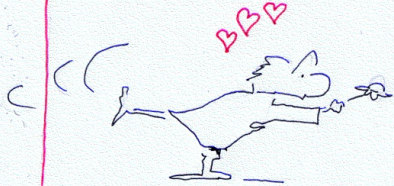


PROBLÈME  
ELLIPTIQUE



ELEMENTS  
FINIS \*



\* USUAL FEM "  
CLASSICAL  
GALERKIN  
FORMULATION

Un peu de mathématiques  
pour les éléments finis

# Typical Elliptic Boundary Value Problem

Trouver  $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$  tel que

$$\underbrace{\langle (\nabla \hat{u}) \cdot (a \nabla u) \rangle}_{a(\hat{u}, u)} = \underbrace{\langle \hat{u} f \rangle + \ll \hat{u} g \gg_N}_{b(\hat{u})}, \quad \forall \hat{u} \in \hat{\mathcal{U}},$$

**Exemple de la conduction thermique**

**Equation elliptique**

**Il faut imposer une condition sur l'ensemble de la frontière !**

**Il faut au moins un point avec une condition essentielle !**

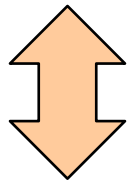
*Conditions essentielles  
Conditions de Dirichlet*



*Conditions naturelles  
Conditions de Neumann*

Trouver  $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$  tel que

$$a(\hat{u}, u) = b(\hat{u}), \quad \forall \hat{u} \in \hat{\mathcal{U}},$$



Trouver  $u \in \mathcal{U}$  tel que

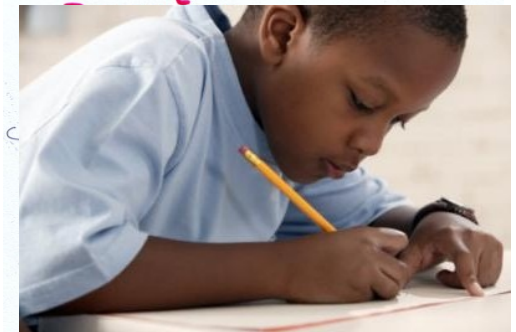
$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \underbrace{\frac{1}{2} a(v, v) - b(v)}_{J(v)},$$

# Abstract generic elliptic problem

**Il est aussi temps de commencer à se poser quelques questions sur la définition de l'espace fonctionnel...**

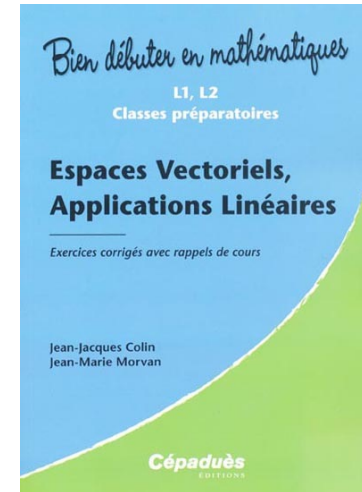
**$a$  est une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive**  
 **$b$  est une forme linéaire et continue**

*Ces hypothèses sont satisfaites pour un problème faible d'une équation elliptique...*



# C'est quoi une forme linéaire ?

Supposons tout d'abord que  $U$  est un espace vectoriel...



$b$  est une forme linéaire si

$$b(\alpha u + \beta v) = \alpha b(u) + \beta b(v) \\ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \forall u, v \in \mathcal{U}$$

$a$  est une forme bilinéaire si

$$a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w) \\ a(w, \alpha u + \beta v) = \alpha a(w, u) + \beta a(w, v) \\ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \forall u, v, w \in \mathcal{U}$$

# C'est quoi une forme continue ?

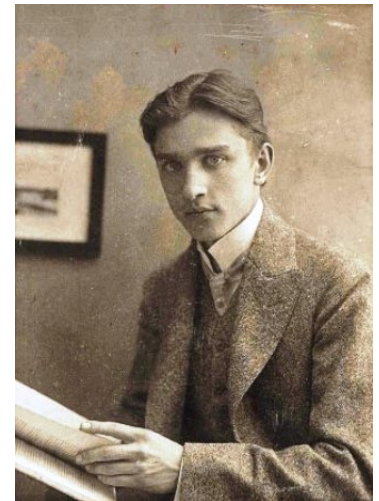
$b$  est une forme continue si

$$\exists c > 0 \text{ tel que } |b(u)| \leq c \|u\| \\ \forall u \in \mathcal{U}$$

$a$  est une forme continue si

$$\exists c > 0 \text{ tel que } |a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\| \\ \forall u, v \in \mathcal{U}$$

Stephan Banach  
Cracovie 1892 – 1945



**Donnons une norme à notre espace vectoriel  $\mathcal{U}$  ...**  
**Supposons en outre qu'il soit complet<sup>1</sup>**  
**Il devient un joli espace de Banach**

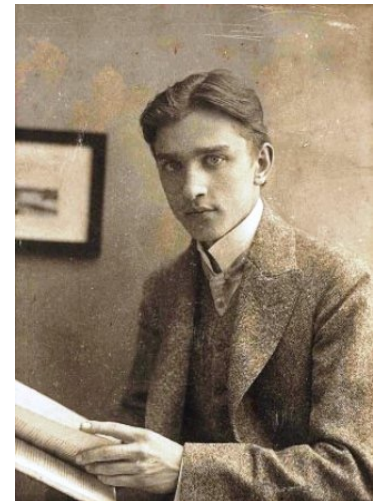
<sup>1</sup>Un espace  $\mathcal{U}$  est complet pour une norme  $\| \cdot \|$  si toute suite de Cauchy par rapport à  $\| \cdot \|$  converge. Oui, mais c'est quoi une suite de Cauchy ? Une suite de Cauchy  $\{u_1, u_2, \dots\}$  est une suite telle que  $\forall \varepsilon \exists n \|u_i - u_j\| < \varepsilon, i, j > n$ . Oui, mais c'est quoi une suite qui converge ? Une suite  $\{u_1, u_2, \dots\}$  converge vers  $u$  si  $\|u - u_i\| \rightarrow 0$  lorsque  $i \rightarrow \infty$ . Noter que si le concept d'espace complet ne vous intéresse absolument pas, vous pouvez l'oublier et vous contenter de considérer bêtement un espace d'Hilbert, comme un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Mais, évidemment c'est moins joli d'un point de vue intellectuel...

# C'est quoi une forme coercive ?

$a$  est une forme coercive ou  $\mathcal{U}$ -elliptique si  $\exists \alpha > 0$  tel que  $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$   
 $\forall u \in \mathcal{U}$

---

Stephan Banach  
Cracovie 1892 – 1945



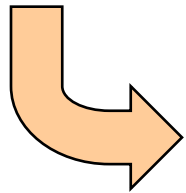
**Donnons une norme à notre espace vectoriel  $U$  ...**  
**Supposons en outre qu'il soit complet<sup>1</sup>**  
**Il devient un joli espace de Banach**

<sup>1</sup>Un espace  $\mathcal{U}$  est complet pour une norme  $\| \cdot \|$  si toute suite de Cauchy par rapport à  $\| \cdot \|$  converge. Oui, mais c'est quoi une suite de Cauchy ? Une suite de Cauchy  $\{u_1, u_2, \dots\}$  est une suite telle que  $\forall \varepsilon \exists n \forall i, j > n \|u_i - u_j\| < \varepsilon$ . Oui, mais c'est quoi une suite qui converge ? Une suite  $\{u_1, u_2, \dots\}$  converge vers  $u$  si  $\|u - u_i\| \rightarrow 0$  lorsque  $i \rightarrow \infty$ . Noter que si le concept d'espace complet ne vous intéresse absolument pas, vous pouvez l'oublier et vous contenter de considérer bêtement un espace d'Hilbert, comme un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Mais, évidemment c'est moins joli d'un point de vue intellectuel...

