abord, nous allons généraliser la formulation faible au cas d'une inconnue vectorielle : typiquement nous pensons au vecteur déplacement  $\mathbf{u} = (u, v)$  d'un problème d'élasticité bidimensionnel.

#### 1.1 Formulation faible

La formulation faible se généralise comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{U} \text{ tel que} \\ a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = b(\hat{\mathbf{u}}), \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathcal{U}}, \end{array} \quad (1)$$

où les espaces  $\mathcal{U}$  et  $\hat{\mathcal{U}}$  contiennent maintenant des champs vectoriels solutions ou variations du problème considéré. La forme  $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire, symétrique, continue et définie positive et la forme  $b(\cdot)$  est une forme linéaire continue.

Rappelons que l'intérêt majeur de cette formulation faible est qu'elle est parfaitement équivalente à problème de minimisation défini comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{U} \text{ tel que} \\ J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}} \underbrace{\left( \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}) \right)}_{J(\mathbf{v})}, \end{array} \quad (2)$$

#### 1.2 Formulation discrète

La méthode des éléments finis consiste alors à écrire une approximation de  $\mathbf{u}$  sous la forme suivante

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{U}_j \tau_j(\mathbf{x}) \quad (3)$$

où  $\mathbf{U}_j$  sont de *valeurs vectorielles nodales* inconnues, tandis que  $\tau_j$  sont des *fonctions de forme scalaire* spécifiées a priori et appartenant à l'espace  $\mathcal{U}$ . Les fonctions de forme sont choisies afin qu'aucune d'entre elles ne puisse être obtenue par combinaison linéaire des autres.

On définit ensuite la formulation discrète :

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{u}(\mathbf{x})^h \in \mathcal{U}^h \text{ tel que} \\ &a(\hat{\mathbf{u}}^h, \mathbf{u}^h) = b(\hat{\mathbf{u}}^h), \quad \forall \hat{\mathbf{u}}^h \in \hat{\mathcal{U}}^h, \end{aligned}} \quad (4)$$

où les espaces  $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$  et  $\hat{\mathcal{U}}^h \subset \hat{\mathcal{U}}$  sont les sous-espaces discrets.

Il y a donc  $2n$  degrés de liberté pour définir un élément particulier appartenant au sous-espace discret  $\hat{\mathcal{U}}^h \subset \hat{\mathcal{U}}$ . Tous les éléments de cet espace sont obtenus par une combinaison linéaire unique des éléments de la base définie par :

$$\left\{ \left[ \begin{array}{c} \tau_1 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \right], \dots, \left[ \begin{array}{c} \tau_n \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \tau_1 \end{array} \right], \dots, \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \tau_n \end{array} \right] \right\} \quad (5)$$

Il est alors possible d'obtenir le système linéaire correspondant au problème discret

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{U}_j \text{ tels que} \\ &\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \cdot \mathbf{U}_j = \mathbf{B}_i, \quad i = 1, n. \end{aligned}} \quad (6)$$

où  $\mathbf{A}_{ij}$  représente une matrice  $n \times n$  dont chaque composante est elle-même une matrice  $2 \times 2$  composantes. Il en est de même pour  $\mathbf{B}_i$  et  $\mathbf{U}_i$  dont chaque composante est aussi un vecteur de 2 composantes.

Plus précisément,  $\mathbf{A}_{ij}$  et  $\mathbf{B}_i$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij} &= \begin{bmatrix} a([\tau_i \ 0], [\tau_j \ 0]) & a([\tau_i \ 0], [0 \ \tau_j]) \\ a([0 \ \tau_i], [\tau_j \ 0]) & a([0 \ \tau_i], [0 \ \tau_j]) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_i &= \begin{bmatrix} b([\tau_i \ 0]) \\ b([0 \ \tau_i]) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Et maintenant, tout est prêt pour pouvoir traiter un grand nombre de problèmes de mécanique des milieux continus... La généralisation tridimensionnelle est évidemment totalement triviale.

## 2 Elasticité linéaire tridimensionnelle

Considérons un corps élastique homogène occupant un domaine  $\Omega \subset \mathcal{R}^3$  dont la frontière peut être décomposée en deux parties  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_D$ . L'aire de  $\Gamma_D$  est strictement positive. Ce corps élastique est

soumis à une force de volume  $\mathbf{f}$  et à une force de contact  $\mathbf{g}$  exercée sur  $\Gamma_N$ . Supposons en outre, que le corps est fixé sur  $\Gamma_D$  (conditions essentielles homogènes).

On cherche à obtenir le déplacement  $\mathbf{u}$ . Pour obtenir un problème en déplacements, nous devons tirer profit des relations suivantes de la mécanique des milieux continus.

<p>Conservation de la quantité de mouvement</p> $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0$ <p>Conservation du moment de la quantité de mouvement</p> $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$	(8)
<p>Loi de comportement de Hooke</p> $\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)}}_{2\mu} \boldsymbol{\epsilon} + \underbrace{\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}_{\lambda} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{\delta}$	
<p>Cinématique</p> $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right)$	

où  $\boldsymbol{\delta}$  est le tenseur identité,  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des tensions de Cauchy et  $\boldsymbol{\epsilon}$  est le tenseur des déformations infinitésimales. Les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$ , le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  sont les paramètres matériels qui caractérisent le matériaux étudié.

La formulation forte du problème aux conditions aux limites de l'élasticité linéaire en termes de déplacement s'écrit sous la forme

<p>Trouver <math>\mathbf{u}(\mathbf{x})</math> tel que</p> $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$ $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N,$ $\mathbf{u} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D,$	(9)
---	-----

où  $\mathbf{n}$  représente la normale sortante et la relation  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  est déduite à partir de la loi de comportement de Hooke et de la définition du tenseur des déformations infinitésimales.

