

Ne pas oublier de trouver votre Valentin(e) !



169 : Hubert, Mathis
170 : Istace, Baptiste
171 : Jacob, Mathieu
172 : Jacobs, Francis
173 : Jacquet, Marius
174 : Jánosi, Cyril
175 : Jardinnet, Julien
176 : Javadian, Sara
177 : Jergeay, Emy
178 : Jertila, Emma
179 : Joret, Jonathan
180 : Jossart, Cédric
181 : Junk, Thibaut
182 : Kamto, Leolin
183 : Karam, Elie
184 : Kerkhofs, Emma
185 : Kozadaeva, Viktoriia
186 : Krings, Jonah
187 : Kuypers, Benedicte
188 : Lacoste, Pierre
189 : Lacroix, Siloé
190 : Lafontaine, Jérôme
191 : Langlois, Théo
192 : Larue, Aurélien
193 : Laterre, Baptiste
194 : Laurent, Benoît
195 : Laurent, Pauline
196 : Lebrun, Jérémy

FSA 1 BA (pas de séance :-) (groupe : 94)
FSA 1 BA (Mardi-BA91) (groupe : 5)
FSA 1 BA (Mardi-BA91) (groupe : 9)
FSA 1 BA (Mardi-BA91) (groupe : 6)
FSA 1 BA (pas de séance :-) (groupe : 138)
FSA 1 BA (Mardi-BA91) (groupe : 79)
FSA 1 BA (pas de séance :-) (groupe : 121)
FSA 1 BA (pas de séance :-) (pas de groupe :-)
FSA 1 BA (Mardi-BA91) (groupe : 34)
FSA 1 BA (Mercredi-BA92) (groupe : 61)
MATH1 BA (pas de séance :-) (groupe : 91)
FSA 1 BA (Mardi-BA91) (groupe : 100)
FSA 1 BA (Mercredi-BA92) (groupe : 178)
FSA 1 BA (pas de séance :-) (groupe : 74)
FSA 11BA (pas de séance :-) (pas de groupe :-)
FSA 1 BA (Mercredi-BA92) (groupe : 56)
FSA 1 BA (Mercredi-BA92) (groupe : 67)
FSA 1 BA (pas de séance :-) (groupe : 178)
FSA 1 BA (Mardi-BA91) (groupe : 40)
FSA 1 BA (pas de séance :-) (groupe : 145)
FSA 1 BA (Mardi-BA91) (groupe : 162)
FSA 1 BA (Mardi-BA91) (groupe : 39)
FSA 1 BA (pas de séance :-) (groupe : 64)
FSA 1 BA (Jeudi-BA91) (groupe : 146)
FSA 1 BA (Mercredi-BA92) (groupe : 110)
FSA 1 BA (pas de séance :-) (groupe : 174)
FSA 1 BA (Mardi-BA91) (groupe : 130)
FSA 1 BA (Jeudi-BA91) (groupe : 148)

**Plus sérieusement,
Depuis mercredi, il est possible de rester célibataire !**

Typical Elliptic Boundary Value Problem

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_s$ tel que

$$\nabla \cdot (a \nabla u) + f = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\mathbf{n} \cdot (a \nabla u) = g, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N,$$

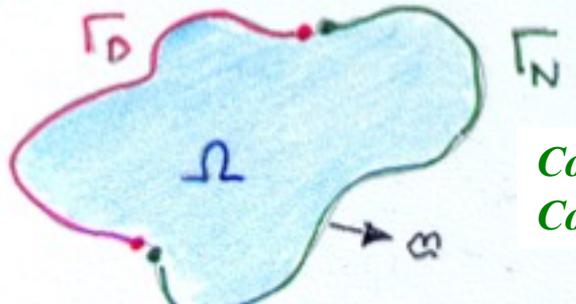
$$u = t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D,$$

En général, la fonction \mathbf{n} n'est pas connue...

Mais, c'est la solution d'une équation aux dérivées partielles !

Commençons par une équation de Poisson

Conditions essentielles
Conditions de Dirichlet



Conditions naturelles
Conditions de Neumann

Some nice spaces and notations...

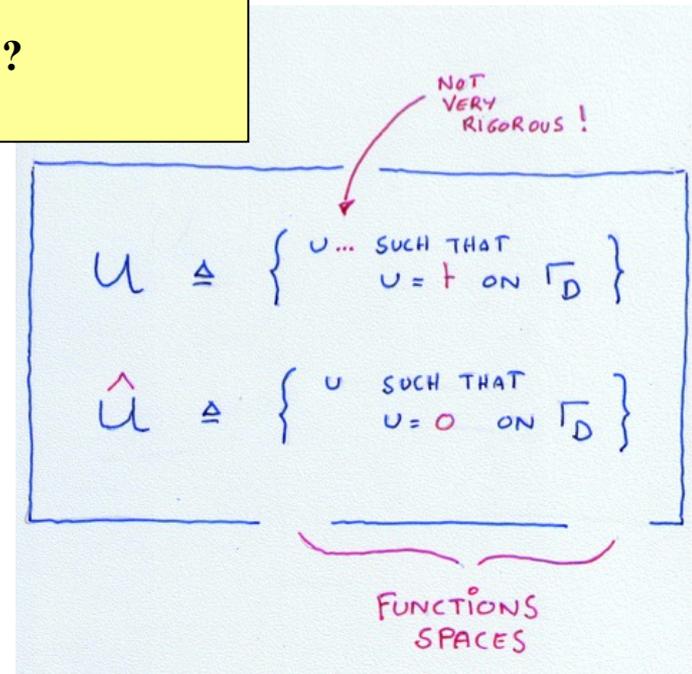
Ne faisons pas comme les mathématiciens...
On ne va pas être rigoureux maintenant !
On fera cela plus tard...
D'ailleurs, est-ce que cela est utile ?
Et pourtant, oui !

$$\langle f g \rangle = \int_{\Omega} f g \, d\Omega,$$

$$\langle\langle f g \rangle\rangle = \int_{\partial\Omega} f g \, ds,$$

$$\langle\langle f g \rangle\rangle_N = \int_{\Gamma_N} f g \, ds,$$

$$\langle\langle f g \rangle\rangle_D = \int_{\Gamma_D} f g \, ds.$$



... to do calculus !

TIP #1
 $(fg)' = fg' + f'g$
 INTEGRAL BY PARTS

$$\langle \hat{u} \cdot \nabla \cdot (a \nabla u) \rangle = \langle \nabla \cdot (\hat{u} a \nabla u) \rangle - \langle (\nabla \hat{u}) \cdot (a \nabla u) \rangle$$

$\in \hat{u}$ (pointing to \hat{u})
 $\in u$ (pointing to ∇u)

TIP #2
 DIVERGENCE'S THEOREM
 $\langle \nabla \cdot a \rangle = \ll \mathfrak{M} \cdot a \gg$

$$= \ll \mathfrak{M} \cdot (a \nabla u) \hat{u} \gg$$

TIP #3
 BY DEFINITION
 OF \hat{u}

$$= \ll \underbrace{\mathfrak{M} \cdot (a \nabla u)}_{g \text{ on } \Gamma_N!} \hat{u} \gg_N$$



? u SUCH THAT

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (a \nabla u) + f &= 0 && \text{IN } \Omega \\ \mathfrak{B} \cdot (a \nabla u) &= g && \text{ON } \Gamma_N \\ u &= t && \text{ON } \Gamma_D \end{aligned}$$

STRONG FORMULATION

WEAK FORMULATION



? $u \in U$ SUCH THAT

$$\underbrace{\langle \nabla \hat{u} \cdot a \nabla u \rangle}_{a(\hat{u}, u)} = \underbrace{\langle f \hat{u} \rangle + \llbracket g \hat{u} \rrbracket_N}_{b(\hat{u})} \quad \forall \hat{u} \in \hat{U}$$

MINIMIZATION PROBLEM



? u SUCH THAT $\mathcal{J}(u) = \min_{v \in U} \underbrace{\left(\frac{1}{2} a(v, v) - b(v) \right)}_{\mathcal{J}(v)}$





WEAK
OF VARIATIONAL
FORMULATION

$u \in U$
AND MINIMIZES
 J

$\epsilon \in \mathbb{R}$

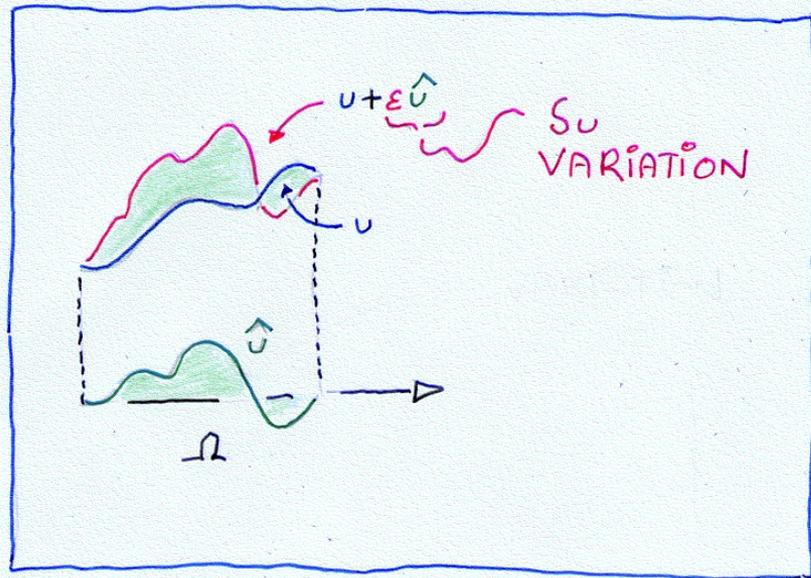
VARIATION
 $\in \hat{U}$

$$\left. \frac{dJ(u + \epsilon \hat{u})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad \forall \hat{u} \in \hat{U}$$

FUNCTIONAL

$$SJ(u) = 0$$

VARIATIONAL CALCULUS



$$\begin{aligned}
 J(u + \varepsilon \hat{u}) &= \frac{1}{2} \langle \nabla_{\underline{u}} \cdot a \nabla_{\underline{u}} u \rangle + \varepsilon \langle \nabla_{\underline{u}} \cdot a \nabla_{\underline{u}} \hat{u} \rangle + \frac{\varepsilon^2}{2} \langle \nabla_{\underline{\hat{u}}} \cdot a \nabla_{\underline{\hat{u}}} \hat{u} \rangle \\
 &\quad - \langle f u \rangle \quad - \varepsilon \langle f \hat{u} \rangle \\
 &\quad - \ll g u \gg_N \quad - \varepsilon \ll g \hat{u} \gg_N
 \end{aligned}$$

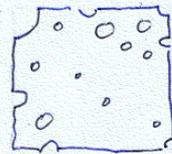
$\underbrace{\hspace{10em}}_{J(u)}$

$\overbrace{\hspace{10em}}^{g(\varepsilon)}$

$$\left. \frac{dJ(u + \varepsilon \hat{u})}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \langle \nabla_{\underline{u}} \cdot a \nabla_{\underline{u}} \hat{u} \rangle - \langle f \hat{u} \rangle - \ll g \hat{u} \gg_N$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$$

$$\sqrt{\hat{u}} \in \hat{u}$$



$\langle \nabla_{\underline{u}} \cdot a \nabla_{\underline{u}} \hat{u} \rangle - \langle f \hat{u} \rangle - \ll g \hat{u} \gg_N$

FINITE ELEMENT = VARIATIONAL METHOD

$$\begin{aligned} &? v^h \in U^h \\ &a(v^h, \hat{v}^h) = b(\hat{v}^h) \quad \forall \hat{v}^h \in \hat{U}^h \end{aligned}$$

GALERKIN
METHOD



$$\begin{aligned} &? v^h \in U^h \\ &J(v^h) = \min_{v^h \in U^h} \underbrace{\frac{1}{2} a(v^h, v^h) - b(v^h)}_{J(v^h)} \end{aligned}$$

RITZ
METHOD

DISCRETE FORM.