# C'est quoi une forme continue et coercive ?

$a$  est une forme définie positive  
ou est un produit scalaire pour  $\mathcal{U}$  si

$$\begin{aligned} & a \text{ symétrique,} \\ & a(u, u) \geq 0 \quad \forall u \neq 0 \in \mathcal{U} \\ & a(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$



$$\langle u, v \rangle_* = a(u, v);$$

**Donnons un produit scalaire à notre espace vectoriel  $U$  ...  
Supposons en outre qu'il soit complet<sup>1</sup>  
Il devient un joli espace de Hilbert**

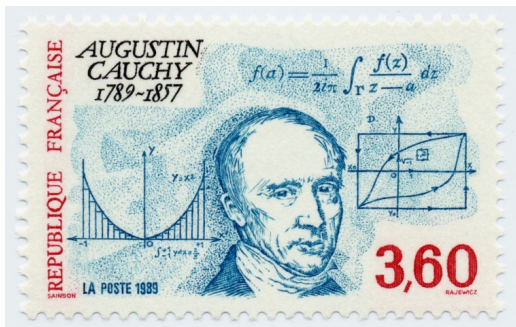
**C'est un produit scalaire !**

David Hilbert  
Germany 1862–1943



# Inégalité de Cauchy

$$\langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\|$$



$$0 \leq \langle \underbrace{u + \lambda v}_{\in U}, \underbrace{u + \lambda v}_{\in R} \rangle$$

$$\leq \langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle$$

SECOND ORDER POLYNOMIAL  $c + 2b\lambda + \lambda^2 a$   
 POSITIVE FOR ALL  $\lambda$   $\cup$   $b^2 - ac < 0$

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

$$\langle u, v \rangle \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

$$\|u\| \|v\|$$

□



# Théorème de Lax-Milgram :-)

Si  $\mathcal{U}$  est un espace d'Hilbert  
 $a$  est une forme bilinéaire continue et coercive  
 $b$  est une forme linéaire continue,

alors, le problème abstrait

$$\text{Trouver } u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U} \text{ tel que}$$
$$a(\hat{u}, u) = b(\hat{u}), \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U},$$

a une solution unique  
qui dépend continûment du terme source  $b$  ( $\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|b\|$ ).

où la norme d'une forme  $b$  est définie par l'expression

$$\|b\| = \sup_{v \in \mathcal{U}} \frac{|b(v)|}{\|v\|}.$$

**Notre problème est bien posé !**

**La solution existe, est unique  
et dépend gentiment des  
données...**

**Peter Lax  
Budapest 1926**



**Arthur Milgram  
Philadelphia 1912 – 1962**

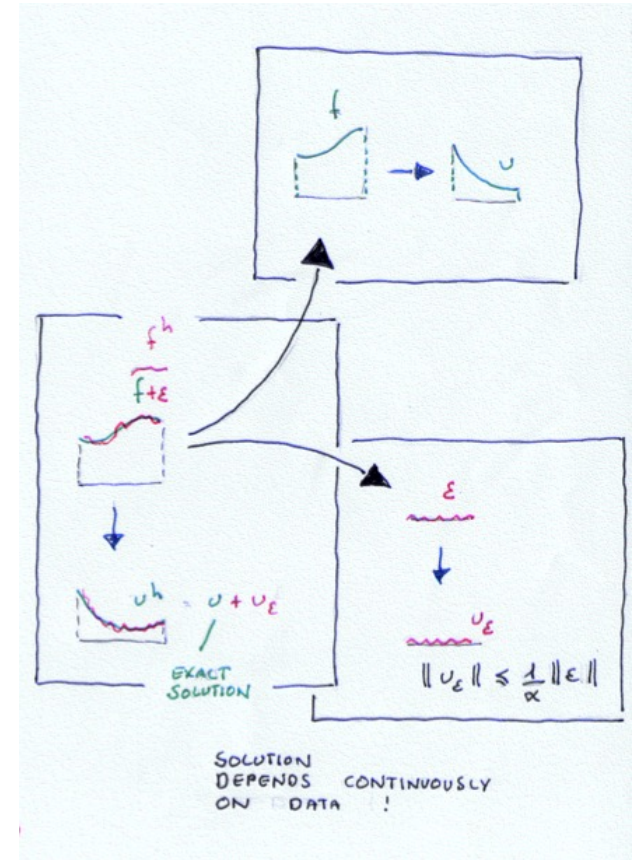


Ce théorème implique la stabilité  
des problèmes  
elliptiques...

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|b\|$$



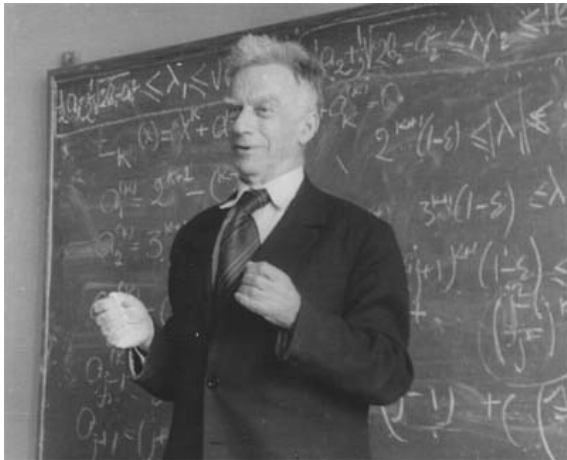
Constante de coercivité  
Plus la constante est grande,  
plus c'est stable !



...et ça c'est vachement utile !

# Certains espaces de Sobolev sont des espaces d'Hilbert :-)

Sergei Sobolev  
Saint-Petersburg 1908 - 1989



$$L_2(\Omega) = H^0(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 + (v')^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 dx < \infty \right\}$$

**Définissons formellement  $U \dots$**

**Définissons des normes et des produits scalaires !**

**Les dérivées sont comprises au sens des distributions  
afin de rendre les espaces complets !**

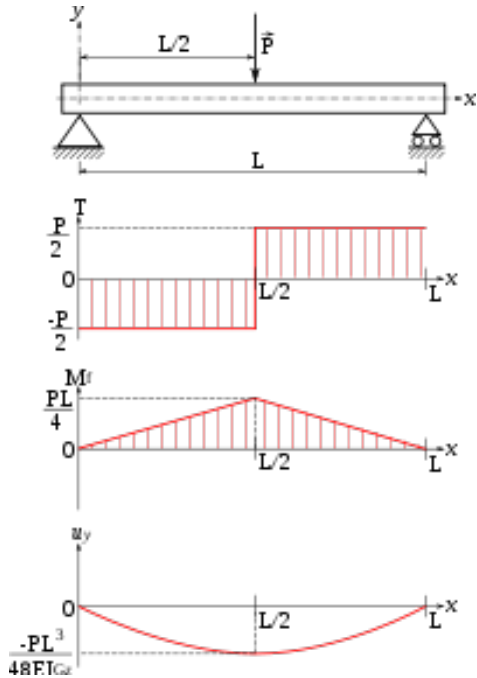
**Ce sont les espaces de Sobolev !**

$$\langle uv \rangle_0 = \int_{\Omega} uv dx$$

$$\langle uv \rangle_1 = \int_{\Omega} uv + u'v' dx$$

$$\langle uv \rangle_2 = \int_{\Omega} uv + u'v' + v''v'' dx$$

$$H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$$



# Characterizing the smoothness of a function

$$H^0(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 + (v')^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 dx < \infty \right\}$$

$$x^{-1/4} \in L_2(]0, 1[)$$

$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = \left[ 2 x^{1/2} \right]_0^1 = 2$$

$$\int_0^1 x^{-1} dx = \left[ \ln(x) \right]_0^1 = \infty$$

$$x^{-1/2} \notin L_2(]0, 1[)$$

Ce n'est pas  
toujours  
évident ...