## 2.1 Formulation variationnelle ou faible

Nous pouvons maintenant effectuer un peu d'algèbre à partir de (9)

$$\langle \hat{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}) \rangle = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathcal{U}},$$

En effectuant une intégration par parties,

$$\langle \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \rangle - \langle (\nabla \hat{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \rangle + \langle \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} \rangle = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathcal{U}},$$

En vertu du théorème de la divergence,

$$\ll \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \gg - \langle (\nabla \hat{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \rangle + \langle \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} \rangle = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathcal{U}},$$

En vertu de la définition de  $\hat{\mathcal{U}}$ ,

$$\ll \underbrace{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}_{\mathbf{g}} \gg_N - \langle (\nabla \hat{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \rangle + \langle \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} \rangle = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathcal{U}}.$$

On observe que cette procédure correspond exactement à ce qui avait été réalisé pour l'équation de Poisson : notre problème modèle elliptique.

Toutefois, pour pouvoir observer que la forme  $a(\cdot, \cdot)$  symétrique et définie et positive, il faut effectuer encore un tout petit peu d'algèbre usuelle de la mécanique des milieux continus. Rappelons tout d'abord la loi de Hooke généralisée,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}. \quad (10)$$

dont la loi de Hooke est le cas particulier pour un matériau isotrope. Dans un tel cas, les composante  $C_{ijkl}$  du tenseur  $\mathbf{C}$  peuvent toutes s'écrire en termes de deux coefficients matériels indépendants,  $\lambda$  et  $\mu$ , appelés coefficients de Lamé. Ensuite, on peut ensuite ré-écrire  $\langle (\nabla \hat{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \rangle$  sous la forme suivante :

$$\langle (\nabla \hat{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \rangle = \left\langle \left( \frac{\nabla \hat{\mathbf{u}} + \nabla \hat{\mathbf{u}}^T}{2} + \frac{\nabla \hat{\mathbf{u}} - \nabla \hat{\mathbf{u}}^T}{2} \right) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \right\rangle$$

↓ Car le produit dyadique de tenseur sym. et antisym. vaut zéro,

$$= \langle \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \rangle + \underbrace{\left\langle \left( \frac{\nabla \hat{\mathbf{u}} - \nabla \hat{\mathbf{u}}^T}{2} \right) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \right\rangle}_{=0}$$

↓ En vertu de la loi de Hooke généralisée,

$$= \langle \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle$$

La *formulation faible* ou variationnelle est alors immédiatement déduite comme suit :

Trouver  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$  tel que

$$\underbrace{\langle \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle}_{a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u})} = \underbrace{\langle \hat{\mathbf{u}}f \rangle + \ll \hat{\mathbf{u}}g \gg_N}_{b(\hat{\mathbf{u}})}, \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathcal{U}}, \quad (11)$$

La fonctionnelle associée au problème de minimum équivalent est donné par

$$J(\mathbf{v}) = \underbrace{\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle}_{\frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v})} - \underbrace{\langle \mathbf{v}f \rangle + \ll \mathbf{v}g \gg_N}_{b(\mathbf{v})}, \quad (12)$$

où le premier terme correspond à l'énergie de déformation et le second au travail des forces extérieures. Cette fonctionnelle représente l'énergie potentielle.

La solution à l'équilibre est bien le minimum de l'énergie potentielle pour autant que l'énergie de déformation soit une forme quadratique définie positive. Pour un matériau isotrope, l'énergie de déformation est donnée par

$$\frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \langle \frac{1}{2}\lambda \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) + \mu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle$$

Supposer que le membre de droite de cette expression est une forme quadratique positive revient, entre autres, à exiger pour les coefficients de Lamé les contraintes suivantes

$$\begin{aligned} \mu &> 0, \\ \lambda + \frac{2}{3}\mu &> 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Nous avons ainsi montré<sup>1</sup> que la résolution d'un problème d'élasticité linéaire aux conditions limites revient à chercher le minimum d'une fonctionnelle représentant l'énergie potentielle.

### 2.1.1 Interprétation du concept d'énergie de déformation

Afin de comprendre le concept d'énergie de déformation associée à un déplacement<sup>2</sup>  $W(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ , considérons un exemple unidimensionnel élémentaire. L'énergie de déformation est le travail requis pour déformer la structure et qui reste stocké dans la structure déformée. Lorsque les forces extérieures sont supprimées, cette énergie peut donc être récupérée. Toutefois, une telle approche suppose que le chargement est très progressif et très lent et que tous les effets irréversibles ou dissipatifs sont négligés.

A titre d'exemple considérons un ressort linéaire déformé dont le déplacement est  $u$  et qui est donc soumis à une force  $f = f(u)$ . La force requise dépend de la raideur du ressort et donc d'un loi de

<sup>1</sup> En toute rigueur, il faudrait montrer que la forme  $a(\cdot)$  est une forme définie positive. Ce que l'on n'a pas vraiment fait ! Mais, croyez en la tradition... c'est vrai!

<sup>2</sup> Le déplacement nul correspond au cas où la structure n'est soumise à aucune charge et n'est donc pas déformée ! Ce qui n'est pas toujours le cas, car la configuration de référence n'est pas toujours non chargée...

comportement du type  $f(u) = k u$ . Pour déformer ce ressort, nous allons le charger progressivement en lui appliquant une charge croissante  $f s$  où le paramètre  $s$  passe progressivement de 0 à 1. En un instant  $t$ , nous allons supposer que le travail fourni sera le produit de la charge appliquée  $f s$  et de l'incrément de déplacement  $du = u ds$ , en négligeant tous les effets dissipatifs. Toute l'énergie fournie pour passer de l'état non-déformé à l'état déformé sera donc donnée par :

$$\begin{aligned} W(u) &= \int_0^1 f s u ds \\ &= f(u) u \underbrace{\int_0^1 s ds}_{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} f(u) u \end{aligned}$$

En procédant par analogie, il est aisé de généraliser en écrivant simplement que :

$$W(\mathbf{u}) = \underbrace{\langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \rangle}_{\frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$$

### 2.1.2 Evaluation des tensions dans une formulation en déplacements

L'approximation du champ de déplacements utilisé dans les paragraphes précédents pour résoudre les problèmes d'élasticité est toujours continu, mais ce n'est en général pas le cas des dérivées partielles de cette approximation. Dans les problèmes pratiques, on désire en général connaître les tensions. La question se pose alors de calculer au préalable les composantes de déformation, et d'utiliser ensuite les équations de constitution pour calculer les tensions. Les dérivées partielles de l'approximation des composantes de déplacement peuvent cependant poser de sérieux problèmes d'interprétation aux valeurs nodales.