DISCRETE FORMULATION = LINEAR SYSTEM !

$$\begin{aligned} J(u^h) &= \frac{1}{2} \left\langle \underbrace{\sum_i U_i \nabla \tau_i}_{\nabla u^h} \cdot \sum_j U_j \nabla \tau_j \right\rangle - \left\langle f \sum_i U_i \tau_i \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j U_i U_j \underbrace{\langle \nabla \tau_i \cdot \nabla \tau_j \rangle}_{A_{ij}} - \sum_i U_i \underbrace{\langle f \tau_i \rangle}_{B_i} \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial J(u^h)}{\partial U_i}$$

$$\sum_{j=1}^m A_{ij} U_j = B_i$$

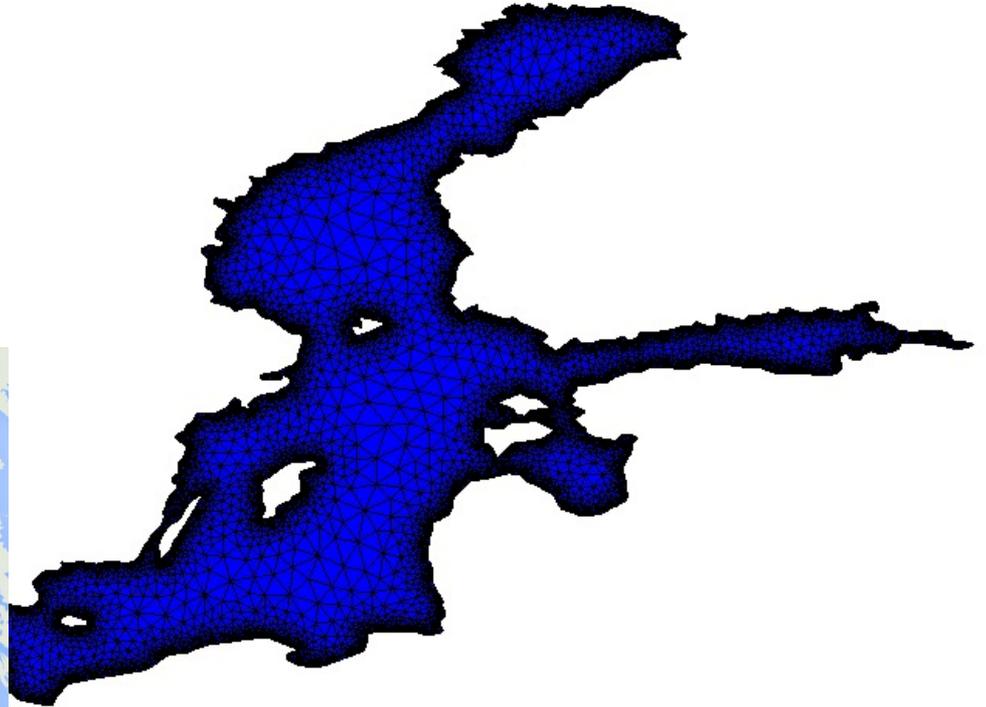
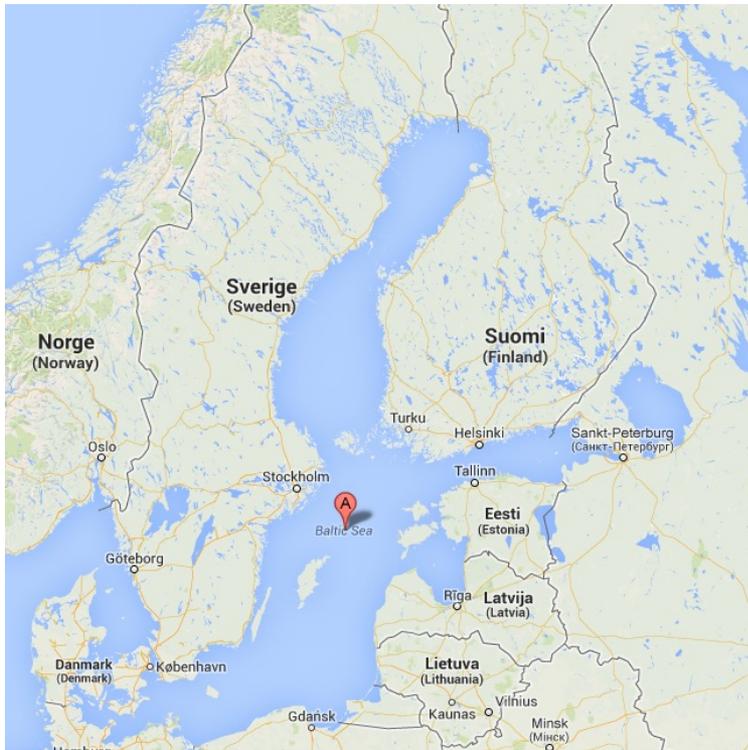
ASSUME
 $a=1$
 $g=0$



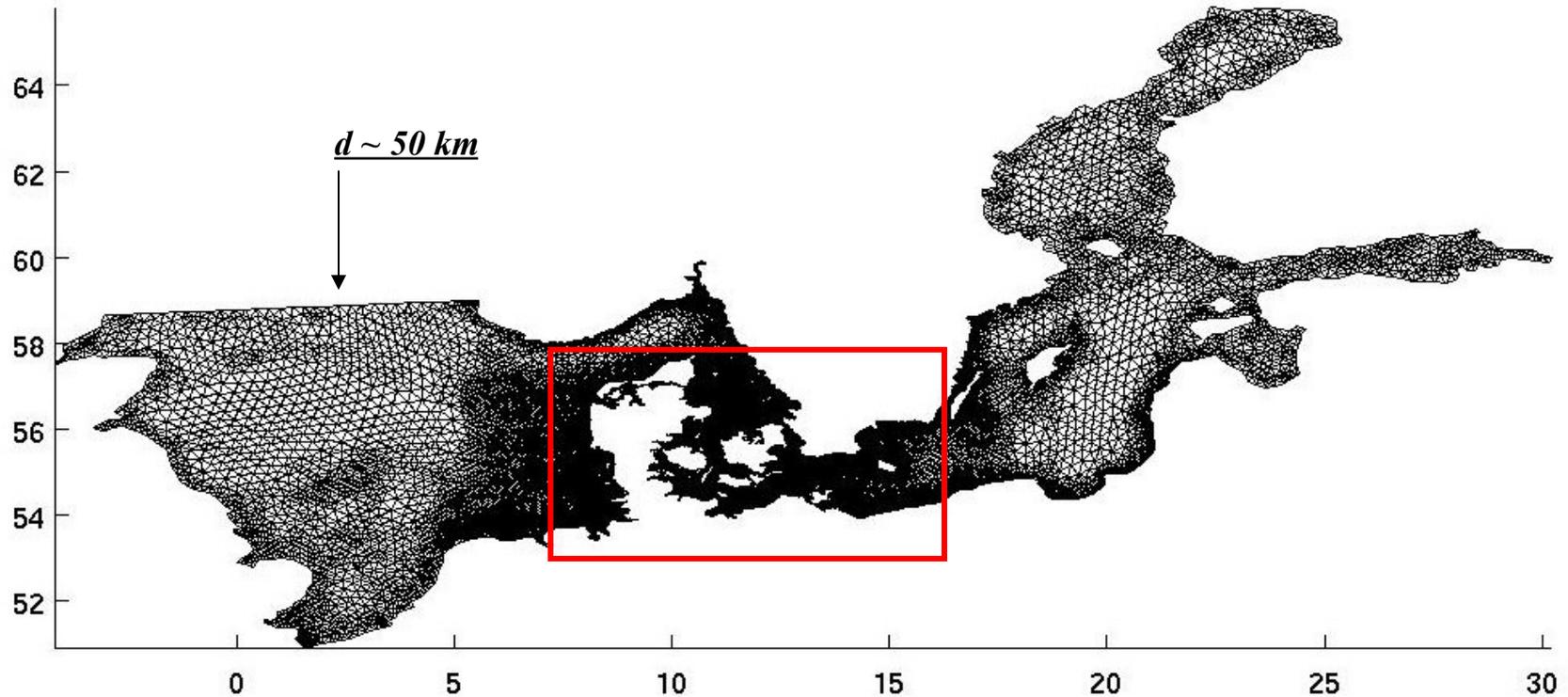
meca1120-cours2.ppt

Quelle est le volume d'eau
de cette mer ?

Et d'ailleurs, c'est quelle mer ?