**Théorèmes d'immersion de Sobolev**  
Est-ce que c'est continu, ces brots ?

Si  $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ ,  
 $2k > n$ ,

alors  $H^k(\Omega) \subset \{w \mid w \in C^0(\bar{\Omega}),$   
 $\exists c \mid w(x) \mid < c, \forall x \in \Omega\}$



Si  $\Omega \subset \mathcal{R}$ ,

alors  $H^{k+1}(\Omega) \subset \{w \mid w \in C^k(\bar{\Omega}),$   
 $\exists c \mid w(x) \mid < c, \forall x \in \Omega\}$

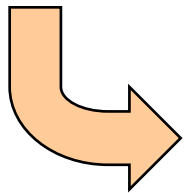
**Une force ponctuelle sur une corde, on a un déplacement fini !**

**Une force ponctuelle sur une membrane, la solution analytique tend vers l'infini sous la force !**

# Et finalement, $a(u,v)$ est-il continu et coercif pour Poisson ?

Trouver  $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$  tel que

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \underbrace{\left( \frac{1}{2} a(v,v) - b(v) \right)}_{J(v)},$$

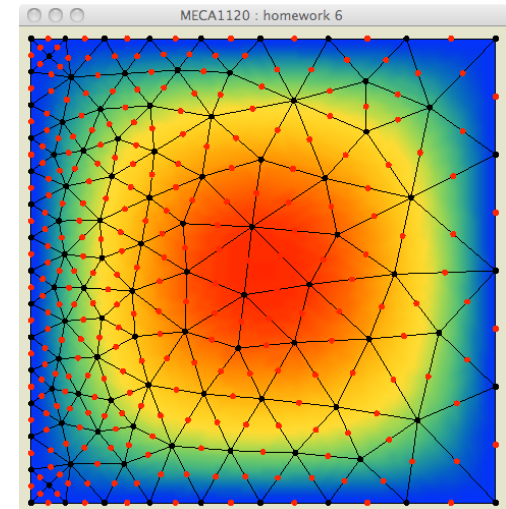


**Pour le cas de la conduction stationnaire**

$$\mathcal{U} = \{w \in H^1(\Omega) \text{ et } w = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

$$a(u,v) = \langle \nabla u \cdot k \nabla v \rangle$$

$$b(u) = \langle fu \rangle$$



$$v(x) - \underbrace{v(0)}_{=0} = \int_0^x \frac{dv}{dx}(t) dt$$

↓ Par l'inégalité de Cauchy  $\langle v, x, 1 \rangle \leq \|v, x\| \|1\|$

$$(v(x))^2 \leq \underbrace{\int_0^x dt}_{\leq C} \underbrace{\int_0^x \left(\frac{dv}{dx}(t)\right)^2 dt}_{\leq \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_0^2}$$

↓ En intégrant sur  $\Omega$

$$\|v\|_0^2 \leq C_1 \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_0^2$$

↓

$$kC_2 \underbrace{\left(\|v\|_0^2 + \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_0^2\right)}_{\|v\|_1^2} \leq \underbrace{k \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_0^2}_{a(v, v)}$$

**C'est coercif !**

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0$$

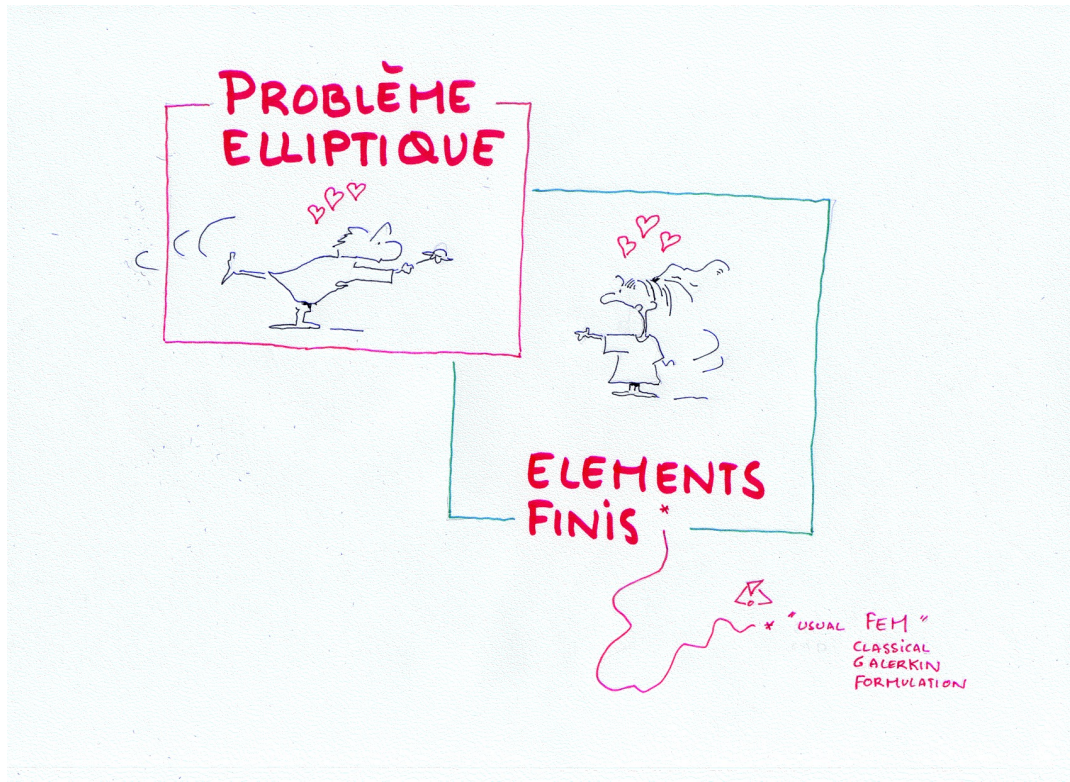
↓

$$\leq \|u\|_1 \|v\|_1$$

**C'est continu !**

**Exemple de la conduction thermique**

**Pour avoir un problème bien posé,  
il faut au moins un point avec une condition essentielle !**



Galerkin, c'était donc optimal pour des équations elliptiques



$$r^h = \nabla \cdot (a \nabla u^h) + f.$$

La technique de Galerkin  
consiste à annuler en moyenne  
le produit du résidu  
avec les fonctions de forme

Et cette manière de procéder minimise  
l'erreur dans la norme L2 : c'est une  
formulation optimale en ce sens !