Ma solution exacte en déplacements  $\mathbf{u}$  minimise l'énergie potentielle. Les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de l'énergie potentielle forment la formulation faible du problème. Par ailleurs, la solution approchée en déplacements  $\mathbf{u}^h$  obtenue par la méthode de Galerkin minimise également l'énergie potentielle. On peut dès lors écrire pour une même fonction test  $\hat{\mathbf{u}}^h$  les formulations faible et discrète :

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{u}}^h, \mathbf{u}) &= b(\hat{\mathbf{u}}^h), & \forall \hat{\mathbf{u}}^h \in \hat{\mathcal{U}}^h \subset \hat{\mathcal{U}} \\ a(\hat{\mathbf{u}}^h, \mathbf{u}^h) &= b(\hat{\mathbf{u}}^h), & \forall \hat{\mathbf{u}}^h \in \hat{\mathcal{U}}^h \end{aligned}$$

En soustrayant les deux lignes précédentes, on observe que  $\mathbf{u}^h$  peut être interprétée comme la solution du problème suivant :

Trouver  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{U}^h$  tel que

$$a(\hat{\mathbf{u}}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}}^h \in \hat{\mathcal{U}}^h,$$

(14)

Et le problème (14) peut lui-même être vu comme les conditions de stationnarité d'une autre fonctionnelle  $G$ . La solution discrète  $\mathbf{u}^h$  est solution d'un autre problème de minimum que l'on peut écrire comme suit :

Trouver  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{U}^h$  tel que

$$G(\mathbf{u}^h) = \min_{\mathbf{v}^h \in \mathcal{U}^h} \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) d\Omega}_{G(\mathbf{v}^h)} \quad (15)$$

L'approximation du champ de déplacements qui minimise l'énergie potentielle, fournit un champ de déformations et donc de tensions qui est le plus proche possible de la solution exacte au sens d'une méthode des moindres carrés. Cette observation donne une signification aux composantes de déformation et de tension que nous trouvons sur la base des déplacements continus mais ne donne pas encore les indications nécessaires pour localiser les "bonnes" valeurs de tension. Dans ce but, examinons une propriété intéressante des approximations obtenues par une méthode des moindres carrés.

Considérons un polynôme du deuxième degré  $p(x) = a + bx + cx^2$  défini sur l'intervalle  $] -1, 1[$ . Sur le même intervalle, nous voudrions approcher ce polynôme du deuxième degré, par un polynôme du premier degré  $p^h(x) = A + Bx$ , en adoptant la méthode des moindres carrés. Nous devons dès lors trouver  $A$  et  $B$  afin de minimiser l'expression

$$\int_{-1}^{+1} \left( \underbrace{(A + Bx)}_{p^h(x)} - \underbrace{(a + bx + cx^2)}_{p(x)} \right)^2 dx$$

On trouve facilement que c'est le cas avec

$$\begin{aligned} A &= a + \frac{c}{3}, \\ B &= b. \end{aligned}$$

L'intersection de la droite avec le polynôme du deuxième degré se situe aux points tels que

$$(a + bx + cx^2) = (A + Bx).$$

et on trouve facilement que

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

c'est à dire aux deux points de la règle d'intégration numérique de Gauss-Legendre correspondant à l'intégration exacte d'un polynôme de degré 3. La règle est plus générale que l'exemple que nous venons de voir. Si on désire approcher un polynôme de degré  $p$  par un polynôme de degré  $p - 1$  dans le sens des moindres carrés, on fait passer celui-ci par les valeurs du polynôme de degré  $p$  aux  $p$  points d'intégration exacte d'un polynôme de degré  $2p - 1$ . C'est sur base de cette observation qu'en pratique, les numériciens considèrent à plus ou moins juste titre que les seules valeurs fiables de tensions pour une solution discrète en déplacements, sont les tensions calculées aux points d'intégration.

### 3 Elasticité linéaire plane

Dans cette section, nous présentons la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis pour l'élasticité plane. On distingue typiquement le cas des déformations planes et des tensions planes. On observe, en effet, en vertu de l'équation de comportement, qu'il est impossible de supposer simultanément que les contraintes et les déformations soient planes.

En supposant des déformations planes ( $\epsilon_{zz} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$ ), les équations de constitution s'écrivent

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}), \\
 \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu\epsilon_{xx} + (1-\nu)\epsilon_{yy}), \\
 \sigma_{zz} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}), \\
 \sigma_{xy} &= \frac{E}{(1+\nu)} \epsilon_{xy},
 \end{aligned} \tag{16}$$

tandis qu'en tensions planes ( $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ ), on a

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}), \\
 \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\nu\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}), \\
 \sigma_{xy} &= \frac{E}{(1+\nu)} \epsilon_{xy}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

où on utilise le fait que la contrainte  $\sigma_{zz}$  est supposée nulle, pour exprimer  $\epsilon_{zz}$  en termes de  $\epsilon_{xx}$  et  $\epsilon_{yy}$ .

Comme le problème est maintenant bidimensionnel, on va utiliser des notations tensorielles bidimensionnelles en définissant le vecteur déplacement, le tenseur de Cauchy et le tenseur de déformations infinitésimales, la normale, le vecteur des forces de volume et le vecteur des forces de contact par les expressions :



$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\epsilon} &= \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{n} &= \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}, \\
\mathbf{f} &= \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}, \\
\mathbf{g} &= \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Les deux systèmes (16) (à l'exception de la relation pour la contrainte transversale  $\sigma_{zz}$ ) et (17) peuvent s'écrire sous une forme matricielle unique

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\epsilon_{xx} + B\epsilon_{yy} & 2C\epsilon_{xy} \\ 2C\epsilon_{xy} & A\epsilon_{yy} + B\epsilon_{xx} \end{bmatrix} \tag{19}$$

où les constantes A, B, C sont définies dans le tableau suivant.