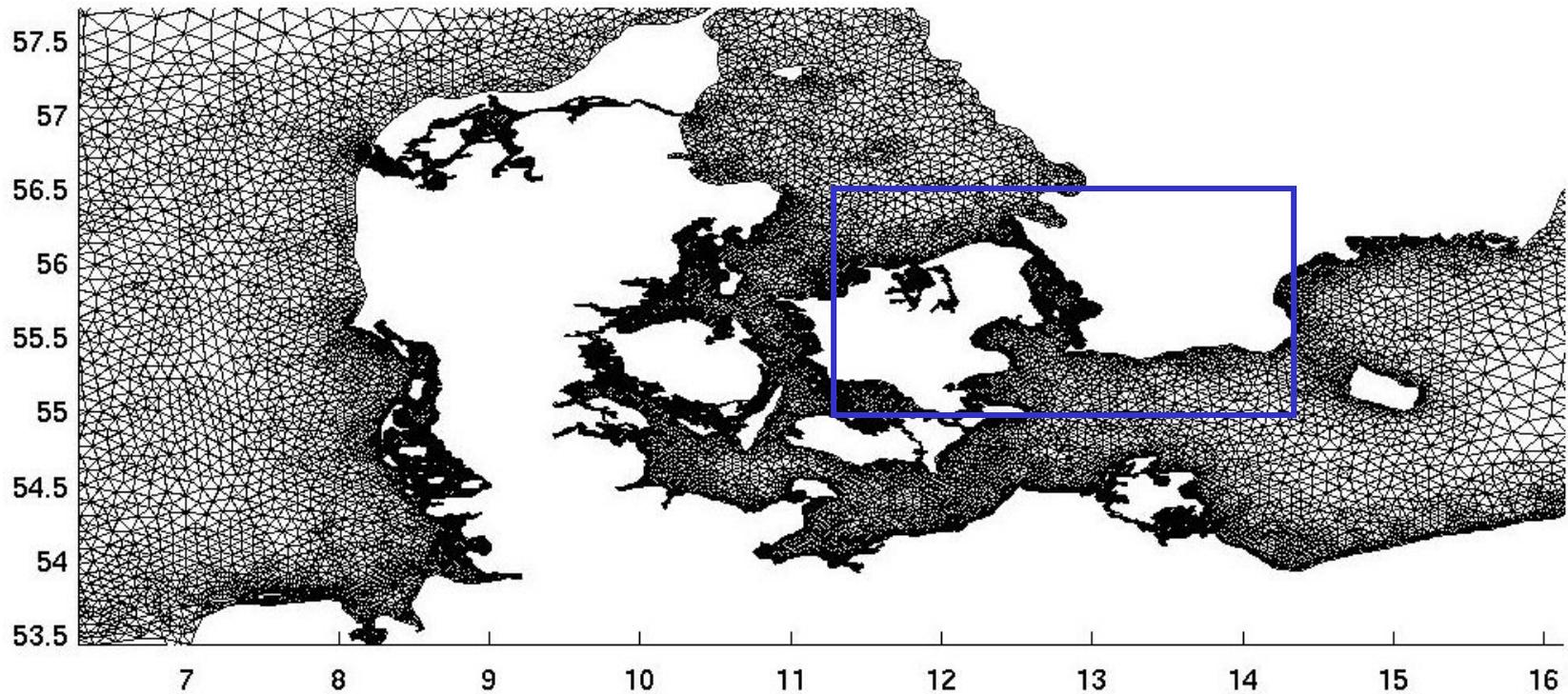


Pourquoi des maillages non structurés ?



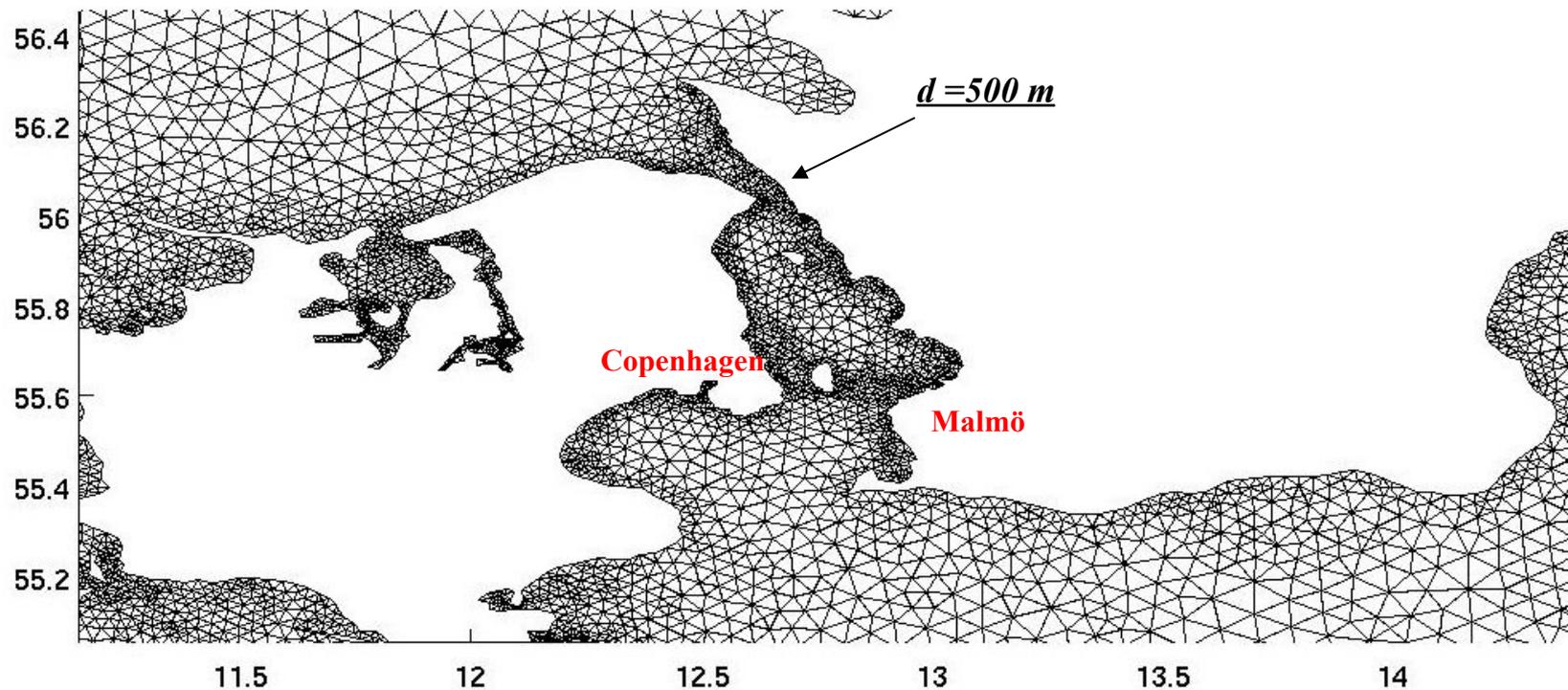
Courtesy of Dr. N. Kliem

Pourquoi des maillages non structurés ?

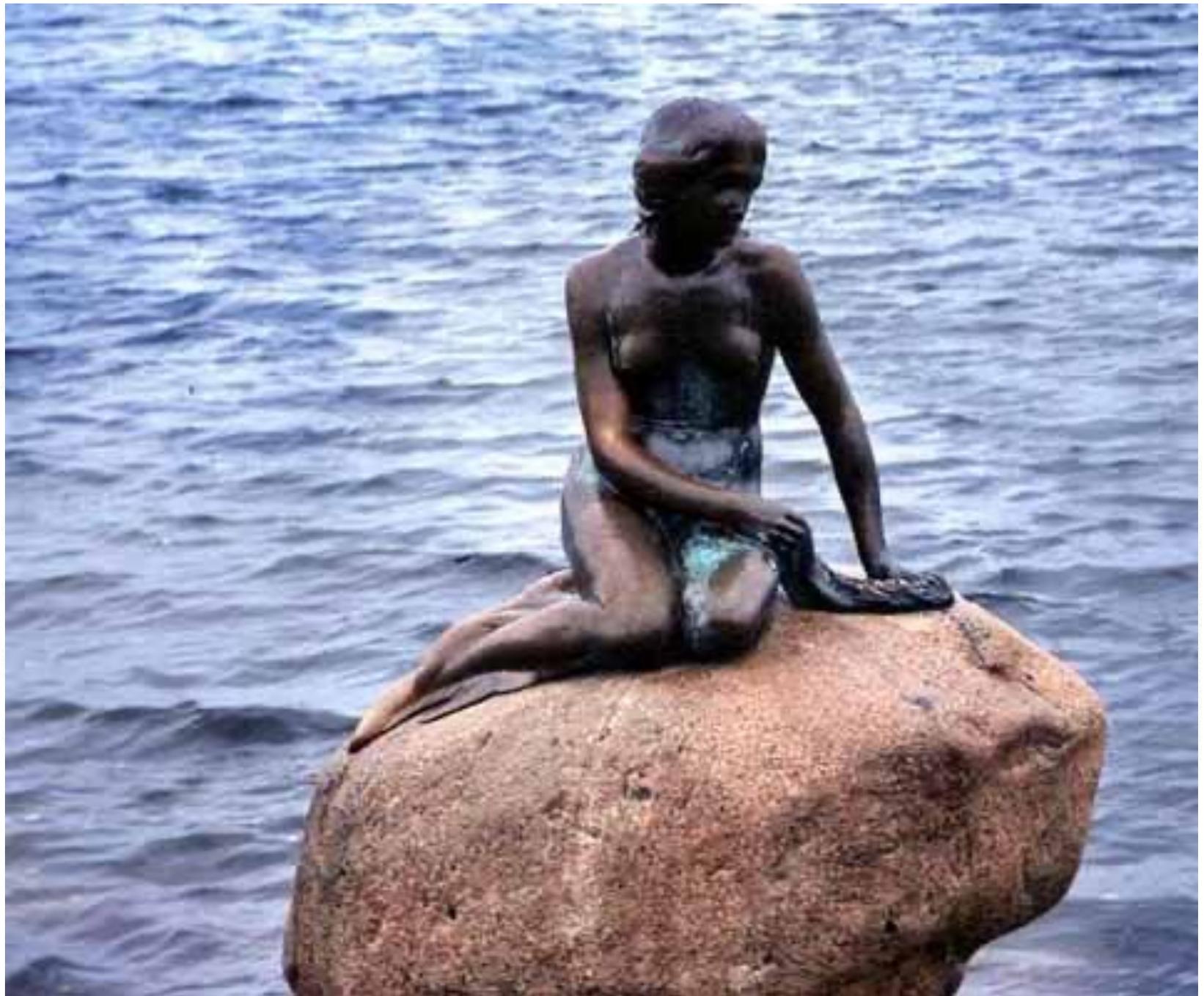


Courtesy of Dr. N. Kliem

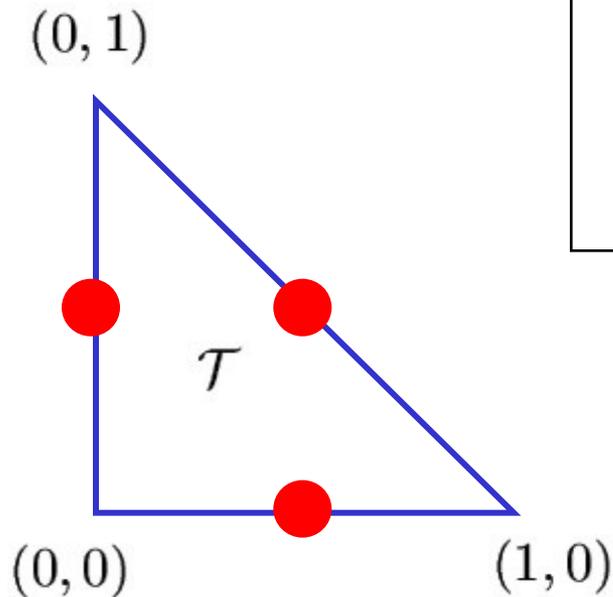
Pourquoi des maillages non structurés ?