Galerkin 1871-1945

Les éléments finis  
sont une méthode  
de résidus pondérés

$$\langle \tau_i r^h \rangle = 0,$$

↓

$$\langle \tau_i (\nabla \cdot (a \nabla u^h)) \rangle + \langle \tau_i f \rangle = 0,$$

↓

$$\langle (\nabla \tau_i) \cdot (a \nabla u^h) \rangle = \langle \tau_i f \rangle,$$

↓

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{\langle (\nabla \tau_i) \cdot (a \nabla \tau_j) \rangle}_{A_{ij}} U_j = \underbrace{\langle \tau_i f \rangle}_{B_i}$$

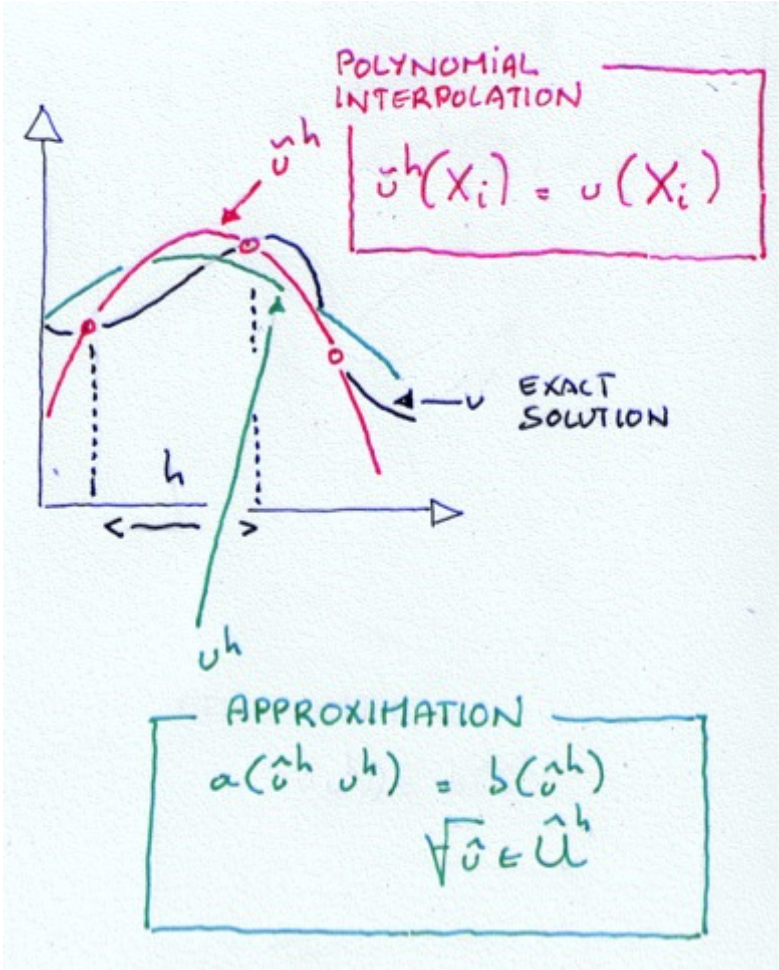
# Estimation a priori de l'erreur

$$\|e\|_m^2 \leq \frac{c}{\alpha} C^2 h^{2(p+1-m)} \|u\|_{p+1}^2,$$

Lemme de  
Bramble-Hilbert

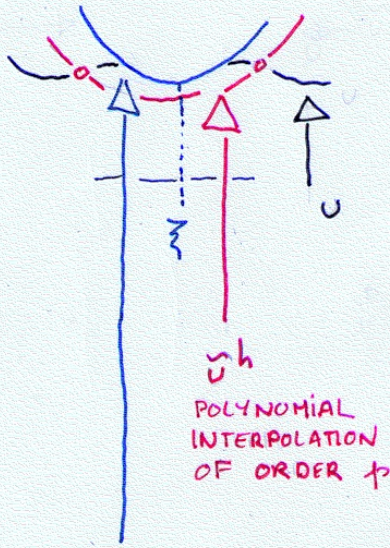
Théorème de la meilleure  
approximation énergétique

Lemme de Cea



# BRAMBLE - HILBERT LEMMA

$$\frac{d^i}{d\xi^i} (v - \tilde{v}^h) = \frac{d^i v}{d\xi^i} - \frac{d^i u^t}{d\xi^i} + \left( \frac{d^i u^t}{d\xi^i} - \frac{d^i \tilde{v}^h}{d\xi^i} \right)$$



$u^t$   
TAYLOR DEVELOPMENT OF ORDER  $p$  AROUND  $\xi$

$$= \frac{d^i u^t}{d\xi^i} - \frac{d^i \tilde{v}^h}{d\xi^i} = \frac{d^i u^t}{d\xi^i} - \sum_{j=0}^p u^t(\mathbb{I}_j) \frac{d^i \phi_j}{d\xi^i} = \sum_{j=0}^p (u^t(\mathbb{I}_j) - v(\mathbb{I}_j)) \frac{d^i \phi_j}{d\xi^i} \leq C$$

$$\left| \frac{d^i v}{d\xi^i} \right| \leq \left| \frac{d^i v}{d\xi^i} - \frac{d^i u^t}{d\xi^i} \right| + \sum_{j=0}^p |u^t(\mathbb{I}_j) - v(\mathbb{I}_j)| \left| \frac{d^i \phi_j}{d\xi^i} \right| \leq C \max \left| \frac{d^{p+1} v}{d\xi^{p+1}} \right| \leq C \max \left| \frac{d^{p+1} v}{d\xi^{p+1}} \right|$$

$$\|e_\xi\|_m^2 = \sum_{e=1}^n \sum_{i=0}^m \int_{\Omega_e} \left( \frac{d^i e_\xi}{dx^i} \right)^2 dx$$

$$= \left( \frac{h}{2} \right)^{1-2i} \int_{-1}^1 \left( \frac{d^i e_\xi}{d\xi^i} \right)^2 d\xi$$

$$\leq C^2 \int_{-1}^1 \max \left| \frac{d^{p+1} u}{d\xi^{p+1}} \right|^2 d\xi$$

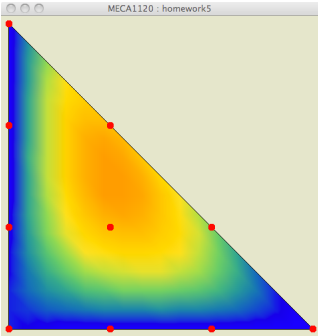
$$\leq C^2 \left( \frac{2}{h} \right)^{1-2(p+1)} \int_{\Omega_e} \max \left| \frac{d^{p+1} u}{dx^{p+1}} \right|^2 dx$$

$$\leq C \|u\|_{p+1}^2$$



$$\leq C^2 \sum_{l=0}^m \left( \frac{h}{2} \right)^{2(p+1-i)} \|u\|_{p+1}^2$$

# Erreur de l'interpolation



$$\|\tilde{e}\|_m \leq Ch^{p+1-m} \|u\|_{p+1},$$

lorsque  $h$  tend vers 0.