Déformations planes	Tensions planes
$A = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$A = \frac{E}{(1-\nu^2)}$
$B = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$B = \frac{E\nu}{(1-\nu^2)}$
$C = \frac{E}{2(1+\nu)}$	

Nous utiliserons désormais cette formulation unique, tout en sachant qu'elle convient à la fois pour les tensions planes et les déformations planes. Avec cette formulation, l'énergie de déformation s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \rangle, \\
&= \frac{1}{2} \langle \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} A\epsilon_{xx} + B\epsilon_{yy} & 2C\epsilon_{xy} \\ 2C\epsilon_{xy} & A\epsilon_{yy} + B\epsilon_{xx} \end{bmatrix} \rangle, \\
&= \frac{1}{2} \langle \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} \rangle.
\end{aligned} \tag{20}$$

Cette dernière écriture n'est possible que si la composante de cisaillement  $\epsilon_{xy}$  est multipliée par 2 lors de la définition du pseudo-vecteur des déformations infinitésimales remplaçant le tenseur d'ordre deux. L'intérêt de cette dernière écriture est d'identifier une matrice centrale d'ordre 3 qui doit être définie positive pour que la forme  $a$  le soit également.

Maintenant, il s'agit de construire la matrice locale de raideur dont chaque composante est une matrice  $2 \times 2$ . Observons que

$$\epsilon([\tau_i, 0]) = \begin{bmatrix} \tau_{i,x} & \tau_{i,y}/2 \\ \tau_{i,y}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon([0, \tau_i]) = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{i,x}/2 \\ \tau_{i,x}/2 & \tau_{i,y} \end{bmatrix},$$

puis d'utiliser (7) et (19) pour obtenir directement l'expression de la matrice de raideur et du membre de droite :

$$\mathbf{A}_{ij} = \left[ \begin{array}{c|c} \langle \tau_{i,x} A \tau_{j,x} \rangle + \langle \tau_{i,y} C \tau_{j,y} \rangle & \langle \tau_{i,x} B \tau_{j,y} \rangle + \langle \tau_{i,y} C \tau_{j,x} \rangle \\ \hline \langle \tau_{i,y} B \tau_{j,x} \rangle + \langle \tau_{i,x} C \tau_{j,y} \rangle & \langle \tau_{i,y} A \tau_{j,y} \rangle + \langle \tau_{i,x} C \tau_{j,x} \rangle \end{array} \right],$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \langle \tau_i f_x \rangle + \ll \tau_i g_x \gg \\ \langle \tau_i f_y \rangle + \ll \tau_i g_y \gg \end{bmatrix}.$$

### 3.0.1 Exemple numérique : triangles de Turner

Limitons nous à un élément simple, pour lequel nous calculerons en détail une solution numérique. L'élément fini utilisé sera le triangle où les sommets sont des noeuds, et qui contiendra six valeurs nodales en élasticité plane, c'est-à-dire les deux composantes de déplacement à chaque sommet.

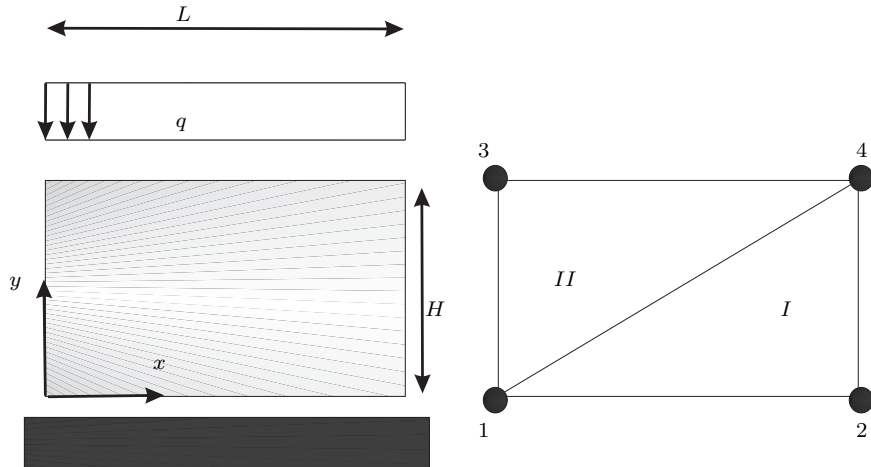


Fig. 1: Exemple simple en élasticité.

Nous désirons calculer par la méthode des éléments finis les déplacements dans le rectangle dessiné à la figure 1 soumis à une pression  $q$  à la partie supérieure et en l'absence de forces de masse. Les conditions aux frontières du problème sont données par

$$x = 0 \quad g_x = 0, \quad g_y = 0,$$

$$x = L \quad g_x = 0, \quad g_y = 0,$$

$$y = 0, \quad g_x = 0, \quad v = 0,$$

$$y = H, \quad g_x = 0, \quad g_y = -q.$$

Ces conditions ne conduisent pas à l'unicité des déplacements, car la translation rigide suivant  $x$  est encore possible. Nous ajoutons dès lors la condition  $u = 0$  à l'origine. La solution analytique du problème en tensions planes est donnée par

$$u = \frac{q\nu x}{E},$$

$$v = \frac{-qy}{E}.$$

Nous devons dès lors nous attendre à retrouver par éléments finis la solution exacte du problème. En effet, les fonctions de forme de l'élément de Turner permettent de reproduire exactement un champ de déplacements linéaire en  $x, y$ . La solution exacte se trouve alors dans l'espace choisi pour trouver une approximation par éléments finis.

Le domaine est découpé en 2 éléments. Les données du problème peuvent, par exemple, être spécifiées comme suit.

- Tableau d'appartenance des triangles .
- Coordonnées des sommets.
- Conditions de Neumann non-homogènes.
- Conditions de Dirichlet en terme de déplacements horizontaux.
- Conditions de Dirichlet en terme de déplacements verticaux.

