Calcul d'une intégrale sur la surface de la terre...

Pour intégrer une fonction $f(\theta, \phi)$ sur un élément quadrilatère ou triangulaire courbe correspondant à un morceau d'une sphère de rayon de R, nous allons utiliser la transformation entre les coordonnées tridimensionnelles (x, y, z) et la longitude θ et la latitude ϕ qui est définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(\theta,\phi) & = & R\ \cos(\theta)\ \cos(\phi) \\ y(\theta,\phi) & = & R\ \sin(\theta)\ \cos(\phi) \\ z(\theta,\phi) & = & R\ \sin(\phi) \end{array}\right.$$

Pour chaque élément, nous effectuons l'intégrale sur l'élément parent $\widehat{\Omega}$:

$$\int\int_{\Omega_e} f(\theta,\phi)\ dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\theta(\xi,\eta),\phi(\xi,\eta))\ J_e(\xi,\eta)\ d\xi d\eta$$

où le jacobien représente le rapport d'aire local entre l'élément parent et la surface sphérique. Il suffit donc d'appliquer la règle d'intégration sur l'élément parent en tenant compte du jacobien de la transformation. Géométriquement, ce jacobien est la norme du produit vectoriel des deux vecteurs obtenus en transformant $(d\xi, 0)$ et $(0, d\eta)$.

Il faut donc calculer la norme du vecteur :

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta), \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi,\eta), \frac{\partial z}{\partial \xi}(\xi,\eta)\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi,\eta), \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta), \frac{\partial z}{\partial \eta}(\xi,\eta)\right)$$

On calcule facilement chacune des composantes de ce vecteur grâce à :

$$\begin{array}{rcccl}
\dfrac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta) & = & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial \xi} + \dfrac{\partial x}{\partial \phi}\dfrac{\partial \phi}{\partial \xi} & = & -R\sin(\theta)\cos(\phi)\dfrac{\partial \theta}{\partial \xi} - R\cos(\theta)\sin(\phi)\dfrac{\partial \phi}{\partial \xi} \\[2ex]
\dfrac{\partial y}{\partial \xi}(\xi,\eta) & = & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial \xi} + \dfrac{\partial y}{\partial \phi}\dfrac{\partial \phi}{\partial \xi} & = & R\cos(\theta)\cos(\phi)\dfrac{\partial \theta}{\partial \xi} - R\sin(\theta)\sin(\phi)\dfrac{\partial \phi}{\partial \xi} \\[2ex]
\dfrac{\partial z}{\partial \xi}(\xi,\eta) & = & \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial \xi} + \dfrac{\partial z}{\partial \phi}\dfrac{\partial \phi}{\partial \xi} & = & R\cos(\phi)\dfrac{\partial \phi}{\partial \xi} \\[2ex]
\dfrac{\partial x}{\partial \eta}(\xi,\eta) & = & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial \eta} + \dfrac{\partial x}{\partial \phi}\dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} & = & -R\sin(\theta)\cos(\phi)\dfrac{\partial \theta}{\partial \eta} - R\cos(\theta)\sin(\phi)\dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} \\[2ex]
\dfrac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta) & = & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial \eta} + \dfrac{\partial y}{\partial \phi}\dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} & = & R\cos(\theta)\cos(\phi)\dfrac{\partial \theta}{\partial \eta} - R\sin(\theta)\sin(\phi)\dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} \\[2ex]
\dfrac{\partial z}{\partial \eta}(\xi,\eta) & = & \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial \eta} + \dfrac{\partial z}{\partial \phi}\dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} & = & R\cos(\phi)\dfrac{\partial \phi}{\partial \eta}
\end{array}$$

Pour avoir les valeurs locales θ et ϕ, on procède comme suit :

$$\left\{\begin{array}{rclrclrcl}
\theta(\xi,\eta) &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Theta_i \tau_i(\xi,\eta) & \dfrac{\partial\theta}{\partial\xi}(\xi,\eta) &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Theta_i \dfrac{\partial\tau_i}{\partial\xi}(\xi,\eta) & \dfrac{\partial\theta}{\partial\eta}(\xi,\eta) &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Theta_i \dfrac{\partial\tau_i}{\partial\eta}(\xi,\eta) \\[4ex]
\phi(\xi,\eta) &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Phi_i \tau_i(\xi,\eta) & \dfrac{\partial\phi}{\partial\xi}(\xi,\eta) &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Phi_i \dfrac{\partial\tau_i}{\partial\xi}(\xi,\eta) & \dfrac{\partial\phi}{\partial\eta}(\xi,\eta) &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Phi_i \dfrac{\partial\tau_i}{\partial\eta}(\xi,\eta)
\end{array}\right.$$

où Θ_i et Φ_i sont les longitudes et latitudes des n sommets de l'élément, tandis que $\tau_i(\xi,\eta)$ sont les fonctions de forme.

On peut directement implémenter le produit vectoriel de ces deux vecteurs. Il est aussi possible, en effectuant avec soin l'algèbre, d'observer que les trois composantes du vecteur $\mathbf{a}$ sont données par :

$$\begin{aligned}
a_x &= R^2 \cos(\theta)\cos^2(\phi) \left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} - \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\eta} \right) \\
a_y &= R^2 \sin(\theta)\cos^2(\phi) \left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} - \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\eta} \right) \\
a_z &= R^2 \Big(\sin^2(\theta)\sin(\phi)\cos(\phi) + \cos^2(\theta)\sin(\phi)\cos(\phi) \Big) \left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} - \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\eta} \right)
\end{aligned}$$

Finalement, on peut déduire que la norme de ce vecteur est :

$$J_e = R^2 \cos(\phi) \left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} - \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\eta} \right)$$

Ce jacobien peut aussi être interprété comme le produit des jacobiens des deux transformations successives pour passer de (ξ,η) vers (ϕ,θ) et finalement vers (x,y,z).

- Le jacobien de la transformation entre (ϕ,θ) et (x,y,z) est $R^2\cos(\phi)$.
- Le jacobien de la transformation entre (ξ,η) et (ϕ,θ) est l'expression usuelle $\dfrac{\partial\theta}{\partial\xi}\dfrac{\partial\phi}{\partial\eta} - \dfrac{\partial\phi}{\partial\xi}\dfrac{\partial\theta}{\partial\eta}$.

Et voilà :-)