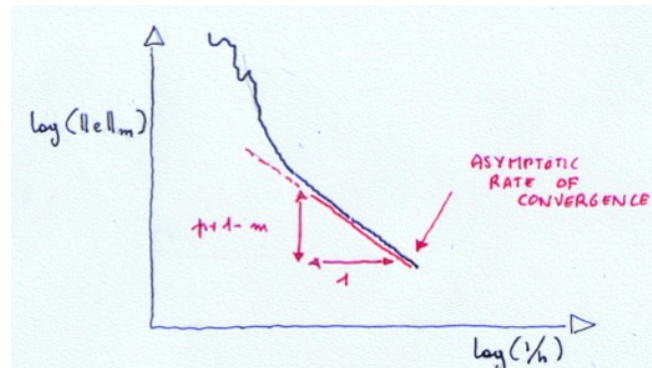
## Lemme de Bramble Hilbert

Concrètement...

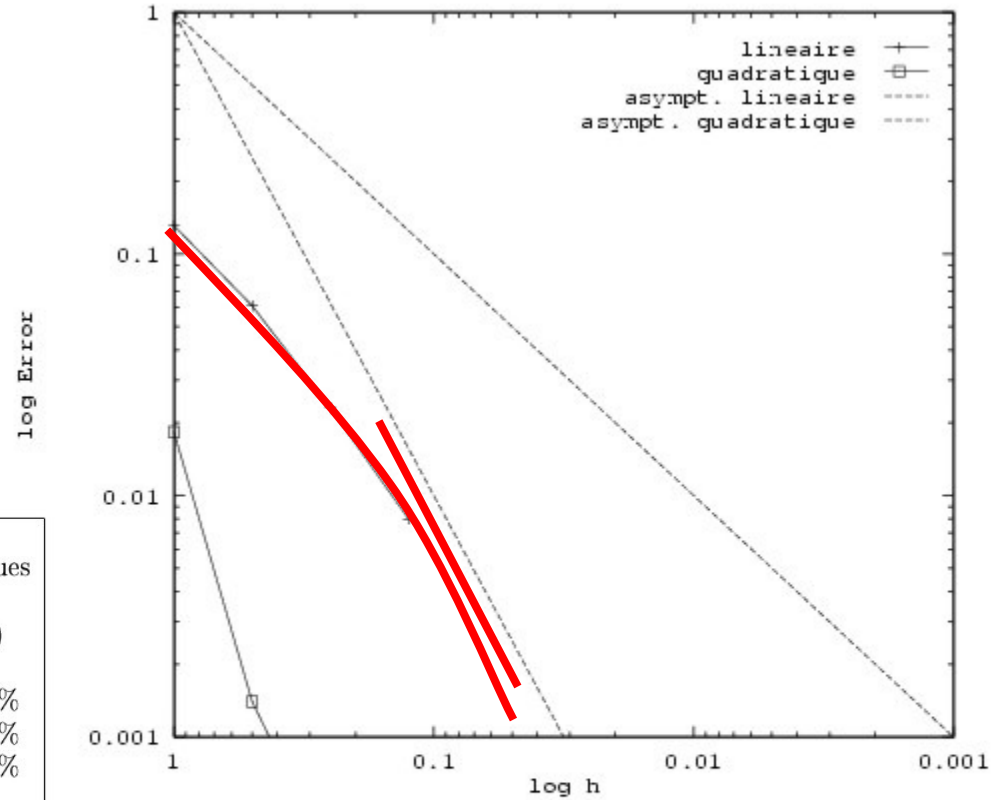
$$\|\tilde{e}\|_0 \leq C_0 h^2 \|u\|_2,$$

$$\|\tilde{e}\|_1 \leq C_1 h^1 \|u\|_2,$$

$$\|\tilde{e}\|_* \leq C_1 h^1 \|u\|_2.$$

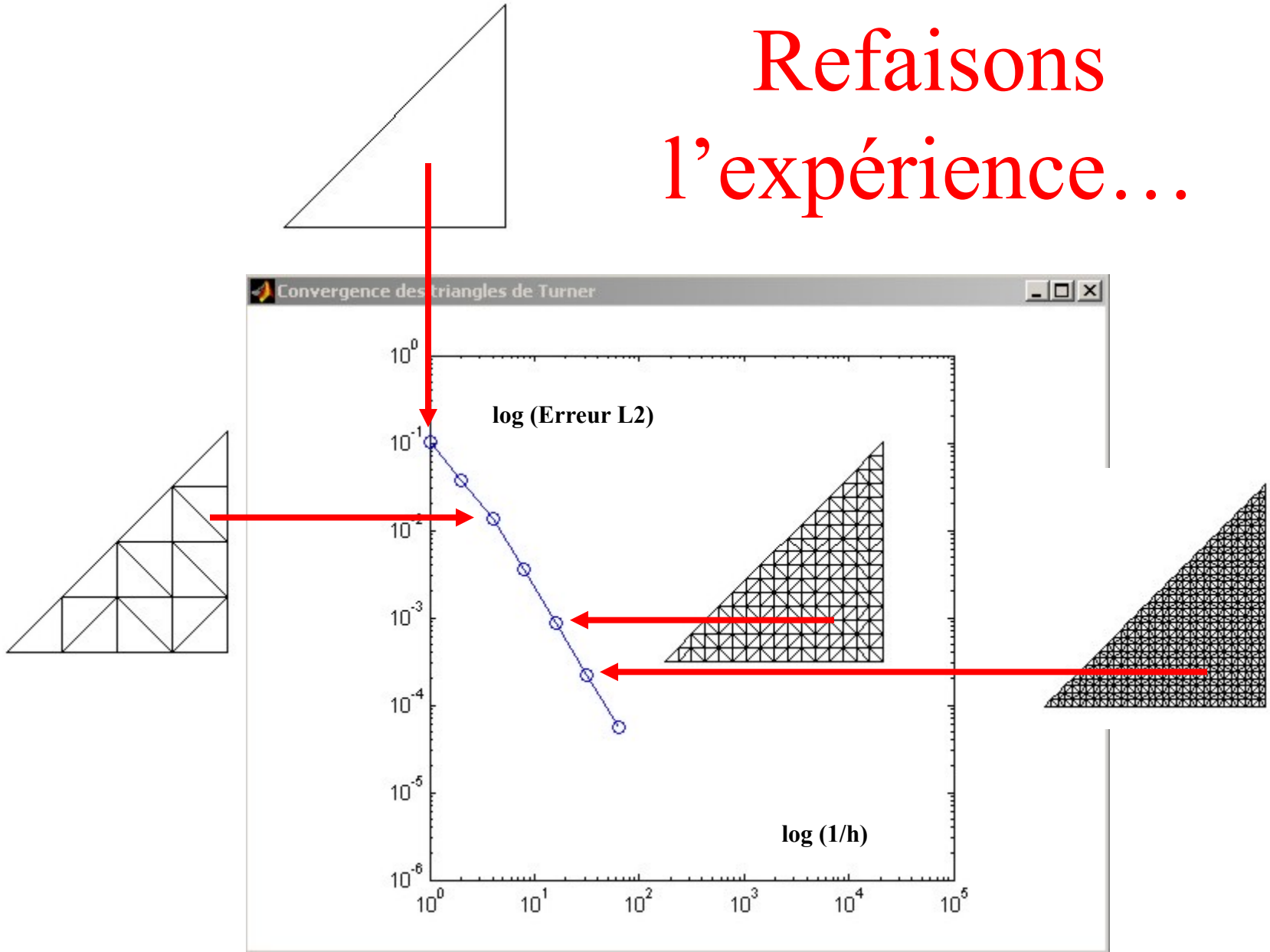


Eléments		Triangles linéaires			Triangles quadratiques		
$N_1$	$h$	$N$	$u^h(0)$	$e(0)$	$N$	$u^h(0)$	$e(0)$
1	1	3	-0.3333	13.1 %	6	-0.3000	1.83 %
4	1/2	6	-0.3125	6.1 %	15	-0.2950	0.14 %
16	1/4	15	-0.3013	2.3 %	45	-0.2947	0.03 %
64	1/8	45	-0.2969	0.8 %			



Et expérimentalement...