Triangle	Sommets
1	1 2 4
2	1 4 3

Sommet	$X_i$	$Y_i$
1	0.0	0.0
2	L	0.0
3	0.0	H
4	L	H

Segment	$t_x$	$t_y$
4 3	0.0	-q

Sommet	$u$
1	0.0

Sommet	$v$
1	0.0
2	0.0

Dans chaque élément, on définit un vecteur local d'inconnues de la même manière que le vecteur global

$$\begin{bmatrix} Z_1^e \\ Z_2^e \\ Z_3^e \\ Z_4^e \\ Z_5^e \\ Z_6^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^e \\ V_1^e \\ U_2^e \\ V_2^e \\ U_3^e \\ V_3^e \end{bmatrix}, \quad (21)$$

et on associe à ce vecteur local d'inconnues, une matrice locale de raideur et un vecteur local des forces nodales. Il suffit dès lors de calculer les matrices locales dans chaque élément et de procéder ensuite à l'assemblage.

Dans le premier élément, on a

$$\begin{aligned} \phi_{1,x}^1 &= -1/L, & \phi_{1,y}^1 &= 0, \\ \phi_{2,x}^1 &= 1/L, & \phi_{2,y}^1 &= -1/H, \\ \phi_{3,x}^1 &= 0, & \phi_{3,y}^1 &= 1/H, \end{aligned}$$

avec  $J_1 = HL$ . Il est aisé ensuite de calculer la matrice  $A_{ij}^1$  qui se présente comme suit

$$\frac{1}{2HL} \begin{bmatrix} AH^2 & 0 & -AH^2 & BHL & 0 & -BHL \\ 0 & CH^2 & CHL & -CH^2 & -CHL & 0 \\ -AH^2 & CHL & AH^2 + CL^2 & -(B+C)HL & -CL^2 & BHL \\ BHL & -CH^2 & -(B+C)HL & AL^2 + CH^2 & CHL & -AL^2 \\ 0 & -CHL & -CL^2 & CHL & CL^2 & 0 \\ -BHL & 0 & BHL & -AL^2 & 0 & AL^2 \end{bmatrix}.$$

Dans le second élément, on a

$$\begin{aligned} \phi_{1,x}^2 &= 0, & \phi_{1,y}^2 &= -1/H, \\ \phi_{2,x}^2 &= 1/L, & \phi_{2,y}^2 &= 0, \\ \phi_{3,x}^2 &= -1/L, & \phi_{3,y}^2 &= 1/H, \end{aligned}$$

avec  $J_2 = HL$  et une matrice  $A_{ij}^2$  qui se présente comme suit

$$\frac{1}{2HL} \begin{bmatrix} CL^2 & 0 & 0 & -CHL & -CL^2 & CHL \\ 0 & AL^2 & -BHL & 0 & BHL & -AL^2 \\ 0 & -BHL & AH^2 & 0 & -AH^2 & BHL \\ -CHL & 0 & 0 & CH^2 & CHL & -CH^2 \\ -CL^2 & BHL & -AH^2 & CHL & AH^2 + CL^2 & -(B+C)HL \\ CHL & -AL^2 & BHL & -CH^2 & -(B+C)HL & AL^2 + CH^2 \end{bmatrix}.$$

Chacune de ces matrices possède trois vecteurs propres indépendants dont les valeurs propres correspondantes sont nulles. Voyons en d'abord la signification. Soit  $\boldsymbol{\delta}$  un vecteur propre de la matrice  $\mathbf{A}^e$ . Nous avons

$$\mathbf{A}^e \boldsymbol{\delta} = \lambda \boldsymbol{\delta},$$

où  $\lambda$  est la valeur propre. Lorsque la valeur propre est nulle, le vecteur  $\mathbf{A}^e \boldsymbol{\delta}$  est nul, et dès lors l'énergie de déformation dans l'élément produite par le vecteur propre, qui vaut  $\boldsymbol{\delta} \mathbf{A}^e \boldsymbol{\delta}$ , est identiquement nulle. Les

seuls modes de déformation qui donnent lieu à une énergie de déformation nulle sont les modes rigides et nous nous attendons donc à retrouver dans les trois vecteurs propres associés à une valeur propre nulle les trois modes de déplacements rigides. On vérifie en effet que les vecteurs suivants sont des vecteurs propres pour  $A_{ij}^1$ , avec des valeurs propres nulles

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ L \\ -H \\ L \end{bmatrix}.$$

Il s'agit bien des translations suivant  $x$  et  $y$  et de la rotation autour du noeud 1. Pour la matrice locale du second élément, on obtient des conclusions similaires avec les trois vecteurs suivants

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -H \\ L \\ -H \\ 0 \end{bmatrix}.$$

L'étape suivante consiste à assembler ces deux matrices de rigidité locales pour obtenir une matrice de rigidité globale à huit lignes et huit colonnes. Les matrices locales  $6 \times 6$  sont décomposées en neuf sous-matrices  $2 \times 2$ . On agit de même avec la matrice globale et on l'assemblage peut s'effectuer sur ces sous-matrices. Notons que l'ordre des éléments d'une ligne n'est pas nécessairement le même dans la matrice locale et la matrice globale. Ceci provient du fait que la numérotation des noeuds d'un élément ne se fait pas toujours dans le sens croissant; c'est notamment le cas pour le deuxième élément. Ainsi dans la matrice de rigidité de cet élément, le terme de la troisième ligne, deuxième colonne (3,2) qui se trouve en-dessous de la diagonale se retrouve au-dessus de la diagonale dans la matrice globale. Il est important de tenir compte de ces considérations lorsqu'on écrit un programme qui ne calcule que les termes situés d'un côté de la diagonale dans la matrice de rigidité globale.