Courtesy of Dr. N. Kliem



Intégration sur un triangle : Règle de Hammer à 3 points



$$\underbrace{\int_{\mathcal{T}} f(x,y) dx dy}_I \approx \underbrace{\sum_{k=1}^3 w_k f(X_k, Y_k)}_{I^h}$$

	X_k	Y_k	w_k
1	0.5	0.0	1/6
2	0.5	0.5	1/6
3	0.0	0.5	1/6

Démontrer que la formule de Hammer à trois points permet d'intégrer exactement n'importe quel polynôme à deux variables de degré deux : $a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$

Question

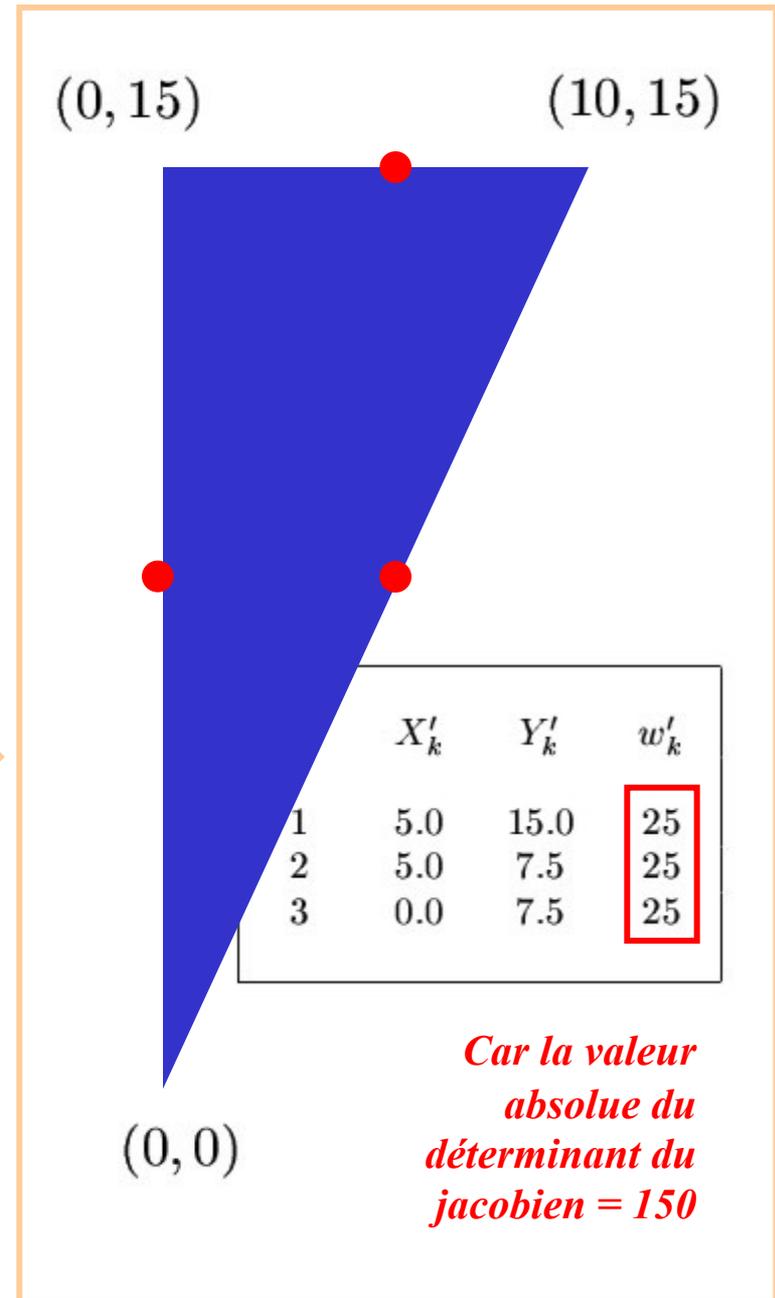
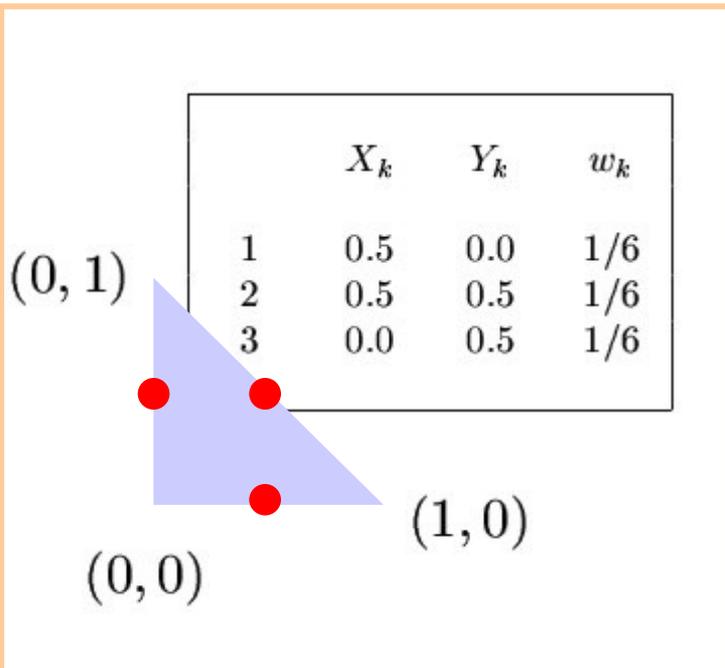
$$\begin{aligned}
 I &= \frac{a}{2} + b \int_0^1 x \int_0^{1-x} dy dx + c \int_0^1 y \int_0^{1-y} dx dy \\
 &\quad + d \int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} dy dx + e \int_0^1 y^2 \int_0^{1-y} dx dy + f \int_0^1 x \int_0^{1-x} y dy dx \\
 &= \frac{a}{2} + b \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + c \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 \\
 &\quad + d \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 + e \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 + f \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} \right]_0^1 \\
 &= \frac{a}{2} + \frac{b}{6} + \frac{c}{6} + \frac{d}{12} + \frac{e}{12} + \frac{f}{24} \\
 &= I^h
 \end{aligned}$$



**Degré de
précision**

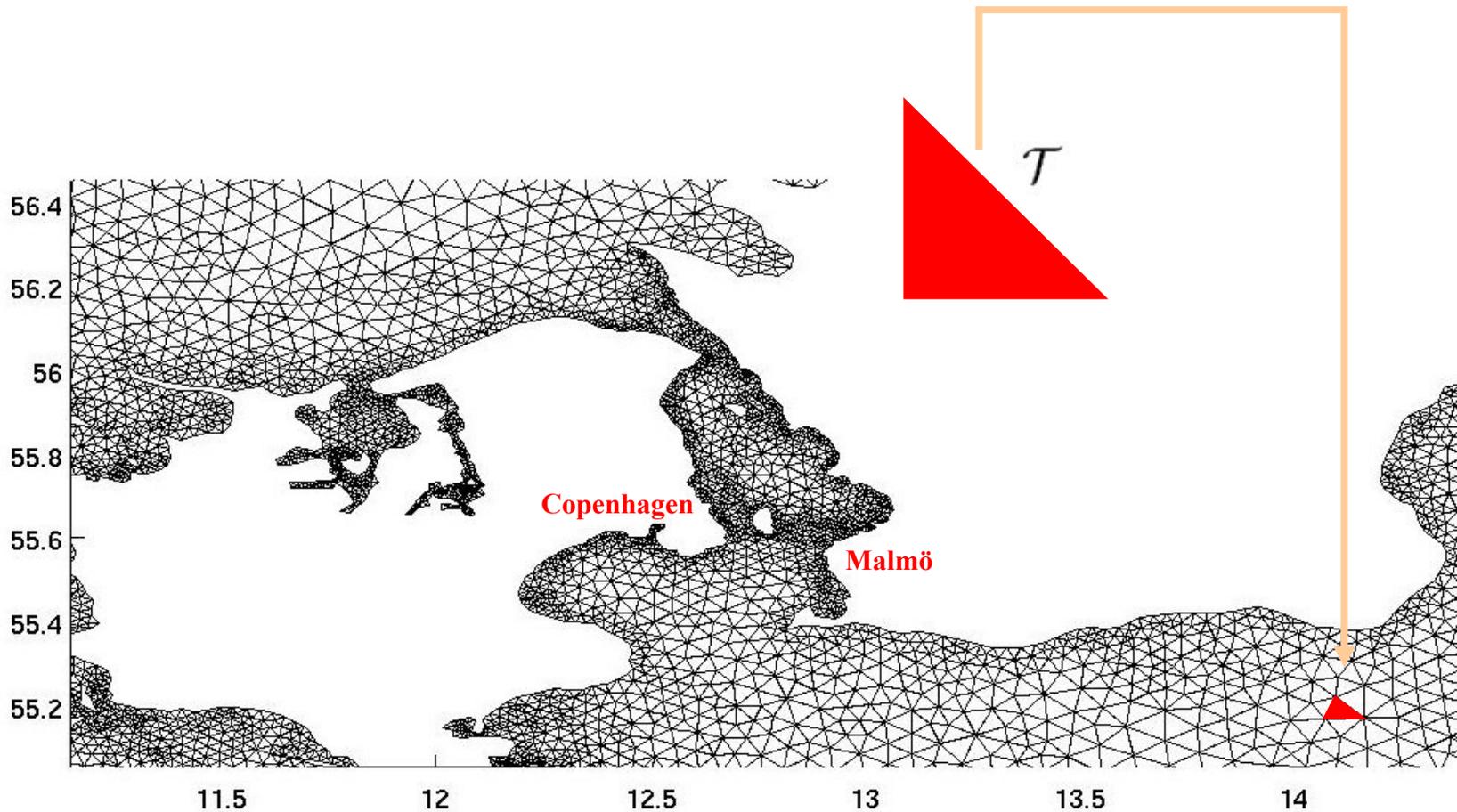
Et un autre triangle ?