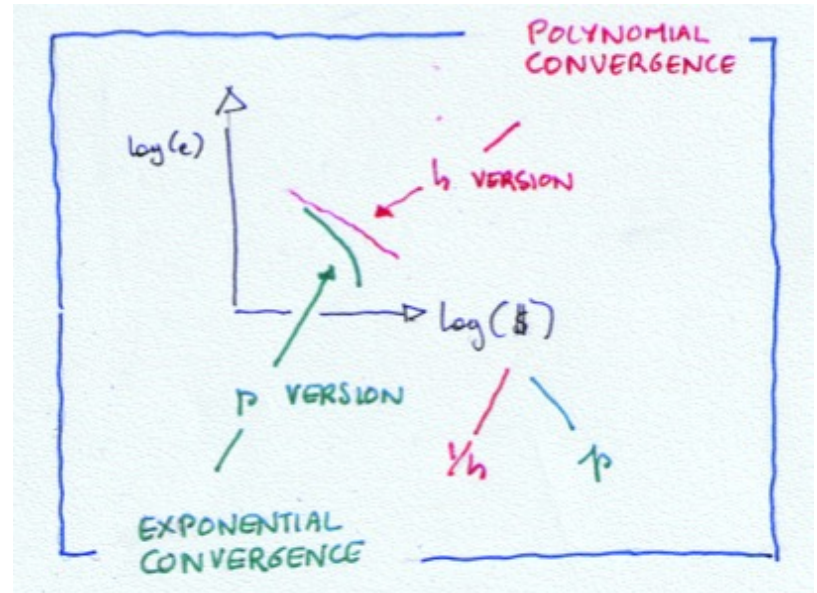
# Refaisons l'expérience...



# La quête –le rêve- de la superconvergence exponentielle des méthodes d'ordre élevé !

$$\|\tilde{e}\|_m \leq Ch^{p+1-m} \|u\|_{p+1},$$

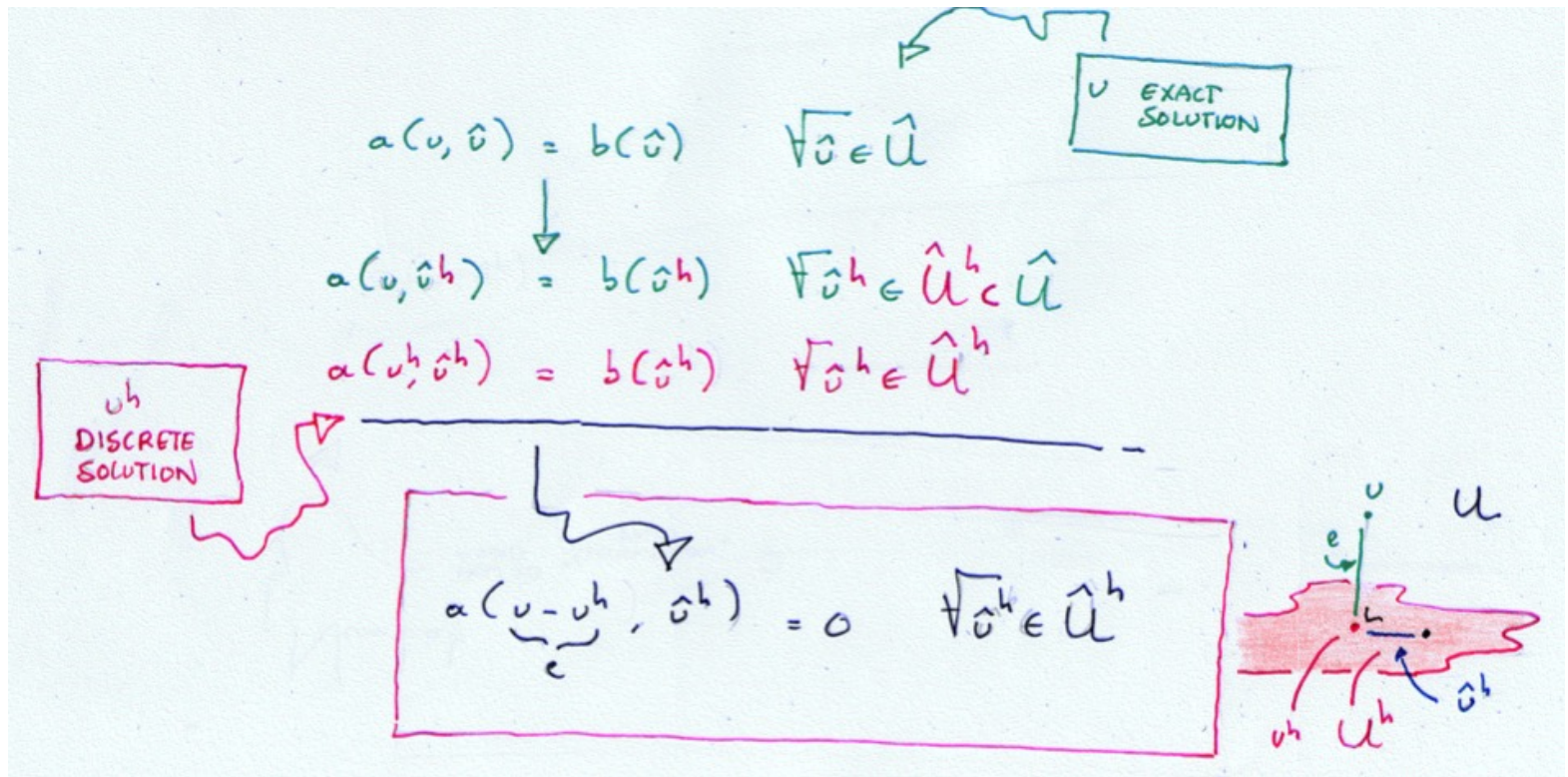
lorsque  $h$  tend vers 0.