Le processus d'assemblage permet d'obtenir la matrice globale suivante (au facteur  $2HL$  près, mais l'espace sur la feuille de papier fait défaut pour pouvoir l'écrire... !).

$$\begin{bmatrix} AH^2 + CL^2 & 0 & -AH^2 & BHL & -CL^2 & CHL & 0 & -BHL - CHL \\ 0 & CH^2 + AL^2 & CHL & -CH^2 & BHL & -AL^2 & -BHL - CHL & 0 \\ -AH^2 & CHL & AH^2 + CL^2 & -BHL - CHL & 0 & 0 & -CL^2 & BHL \\ BHL & -CH^2 & -BHL - CHL & AL^2 + CH^2 & 0 & 0 & CHL & -AL^2 \\ -CL^2 & BHL & 0 & 0 & AH^2 + CL^2 & -BHL - CHL & -AH^2 & CHL \\ CHL & -AL^2 & 0 & 0 & -BHL - CHL & AL^2 + CH^2 & BHL & -CH^2 \\ 0 & -BHL - CHL & -CL^2 & CHL & -AH^2 & BHL & AH^2 + CL^2 & 0 \\ -BHL - CHL & 0 & BHL & -AL^2 & CHL & -CH^2 & 0 & CH^2 + AL^2 \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que la matrice de raideur globale possède aussi trois vecteurs propres dont les valeurs propres correspondantes sont nulles. Ces vecteurs sont donnés par les déplacements correspondants à une translation le long de  $x$ , une translation le long de  $y$  et une rotation le long du noeud 1. La matrice de raideur est donc singulière. La singularité sera levée par l'addition des conditions aux frontières essentielles.

Il nous reste à calculer le vecteur global des forces nodales. Comme  $f_x$  et  $f_y$  sont nuls, de même que  $g_x$ , il suffit de calculer sur le bord supérieur la contribution de la pression  $q$ . On obtient alors facilement que cette pression donne lieu au vecteur de forces nodales

$$\frac{-qL}{2} [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 ]^T.$$

Finalement, il faut utiliser les conditions aux frontières essentielles, et imposer une valeur nulle aux variables  $U_1, V_1$  et  $V_2$ . L'élimination des lignes et colonnes correspondantes aboutit au système d'équations

$$\begin{bmatrix} AH^2 + CL^2 & 0 & 0 & -CL^2 & BHL \\ 0 & AH^2 + CL^2 & -(B+C)HL & -AH^2 & CHL \\ 0 & -(B+C)HL & AL^2 + CH^2 & BHL & -CH^2 \\ -CL^2 & -AH^2 & BHL & AH^2 + CL^2 & 0 \\ BHL & CHL & -CH^2 & 0 & CH^2 + AL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -qHL^2 \\ 0 \\ -qHL^2 \end{bmatrix}.$$

La solution en termes de déplacements nodaux est finalement identique aux déplacements prédits par la solution analytique.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix} = \frac{q}{E} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \nu L \\ 0 \\ 0 \\ -H \\ \nu L \\ -H \end{bmatrix}.$$

#### 4 Elasticité linéaire axisymétrique

Examinons un autre type de problème qui peut être résolu par l'utilisation de deux variables d'espace seulement. Nous envisageons ici les problèmes axisymétriques sans torsion pour lesquels les trois composantes de déplacement sont données par

$$\begin{aligned} u_r &= u(r, z), \\ u_\theta &= 0, \\ u_z &= v(r, z). \end{aligned} \tag{22}$$

où  $u$  et  $v$  dénotent respectivement les deux composantes non-nulles du déplacement dans les directions  $r$  et  $z$ .

Choisissons donc une formulation par éléments finis du champ de déplacements sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} u(r, z) \\ v(r, z) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} u^h(r, z) \\ v^h(r, z) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \end{bmatrix} \tau_i(r, z). \tag{23}$$

Le domaine  $\Omega$  est défini dans le plan  $(r, z)$  de telle manière que sa rotation autour de l'axe  $z$  engendre le solide de révolution contenant le domaine élastique.

Quoique nous ayons que deux composantes de déplacements inconnues, nous allons écrire toutes les composantes du tenseur des déformations infinitésimales :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ v \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\theta} & \epsilon_{rz} \\ \epsilon_{\theta r} & \epsilon_{\theta\theta} & \epsilon_{\theta z} \\ \epsilon_{zr} & \epsilon_{z\theta} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{r,r} & 0 & (u_{r,r} + u_{z,r})/2 \\ 0 & u_r/r & 0 \\ (u_{r,r} + u_{z,r})/2 & 0 & u_{z,z} \end{bmatrix}.$$

On observe que la composante  $\epsilon_{\theta\theta}$  est non-nulle en raison de l'usage des coordonnées cylindriques et que le tenseur de Cauchy ne correspondra pas exactement à ce que nous avons obtenu dans le cas de l'élasticité plane.

En vertu de la loi de comportement de l'élasticité linéaire, on peut alors écrire la forme du tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A\epsilon_{rr} + B(\epsilon_{\theta\theta}) + \epsilon_{zz} & 0 & 2C\epsilon_{rz} \\ 0 & A\epsilon_{\theta\theta} + B(\epsilon_{rr} + \epsilon_{zz}) & 0 \\ 2C\epsilon_{rz} & 0 & A\epsilon_{zz} + B(\epsilon_{rr}) + \epsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

où les constantes A, B, C correspondent aux valeurs utilisées dans le cas des déformations planes du tableau (3)

Maintenant, il s'agit de construire la matrice locale de raideur dont chaque composante n'est qu'une matrice  $2 \times 2$ , car il n'y pas d'inconnue dans la direction azymuthale. A nouveau, il suffit d'observer que

$$\boldsymbol{\epsilon}([\tau_i, 0, 0]) = \begin{bmatrix} \tau_{i,r} & 0 & \tau_{i,z}/2 \\ 0 & \tau_i/r & 0 \\ \tau_{i,z}/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}([0, 0, \tau_i]) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{i,r}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{i,r}/2 & 0 & \tau_{i,z} \end{bmatrix},$$

puis d'utiliser l'expression (7) pour obtenir l'expression de la matrice locale de raideur. Nous allons procéder comme pour l'élasticité plane, mais en effectuant l'intégrale sur le volume occupé par le matériau. Comme volume élémentaire d'une solide de révolution est  $2\pi r d\Omega$ , la méthode de Galerkin consiste ici à exiger pour toute fonction de forme globale que les égalités suivantes soient satisfaites. La matrice de raideur et le membre de droite sont donc donnés par :