$$\begin{aligned}x' &= 10x \\ y' &= 15 - 15y\end{aligned}$$

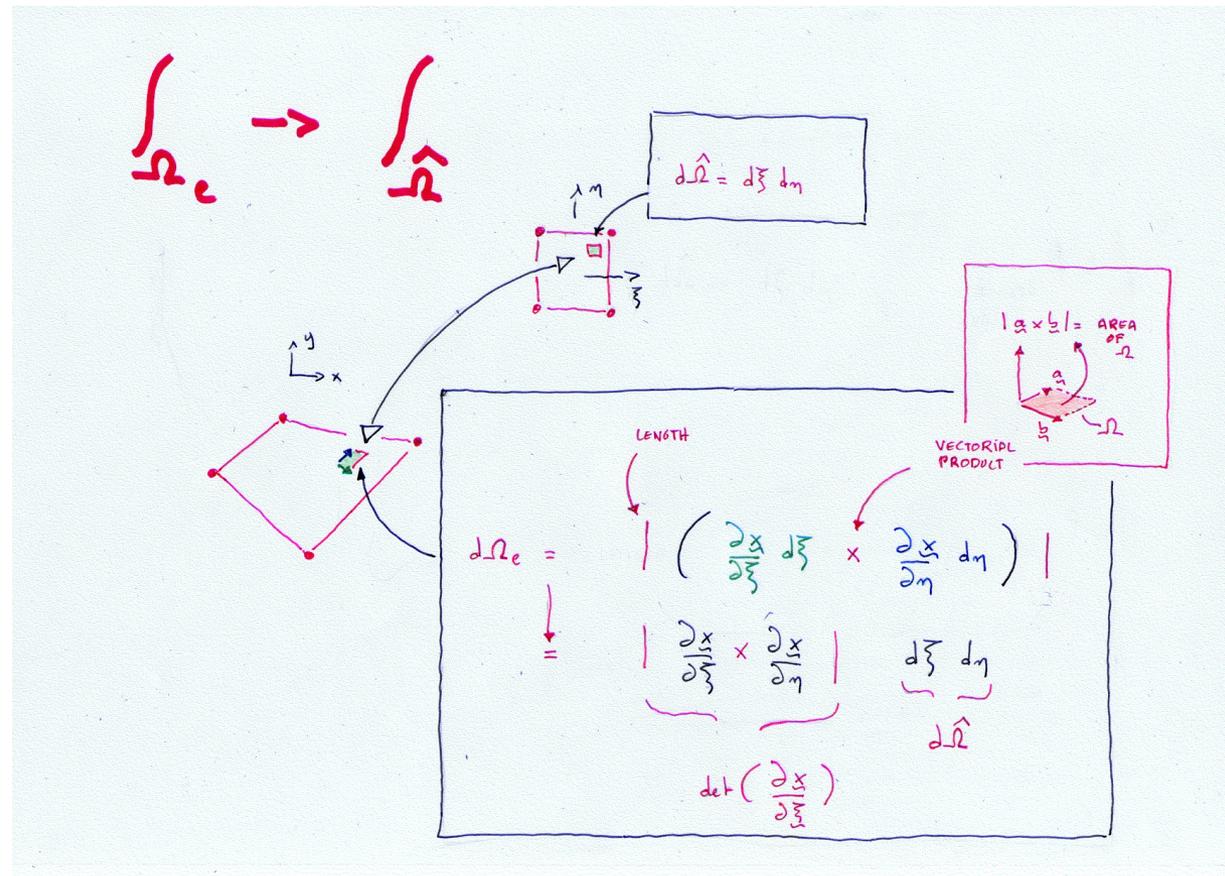
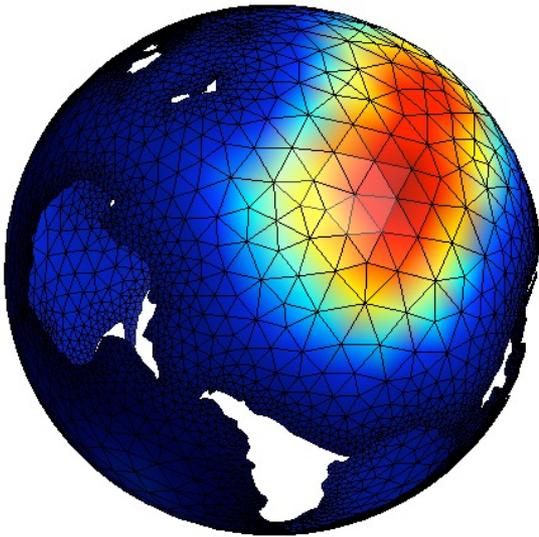


Application to Finite Elements

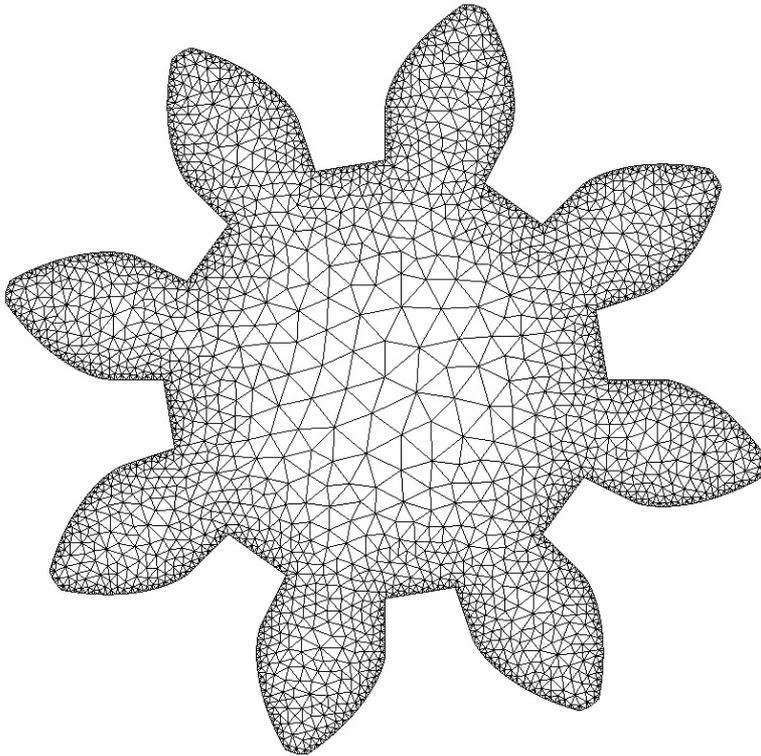
*Each triangle can be transformed in
the parent element through a linear
transformation.*



Intégrer sur un élément quelconque...



Définir un maillage

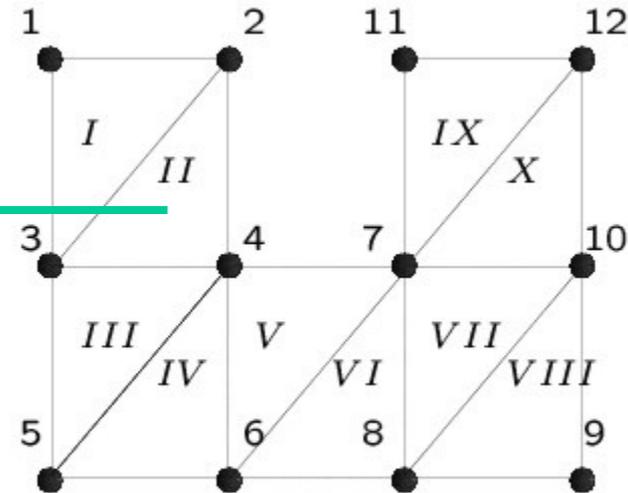


Coordonnées de noeuds
Tableau d'appartenance des triangles
Nombre de noeuds : nNode
Nombre de triangles : nElem

```
typedef struct  
{  
    int *elem;  
    double *X;  
    double *Y;  
    int nElem;  
    int nNode;  
} femMesh;
```

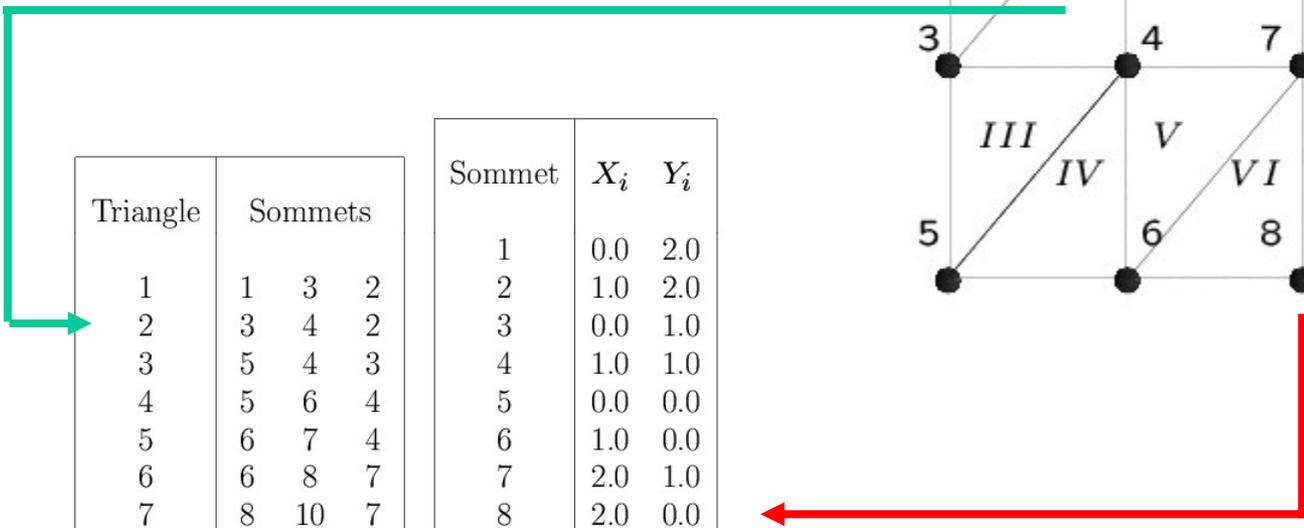
$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_1} \{\bar{\Omega}_e\}, \quad \Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset, \quad \text{si } e \neq f.$$

Et concrètement
c'est quoi
un maillage ?



Triangle	Sommets		
1	1	3	2
2	3	4	2
3	5	4	3
4	5	6	4
5	6	7	4
6	6	8	7
7	8	10	7
8	8	9	10
9	7	12	11
10	10	12	7

Sommet	X_i	Y_i
1	0.0	2.0
2	1.0	2.0
3	0.0	1.0
4	1.0	1.0
5	0.0	0.0
6	1.0	0.0
7	2.0	1.0
8	2.0	0.0
9	3.0	0.0
10	3.0	1.0
11	2.0	2.0
12	3.0	2.0



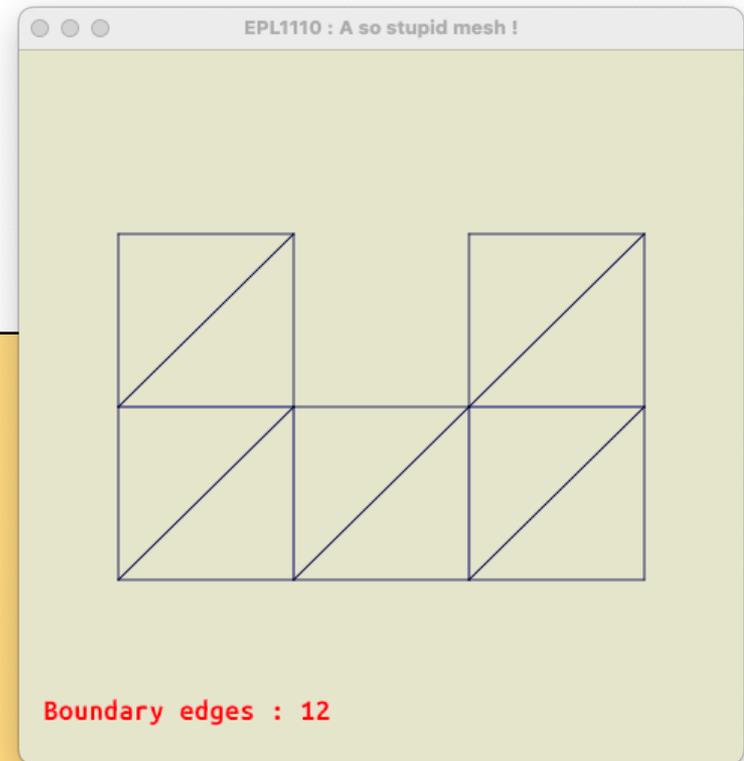
Et vraiment concrètement ?