**Attention, il faut que la solution exacte soit suffisamment régulière !  
Sinon pas de super convergence...**

**Et en général, les solutions ne sont pas régulières : aie :-)**



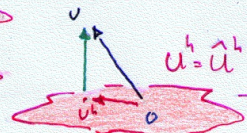
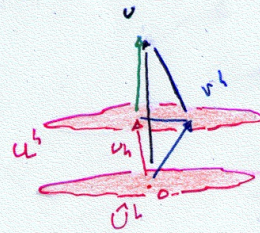


Les éléments finis :  
c'est une projection orthogonale !

$$\begin{aligned}
 a(u-r^h, u-r^h) &= a(\underbrace{u-u^h}_e + u^h - r^h, \underbrace{u-u^h}_e + u^h - r^h) \\
 &= a(e, e) + a(u^h - r^h, u^h - r^h) + 2a(e, u^h - r^h) \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

BEST ENERGY APPROXIMATION THEOREM

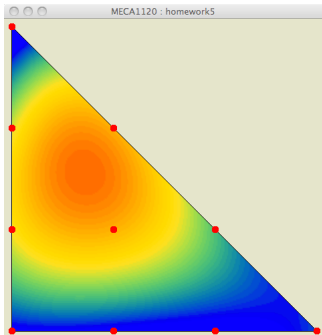
$$\|u - r^h\|_x \geq \|e\|_x \quad \forall r^h \in U^h$$



$$\begin{aligned}
 \|u - r^h\|_x^2 &= \|e\|_x^2 + \|u^h - r^h\|_x^2 \\
 \|u\|_x^2 &= \|e\|_x^2 + \|u^h\|_x^2 \quad \text{if } \hat{u}^h = u^h
 \end{aligned}$$

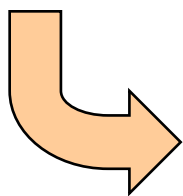
C'est la meilleure approximation !

Oui, mais c'est une norme bizarre, non ?



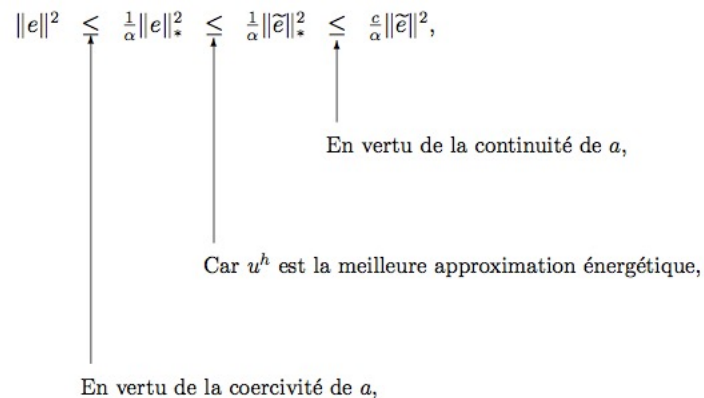
# Lemme de Cea

$$\|e\|^2 \leq \frac{c}{\alpha} \|\tilde{e}\|^2$$

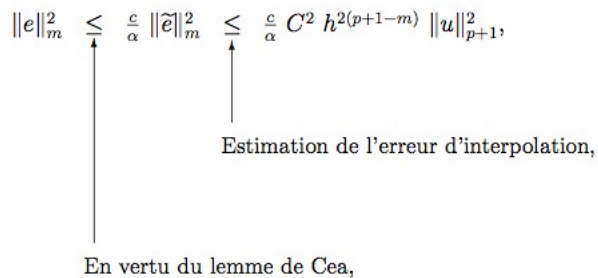


# Estimation de l'erreur

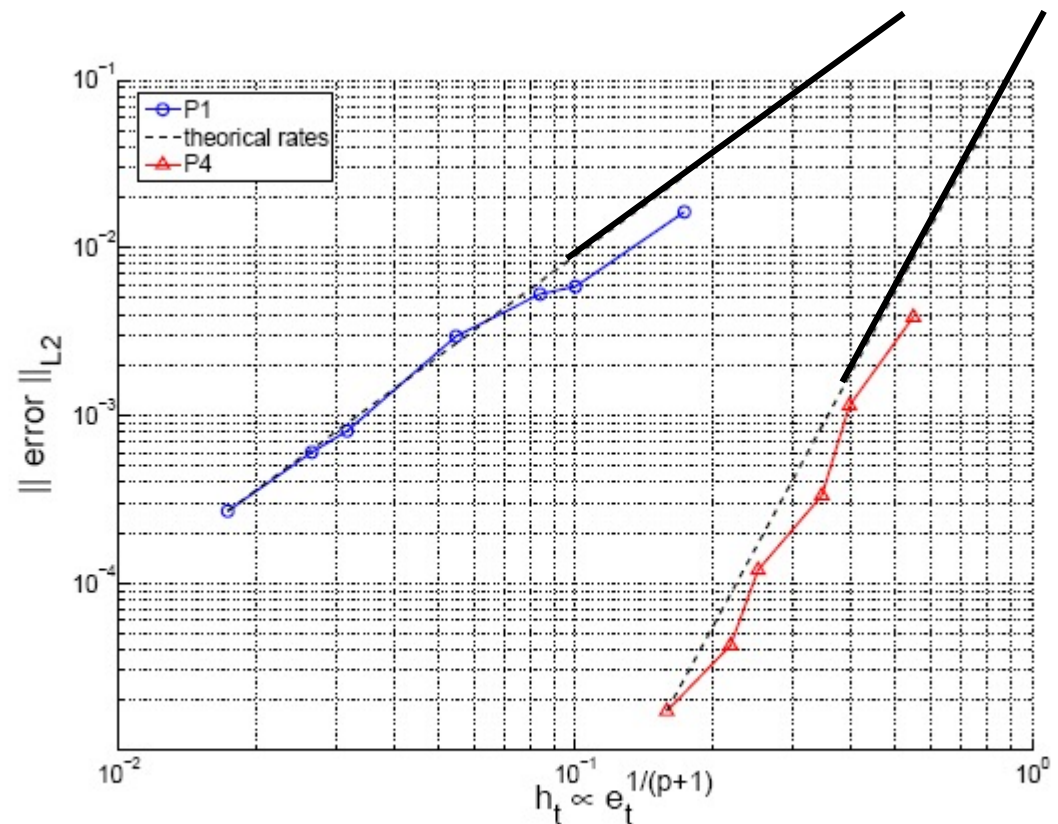
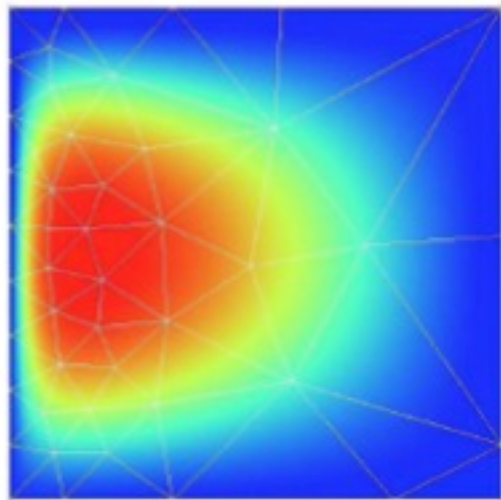
$$\|e\|_m^2 \leq \frac{c}{\alpha} C^2 h^{2(p+1-m)} \|u\|_{p+1}^2$$