$$\mathbf{A}_{ij} = \left[ \begin{array}{c|c} \langle \tau_{i,r} Ar \tau_{j,r} \rangle + \langle \tau_{i,z} Cr \tau_{j,z} \rangle & \langle \tau_{i,r} Br \tau_{j,z} \rangle + \langle \tau_{i,z} Cr \tau_{j,r} \rangle \\ + \langle \tau_i (B \tau_{j,r} + A \frac{\tau_j}{r}) \rangle & + \langle \tau_i B \tau_{j,z} \rangle \\ + \langle \tau_{i,r} B \tau_j \rangle & \\ \hline \langle \tau_{i,z} Br \tau_{j,r} \rangle + \langle \tau_{i,r} Cr \tau_{j,z} \rangle & \langle \tau_{i,z} Ar \tau_{j,z} \rangle + \langle \tau_{i,r} Cr \tau_{j,r} \rangle \\ + \langle \tau_{i,z} B \tau_j \rangle & \end{array} \right],$$

$$\mathbf{B}_i = \left[ \begin{array}{c} \langle \tau_i r f_r \rangle + \ll \tau_i r g_r \gg \\ \langle \tau_i r f_z \rangle + \ll \tau_i r g_z \gg \end{array} \right].$$

Lorsqu'on examine ces expressions et celles obtenues pour un problème plan, on voit immédiatement la possibilité d'écrire un programme qui convienne à la fois pour les problèmes plans en tensions et déformations planes et pour les problèmes axisymétriques. En effet, la matrice globale et le vecteur global du cas axisymétrique sont essentiellement la somme de ceux du cas plan multiplié par le rayon  $r^3$  et de quelques termes supplémentaires.

## 5 Modèle de la poutre en flexion

### 5.0.1 Exemple numérique

Etudions maintenant l'exemple d'une poutre encastree en  $x = 0$  et soumise à une charge latérale  $q$  comme indiqué sur la figure 2. Nous supposons que la poutre a un moment d'inertie uniforme  $I$ , un module de Young  $E$  et une longueur  $L$ . Le problème à résoudre est

Trouver  $u$  tel que

$$u_{,xxxx}(x) - \frac{q(x)}{EI} = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$u(0) = 0,$$

$$u_{,x}(0) = 0,$$

$$u_{,xx}(L) = 0,$$

$$u_{,xxx}(L) = 0,$$

(24)

où  $u$  est la flèche par rapport à la configuration d'équilibre.

Il est facile de trouver la solution analytique de ce problème en utilisant le principe de superposition

- **Poutre sous la charge répartie uniforme**

En intégrant successivement et en appliquant les conditions frontières, on obtient que la flèche due à la charge uniforme est

$$u(x) = \frac{q}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2). \quad (25)$$

<sup>3</sup> On peut éliminer le terme  $2\pi$  constant qui apparaît à la fois dans toutes les composantes du membre de droite et de la matrice de raideur.



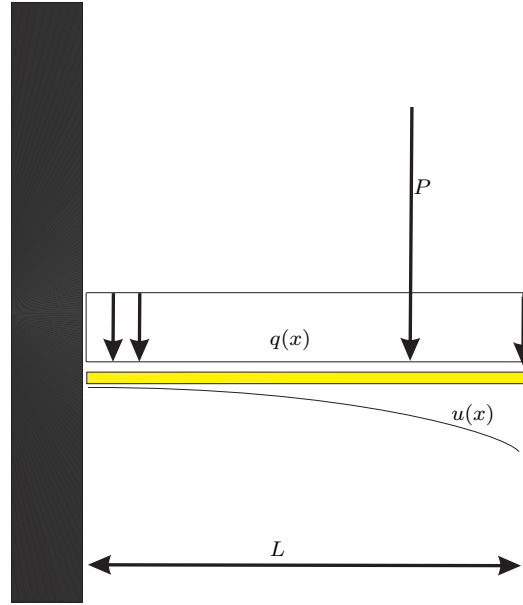


Fig. 2: Poutre encastree soumise à une charge répartie.

En particulier, la flèche vaut  $(qL^4)/(8EI)$  à l'extrémité.

- **Poutre sous la charge ponctuelle**

Ecrivons d'abord l'équilibre des moments fléchissants sur les deux morceaux de la poutre

$$\begin{aligned} u_{,xx}(x) EI &= \frac{3LP}{4} \left(1 - \frac{4x}{3L}\right), & x \in [0, \frac{3L}{4}], \\ u_{,xx}(x) EI &= 0, & x \in [\frac{3L}{4}, L]. \end{aligned} \quad (26)$$

En intégrant successivement chaque partie de l'équation, en tenant compte des conditions d'encastrement et en imposant la continuité de  $u$  et  $u_{,x}$  en  $x = 3L/4$ , on obtient finalement

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{P}{EI} \left( \frac{3Lx^2}{8} - \frac{x^3}{6} \right), & x \in [0, \frac{3L}{4}], \\ u(x) &= \frac{P}{EI} \left( \frac{9L^2x}{32} - \frac{9L^3}{128} \right), & x \in [\frac{3L}{4}, L]. \end{aligned} \quad (27)$$

Cette flèche vaut  $(27PL^3)/(128EI)$  à l'extrémité.

Considérons maintenant la résolution numérique de ce problème. Tout d'abord, nous décomposons la poutre en  $N_1$  éléments finis, délimités par  $N_0$  sommets  $X_i$ . Ensuite, il s'agit de choisir une approximation  $u^h$  pour la flèche. On souhaite que cette approximation, ainsi que sa pente, soient continues sur l'ensemble du domaine.

Afin de satisfaire cette exigence, construisons une approximation cubique de classe  $C^1(\Omega)$ , en choisissant comme paramètres inconnus la valeur de la flèche  $u^h(X_i)$  et la pente de la déformée  $u^h_{,x}(X_i)$  en chaque sommet. Nous définissons ainsi  $2N_0$  valeurs nodales généralisées que nous continuons de noter  $U_i$ .