Number of nodes 12

0 :	0.0000000e+00	2.0000000e+00
1 :	1.0000000e+00	2.0000000e+00
2 :	0.0000000e+00	1.0000000e+00
3 :	1.0000000e+00	1.0000000e+00
4 :	0.0000000e+00	0.0000000e+00
5 :	1.0000000e+00	0.0000000e+00
6 :	2.0000000e+00	1.0000000e+00
7 :	2.0000000e+00	0.0000000e+00
8 :	3.0000000e+00	0.0000000e+00
9 :	3.0000000e+00	1.0000000e+00
10 :	2.0000000e+00	2.0000000e+00
11 :	3.0000000e+00	2.0000000e+00

Number of triangles 10

0 :	0	2	1
1 :	2	3	1
2 :	4	3	2
3 :	4	5	3
4 :	5	6	3
5 :	5	7	6
6 :	7	9	6
7 :	7	8	9
8 :	6	11	10
9 :	9	11	6

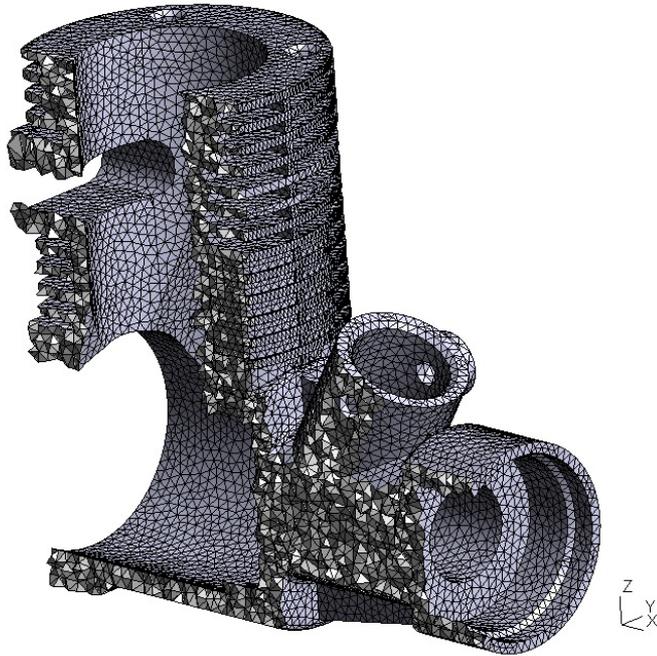


**Il existe des algorithmes pour générer
automatiquement les maillages.**

Voir cours de géométrie numérique MECA2170

<http://www.geuz.org/gmsh/>

Définir localement une fonction sur un maillage



Fonctions de base
spécifiées a priori

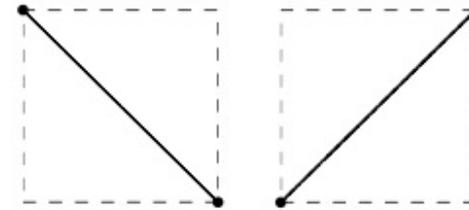
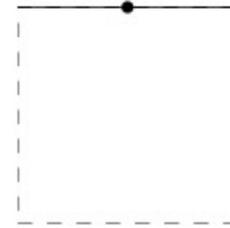
$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n U_j \tau_j(\mathbf{x})$$

Valeurs nodales inconnues

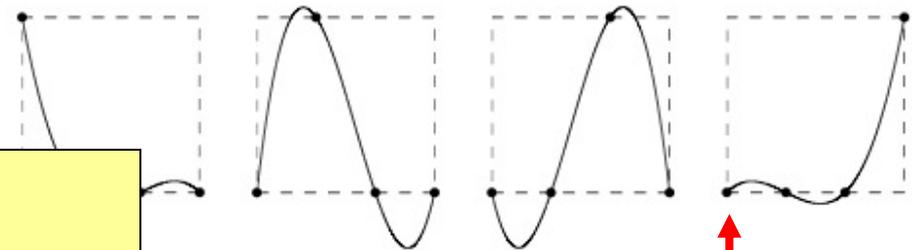
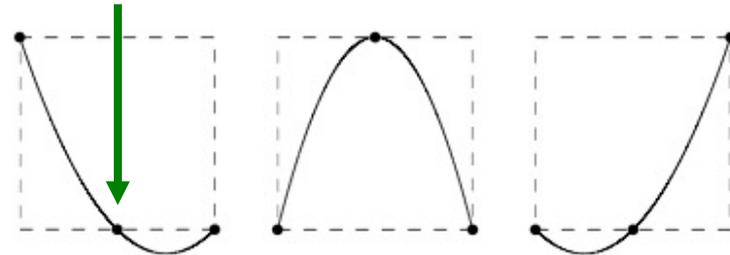
The problem geometry is divided in small finite elements.

On each element, the solution is approximated
by means of unknown nodal values and given polynomials

Fonctions de forme unidimensionnelles de Lagrange



Ce nœud n'est pas un sommet



Sommet

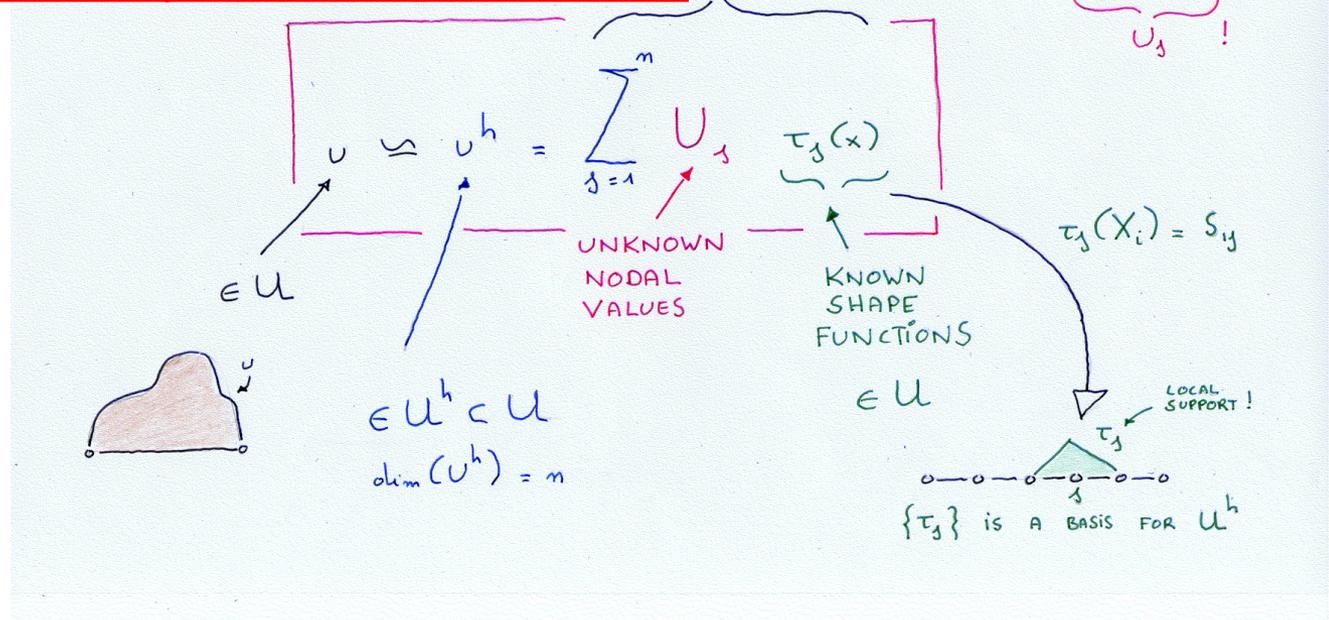
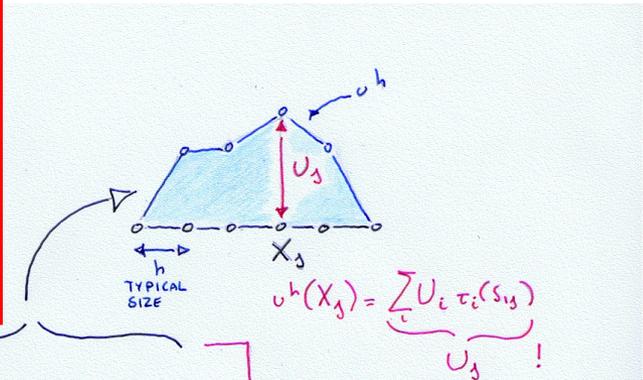
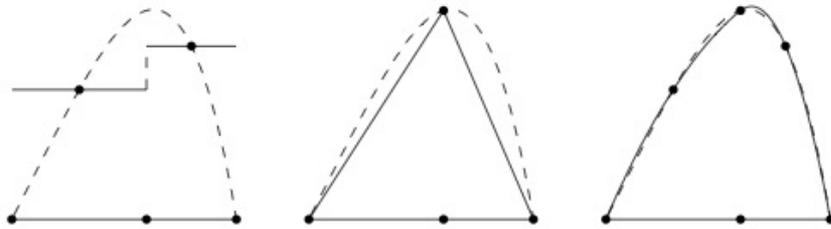
Nodes and other nodes :-)

Nodes of the meshes = vertices

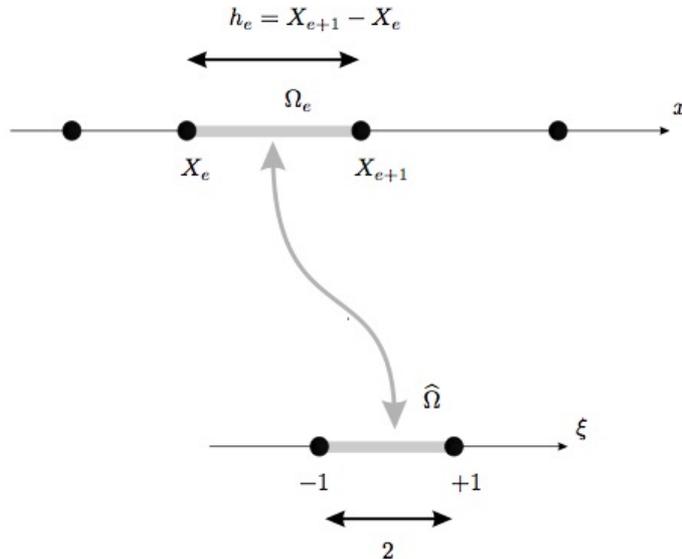
Location of nodal values = nodes

For linear piecewise interpolation, all nodes are vertices

En une dimension...