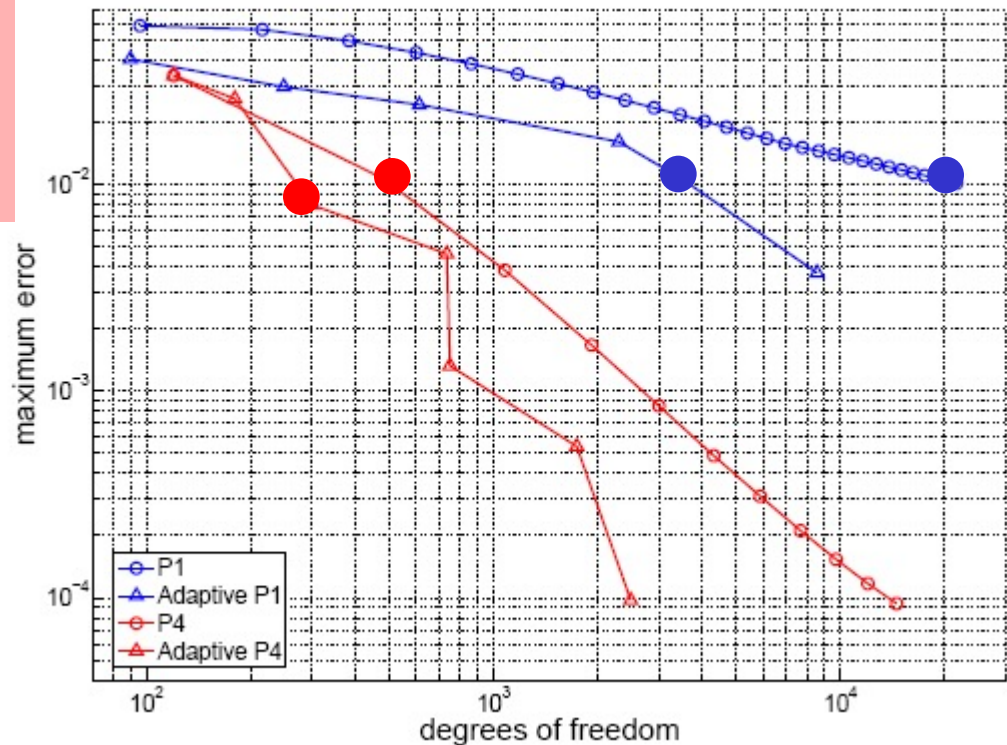
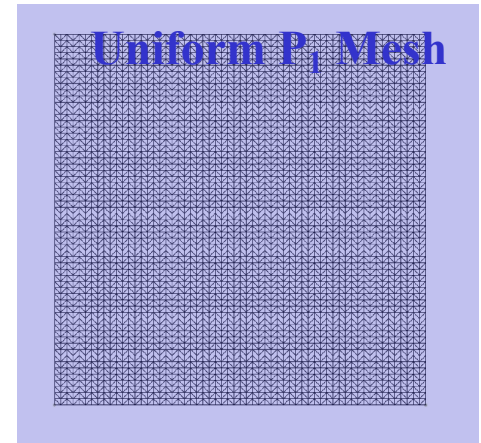
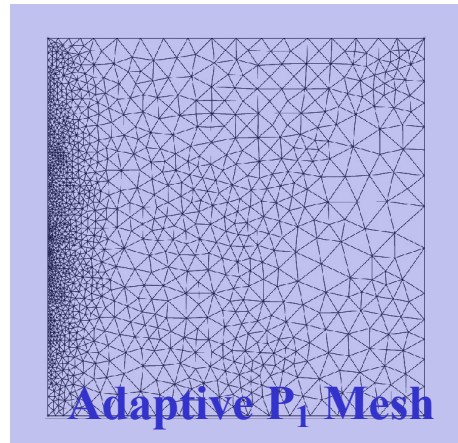
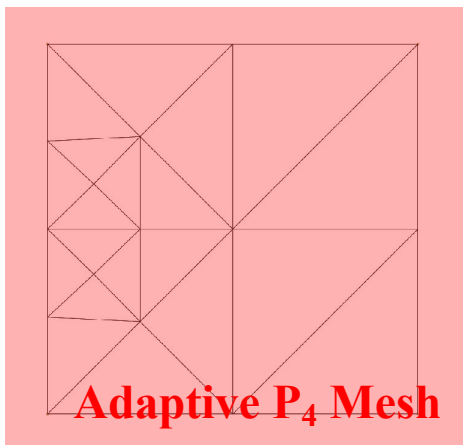
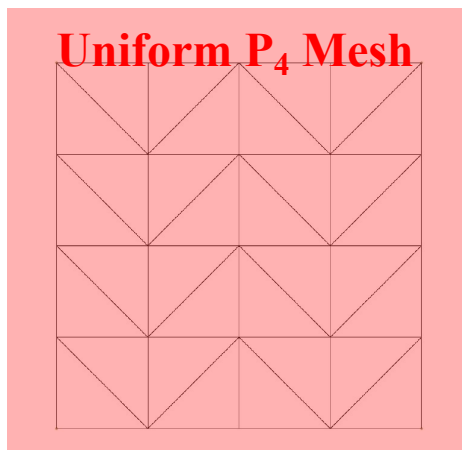
**Non, c'est aussi vrai dans toutes les normes de Sobolev !**

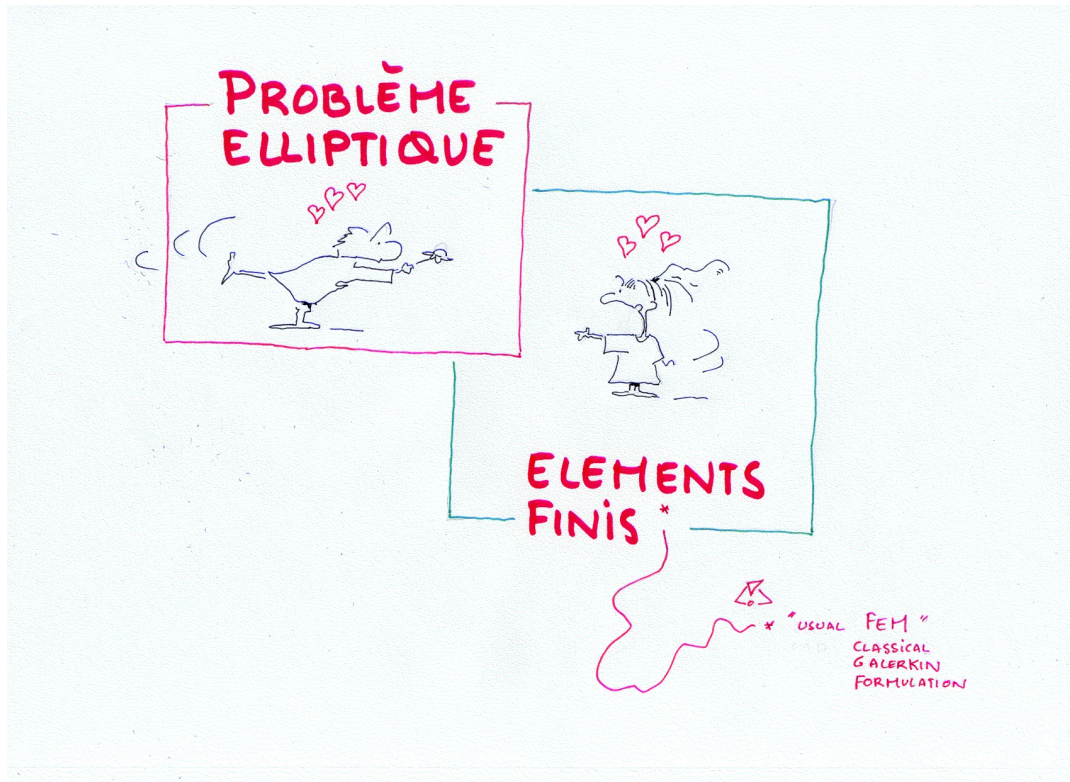


# Theoretical rates of convergence are obtained for the analytical Stommel problem



# How does it converge ?





Galerkin, c'est donc optimal pour des équations elliptiques