Il s'agit alors de trouver une base adéquate de polynômes du troisième degré, sur l'élément parent. Les deux fonctions associées aux valeurs de la flèche doivent valoir l'unité pour un sommet, s'annuler à l'autre sommet et posséder une dérivée nulle aux extrémités. Par contre, les deux autres fonctions associées aux pentes doivent s'annuler aux deux extrémités, avoir une dérivée unitaire sur un sommet et nulle sur l'autre.

$$\begin{aligned}
 \phi_1(\xi) &= (1 - \xi)^2(2 + \xi)/4, \\
 \phi_2(\xi) &= (1 - \xi)^2(1 + \xi)/4, \\
 \phi_3(\xi) &= (1 + \xi)^2(2 - \xi)/4, \\
 \phi_4(\xi) &= -(1 + \xi)^2(1 - \xi)/4.
 \end{aligned} \tag{28}$$

La figure 3 montre clairement l'allure et la signification de ces fonctions. De telles fonctions de forme sont appelées *fonctions de forme cubiques hermitiennes*.

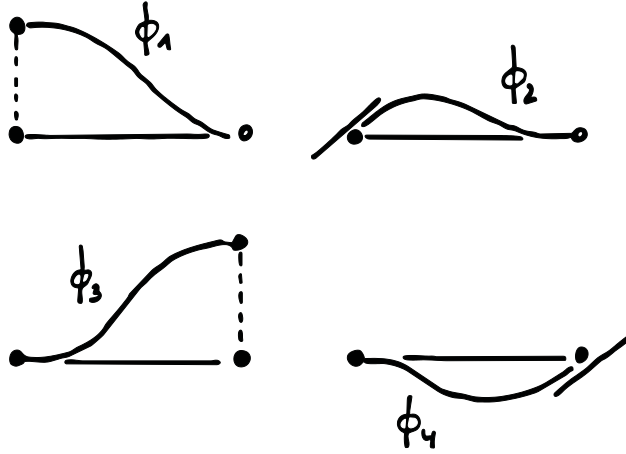


Fig. 3: Fonctions de forme cubique hermitiennes sur l'élément parent.

L'approximation  $u^h$  sur l'élément  $\Omega_e$ , est obtenue par combinaison linéaire des fonctions de base

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^4 U_i^e \phi_i^e(x), \quad x \in \Omega_e, \tag{29}$$

où les fonctions de forme sur un élément quelconque ne sont plus obtenues simplement en incluant l'isomorphisme dans les fonctions  $\phi_i(\xi)$ , en raison du choix de la valeur de la pente comme valeur nodale. Les fonctions de forme sur un élément quelconque sont données par

$$\begin{aligned}
 \phi_1^e(x) &= \phi_1(\xi(x)), \\
 \phi_2^e(x) &= \frac{(X_{e+1} - X_e)}{2} \phi_2(\xi(x)), \\
 \phi_3^e(x) &= \phi_3(\xi(x)), \\
 \phi_4^e(x) &= \frac{(X_{e+1} - X_e)}{2} \phi_4(\xi(x)).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Supposons que la poutre soit représentée par un seul élément. Nous avons  $h = L$ , et les conditions essentielles  $U_1 = U_2 = 0$ , vu qu'il y a encastrement en  $x = 0$ . Afin d'obtenir les deux valeurs nodales restantes, appliquons la technique de Galerkin. En effectuant deux intégrations par parties successives, on voit qu'il est possible d'imposer facilement les deux conditions naturelles en  $x = L$ .

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} r^h(x) \tau_i(x) dx \\
&= \int_{\Omega} \left( u_{,xxxx}^h(x) - \frac{q(x)}{EI} \right) \tau_i(x) dx, \\
&= - \int_{\Omega} u_{,xxx}^h(x) \tau_{i,x}(x) dx - \int_{\Omega} \frac{q(x)}{EI} \tau_i(x) dx \\
&\quad + [u_{,xxx}^h(x) \tau_i(x)]_0^L, \\
&= \int_{\Omega} u_{,xx}^h(x) \tau_{i,xx}(x) dx - \int_{\Omega} \frac{q(x)}{EI} \tau_i(x) dx \\
&\quad - [u_{,xx}^h(x) \tau_{i,x}(x)]_0^L + [u_{,xxx}^h(x) \tau_i(x)]_0^L,
\end{aligned} \tag{31}$$

En tenant compte des conditions essentielles et naturelles, nous obtenons finalement

$$0 = \sum_{j=3}^4 U_j \left( \int_{\Omega} \tau_{j,xx}(x) \tau_{i,xx}(x) dx \right) - \int_{\Omega} \frac{q(x)}{EI} \tau_i(x) dx.$$

La matrice de raideur est

$$A_{ij}^e = \frac{8}{h^3} \begin{bmatrix} 3/2 & 3h/4 & -3/2 & 3h/4 \\ 3h/4 & h^2/2 & -3h/4 & h^2/4 \\ -3/2 & -3h/4 & 3/2 & -3h/4 \\ 3h/4 & h^2/4 & -3h/4 & h^2/2 \end{bmatrix},$$

tandis que le membre de droite se compose de deux parties dues respectivement à la charge répartie et à la charge ponctuelle

$$B_i^e = \frac{qh}{2EI} \begin{bmatrix} 1 \\ h/6 \\ 1 \\ -h/6 \end{bmatrix} + \frac{P}{32EI} \begin{bmatrix} 5 \\ 3h/2 \\ 27 \\ -9h/2 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur des forces nodales peut être interprété physiquement comme un système de forces et de couples ponctuels, globalement équivalent à la charge imposée. On parle ainsi de *forces ou couples généralisés*.

En ne tenant compte que de l'effet de la charge répartie, nous écrivons après application des conditions essentielles

$$\frac{8}{h^3} \begin{bmatrix} 3/2 & -3h/4 \\ -3h/4 & h^2/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \frac{qh}{2EI} \begin{bmatrix} 1 \\ -h/6 \end{bmatrix},$$

dont la solution se compose de  $U_3 = (qL^4/8EI)$  et  $U_4 = (qL^3/6EI)$  qui représentent respectivement la flèche et la pente de la poutre en  $x = L$ . Il est facile de vérifier que les valeurs nodales sont précisément les valeurs analytiques. Le même constat est obtenu pour le cas de la force ponctuelle.