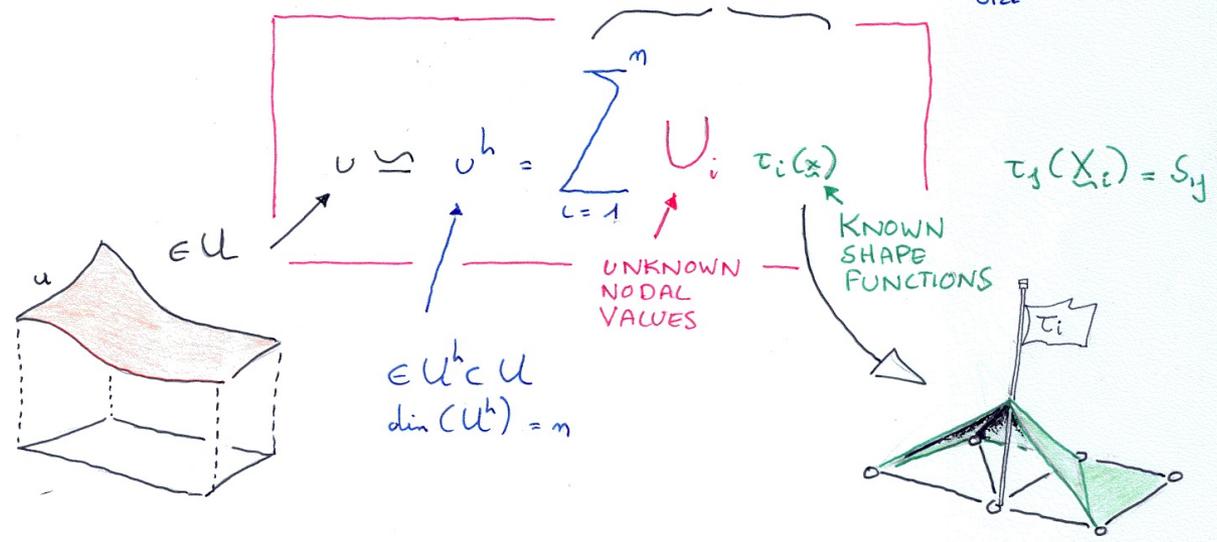
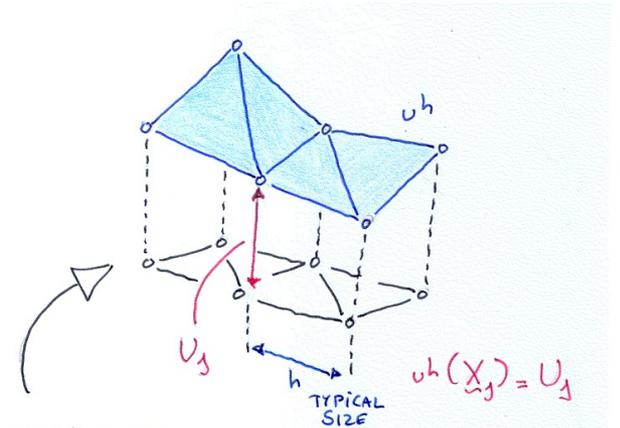
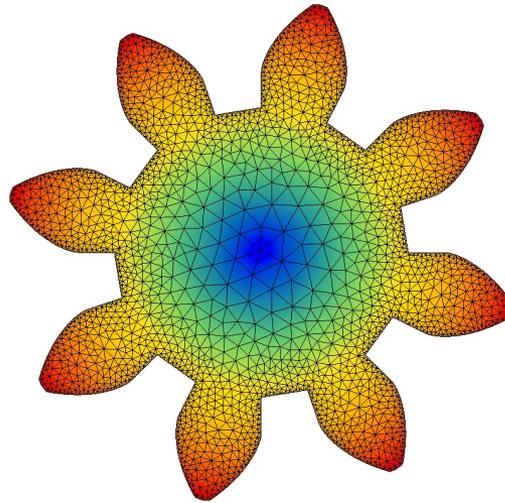
Un élément parent (template) pour définir les fonctions de forme



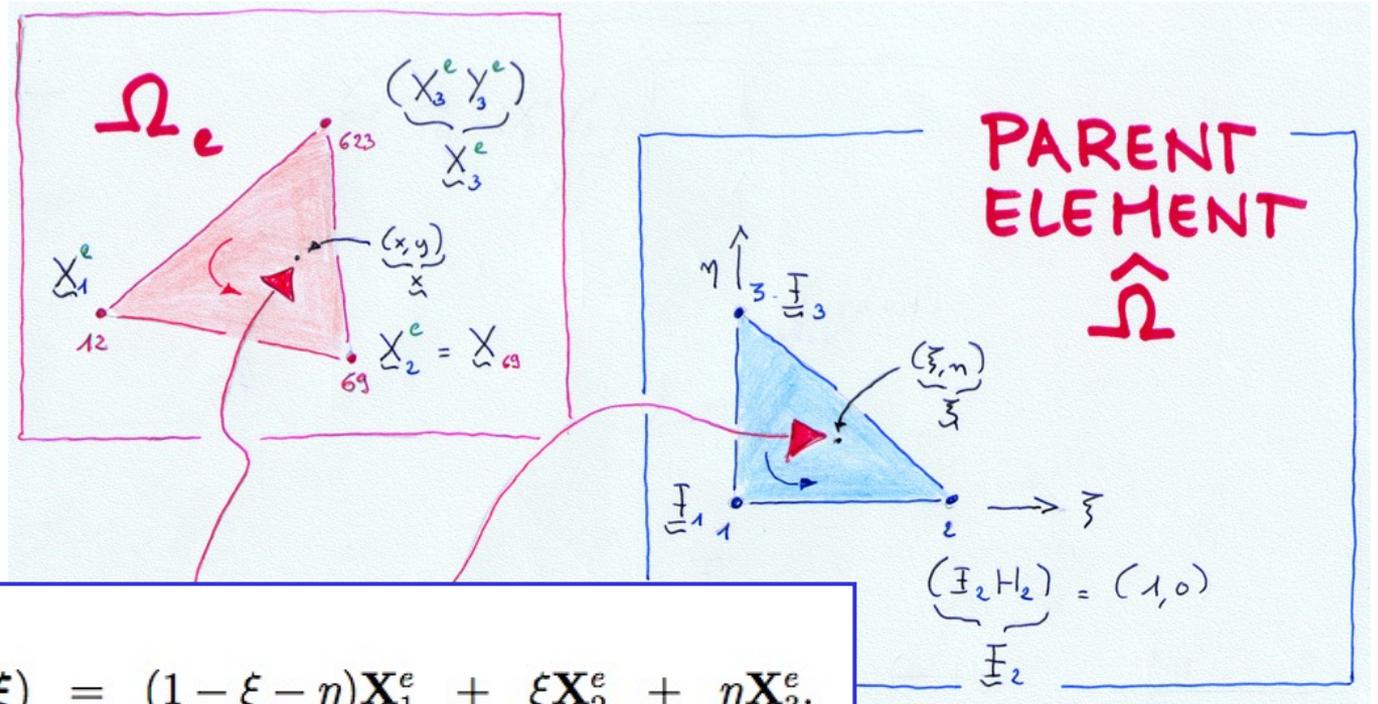
$$x(\xi) = \xi \frac{(X_{e+1} - X_e)}{2} + \frac{(X_{e+1} + X_e)}{2},$$
$$\xi(x) = \frac{2x - (X_{e+1} + X_e)}{(X_{e+1} - X_e)}.$$

**Isomorphisme linéaire entre l'élément parent
et tous les autres éléments...**

En deux dimensions



Un triangle parent pour définir toutes les fonctions de forme



Isomorphisme linéaire entre le triangle parent et tous les autres triangles...

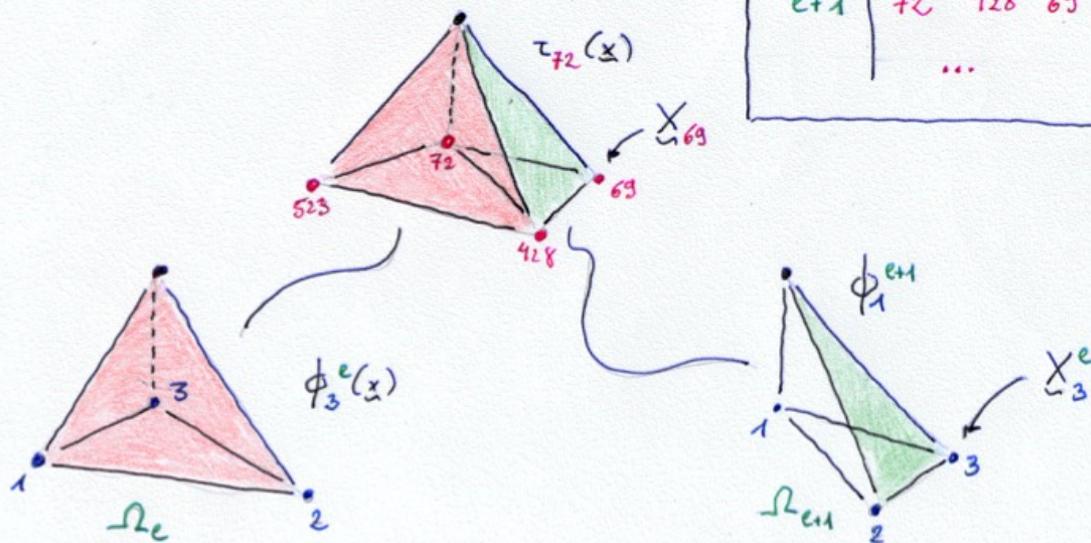
Global shape functions...

$$\tau_{72}(x) = \phi_3^e(x)$$

GLOBAL LABEL \rightarrow τ_{72}
 ONLY ON Ω_e
 ELEMENT INDEX \rightarrow e
 LOCAL LABEL \rightarrow 3

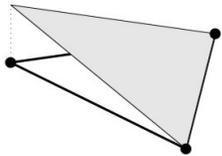
	Indice local de noeud i
Indice d'éléments e	Indice global de noeud j

	1	2	3
e	523	428	72
$e+1$	72	428	69
	...		



... and local shape functions

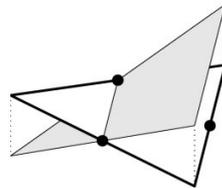
Fonctions de forme usuelles sur le triangle parent



$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi - \eta), \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \xi, \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \eta.\end{aligned}$$

Fonctions linéaire continue : P₁-C₀

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= 1 - 2\eta, \\ \phi_2(\xi, \eta) &= -1 + 2(\xi + \eta), \\ \phi_3(\xi, \eta) &= 1 - 2\xi.\end{aligned}$$



Fonctions linéaire non-conforme : P₁-C₋₁

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= 1 - 3(\xi + \eta) + 2(\xi + \eta)^2, \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \xi(2\xi - 1), \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \eta(2\eta - 1), \\ \phi_4(\xi, \eta) &= 4\xi(1 - \xi - \eta), \\ \phi_5(\xi, \eta) &= 4\xi\eta, \\ \phi_6(\xi, \eta) &= 4\eta(1 - \xi - \eta).\end{aligned}$$

Fonctions quadratique continue : P₂-C₀

Il s'agit de fonctions polynomiales définies sur chaque élément

En fonction du choix des fonctions de base, le degré de continuité est différent...

En général, on essaie d'avoir le degré de continuité le plus élevé...

Quoique... on aura quelques surprises !

Le triangle semble optimal pour obtenir des approximations polynomiales complètes...

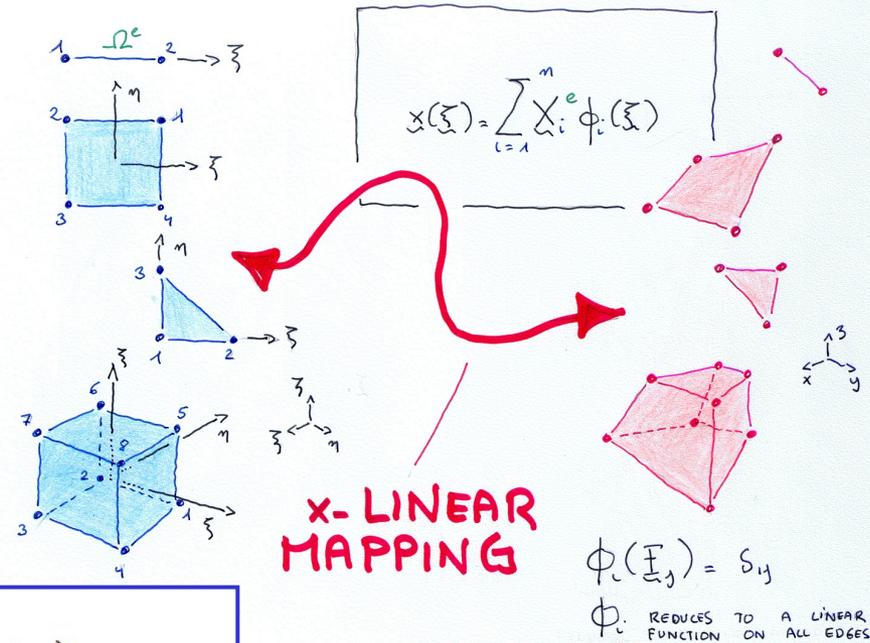
Triangle de Pascal

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & 0 \\ & & & & \xi & & \eta & 1 \\ & & \xi^2 & & \xi\eta & & \eta^2 & 2 \\ \xi^3 & & \xi^2\eta & & \xi\eta^2 & & \eta^3 & 3 \end{array}$$

Une des caractéristiques des éléments triangulaires est la possibilité de construire un ensemble de fonctions de forme complètes sur le triangle parent avec un nombre optimal de degrés de liberté.

... et pourtant !

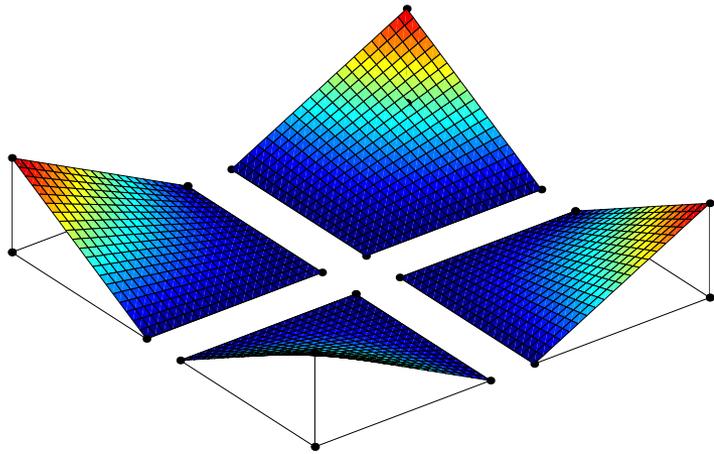
Et pourtant, on a aussi des maillages de quadrilatères, d'hexaèdres...



$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4} \mathbf{X}_1^e + \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{4} \mathbf{X}_2^e + \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4} \mathbf{X}_3^e + \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4} \mathbf{X}_4^e.$$

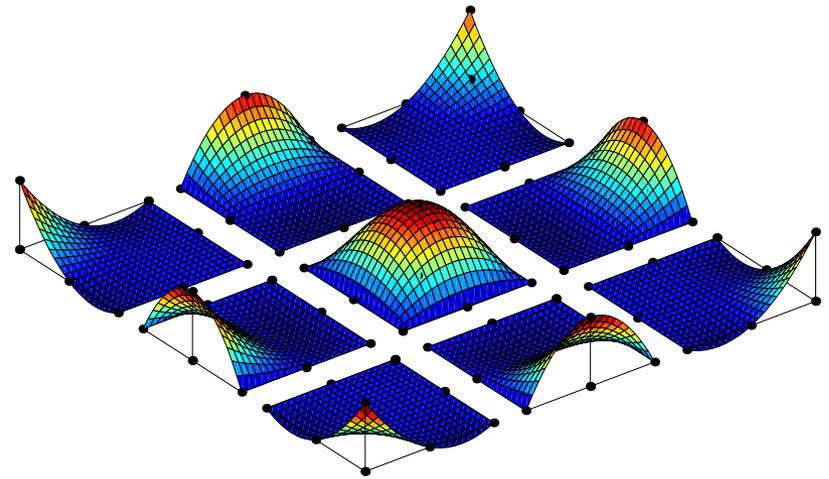
Isomorphisme bilinéaire (non linéaire donc !) entre le carré parent et tous les autres quadrilatères

Eléments bilinéaires et biquadratiques



$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4, \\ \phi_2(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4, \\ \phi_3(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4, \\ \phi_4(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4.\end{aligned}$$

Elément Q_1-C_0



$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= \xi(1 + \xi)\eta(1 + \eta)/4, \\ \phi_2(\xi, \eta) &= -\xi(1 - \xi)\eta(1 + \eta)/4, \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \xi(1 - \xi)\eta(1 - \eta)/4, \\ \phi_4(\xi, \eta) &= -\xi(1 + \xi)\eta(1 - \eta)/4, \\ \phi_5(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \xi)\eta(1 + \eta)/2, \\ \phi_6(\xi, \eta) &= -\xi(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)/2, \\ \phi_7(\xi, \eta) &= -(1 - \xi)(1 + \xi)\eta(1 - \eta)/2, \\ \phi_8(\xi, \eta) &= \xi(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)/2, \\ \phi_9(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \eta).\end{aligned}$$

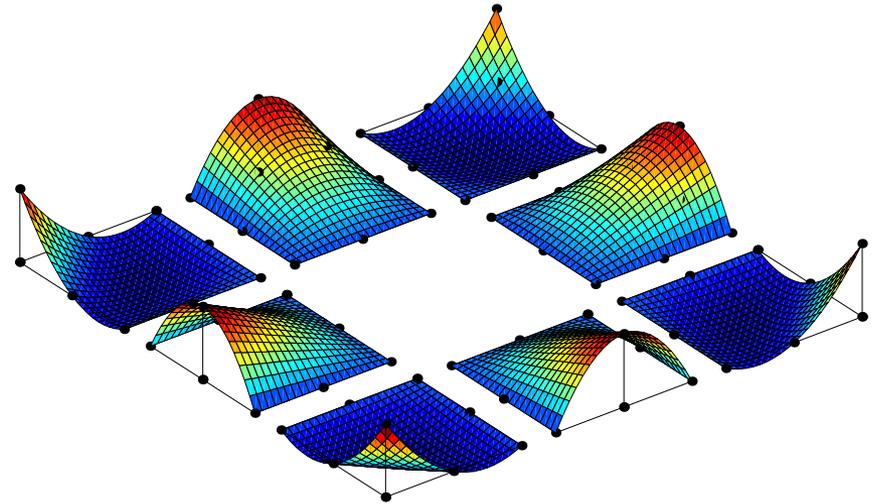
Elément Q_2-C_0

Elle sert à rien
la neuvième
fonction ?

		1			0
	ξ		η		1
ξ^2		$\xi\eta$		η^2	2
	$\xi^2\eta$		$\xi\eta^2$		3
		$\xi^2\eta^2$			4

Lagrange

La neuvième fonction de Q_2-C_0
génère un terme d'ordre quatre
alors qu'on n'est même pas
complet à l'ordre 3 :-)



$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta)(\eta + \xi - 1)/4, \\ \phi_2(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta)(\eta - \xi - 1)/4, \\ \phi_3(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta)(-\eta - \xi - 1)/4, \\ \phi_4(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta)(-\eta + \xi - 1)/4, \\ \phi_5(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \xi)(1 + \eta)/2, \\ \phi_6(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta)/2, \\ \phi_7(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \xi)(1 - \eta)/2, \\ \phi_8(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \eta)/2.\end{aligned}$$

Élément de Serendip : S_2-C_0

L'erreur de Serendip !

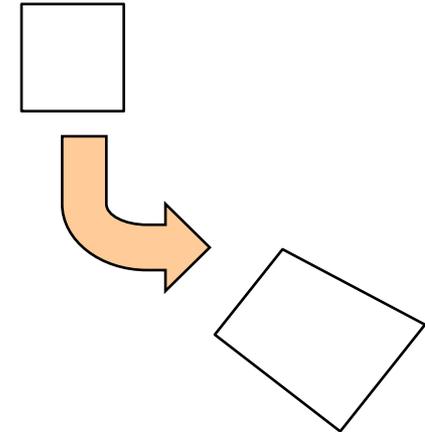
La démonstration du recteur :-)

L'élément de Serendip (8 nœuds) et celui de Lagrange (9 nœuds) sont complets à l'ordre deux sur le carré parent

$$a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2,$$



$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}\mathbf{x}_1^e + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}\mathbf{x}_2^e + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}\mathbf{x}_3^e + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}\mathbf{x}_4^e.$$



$$b_1 + b_2x(\xi, \eta) + b_3y(\xi, \eta) + b_4x(\xi, \eta)y(\xi, \eta) + b_5x^2(\xi, \eta) + b_6y^2(\xi, \eta),$$

$$c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta + c_5\xi^2 + c_6\eta^2 + c_7\xi\eta^2 + c_8\eta\xi^2 + c_9\eta^2\xi^2.$$

L'élément de Serendip (8 nœuds) **n'est pas complet** à l'ordre deux sur un quadrilatère quelconque.
L'élément de Lagrange (9 nœuds) est complet à l'ordre deux sur un quadrilatère quelconque.