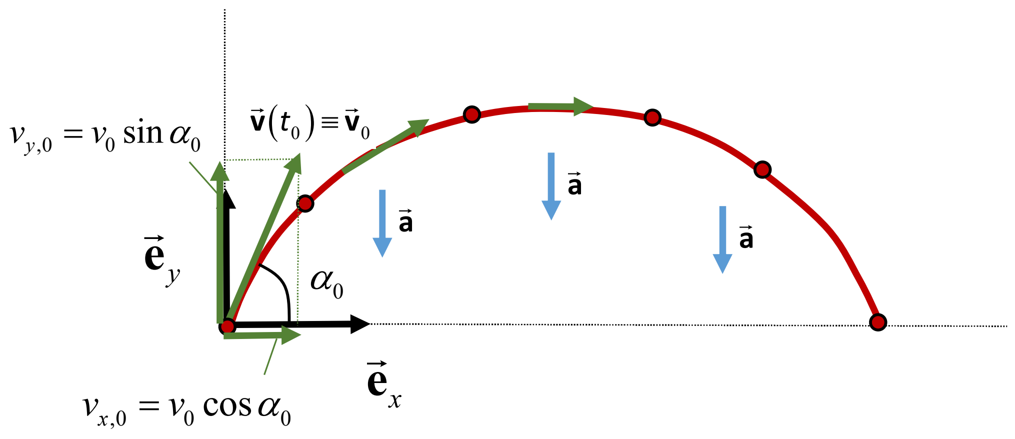
UCLouvain

École polytechnique de Louvain

LEPL1201
Cours 1 : Cinématique
& unités, vecteurs

T. Pardoen



Année académique 2023-24

Mécanique du point, versus corps rigides, versus corps déformables

Mécanique du point

Cours 1 : Unités, vecteurs, cinématique

Cours 2 : Lois de Newton et gravité

Cours 3 : Force de Coulomb

Cours 4 : Loi de Gauss

Cours 5 : Forces de frottement

Cours 6 : Travail, énergie, puissance

Cours 7 : Potentiel électrique et moments

Cours 8 : Capacités et diélectriques

Cours 9 : Mouvements circulaires

Cours 10 : Mécanique des corps rigides

Cours 11 : Courant électrique et résistance

Cours 12 : Circuit RC

LABO 2

Mécanique des corps rigides (le début)

Pas de mécanique des corps déformables en LEPL1201 – pour plus tard

Agenda Cours 1

1. **Unités**
2. **Vecteurs**

« Outils »

3. **Cinématique** *« Le gros du morceau »*

a. Tout en 1D *vite fait*

Position – trajectoire - déplacement
Vitesse
Accélération
Applications

b. En 3D - formalisme vectoriel

Position – trajectoire
Vitesse
Accélération
Applications

1. Unités

Toute quantité physique ψ a une dimension $[\psi]$ qui est une fonction des unités fondamentales définies dans le **système international (SI)** :

Longueur **- mètre [m]**
Temps **- seconde [s]**
Masse **- kilogramme [kg]**
Courant électrique **- ampère [A]**
Température - kelvin [K]
Quantité de substance - mole [mole]
Intensité lumineuse - candela [cd]

La dimension caractéristique (unité) d'une variable ψ est toujours donnée par une relation du type (*dans ce cours, seulement pour des phénomènes mécaniques et électriques*) :

$$[\psi] = \underbrace{(\text{masse})}_{M}{}^{a} \text{ x } \underbrace{(\text{longueur})}_{L}{}^{b} \text{ x } \underbrace{(\text{temps})}_{T}{}^{c} \text{ x } \underbrace{(\text{courant})}_{C}{}^{d}$$

avec *a, b, c, d* des nombres qui sont presque toujours des entiers.

1. Unités

Pour des raisons pratiques, les unités « non fondamentales » ont été inventées:

Dans LEPL1201, on va utiliser

- Longueur : mètre [**m**] (unité fondamentale)
- Temps : seconde [**s**] (unité fondamentale)
- Masse : kilogramme [**kg**] (unité fondamentale)
- Courant : Ampère [**A**] (unité fondamentale)
- Charge électrique : Coulomb [**C**] (1 C = 1 A·s)
- Vitesse : [m/s]
- Accélération : [m/s^2]
- Force : Newton [**N**] (1 N = 1 $kg \cdot m/s^2$)
- Quantité de mouvement (masse·vitesse) : [kg·m/s]
- Potentiel électrique: Volt [**V**] (1 V = 1 N·m/C = 1 $kg \cdot m^2/s^3 \cdot A$)
- Energie : Joule [**J**] (1 J = 1 N·m) (ou Watt-heure = W·h)
- Moment & couple (force·longueur) : [N·m]
- Puissance : Watt [**W**] (1 W = 1 J/s)

Une quantité physique sans unité n'a pas de signification !

1. Unités

Parfois les quantités dont il est question sont très petites ou au contraire très grandes, **des préfixes sont utilisés pour nommer les puissances** (de dix) et ainsi se faciliter la vie.

puissance	préfixe	abréviation	puissance	préfixe	abréviation
10^{-18}	atto	a	10^{1}	déca	da
10^{-15}	femto	f	10^{2}	hecto	h
10^{-12}	pico	p	10^{3}	kilo	k
10^{-9}	nano	n	10^{6}	méga	M
10^{-6}	micro	µ	10^{9}	giga	G
10^{-3}	milli	m	10^{12}	téra	T
10^{-2}	centi	c	10^{15}	péta	P
10^{-1}	déci	d	10^{18}	exa	E

Exemples

- nanomètre: nm
- gigawatt : GW
- exajoule : EJ
- microampère : µA
- femtoseconde : fs

1. Unités
Homogénéité des dimensions

Dans une relation mathématique qui relie des quantités physiques A, B, C etc, il convient de s'assurer que la relation est **dimensionnellement homogène**; c'est-à-dire qu'elle est consistante au niveau des unités.

Par exemple, si $A + B + C = 0$, il faut que $[A] = [B] = [C]$

Par exemple si $AB^2 = C$, il faut que $[A]\text{x}[B]\text{x}[B] = [C]$

etc.

Une expression non dimensionnellement homogène est nécessairement fausse physiquement, mais l'inverse n'est, malheureusement, pas vrai (une expression dimensionnellement homogène peut être fausse aussi !)

Agenda Cours 1

1. Unités
2. **Vecteurs**
3. Cinématique

   a. **Tout en 1D**

      Position – trajectoire - déplacement
      Vitesse
      Accélération
      Applications

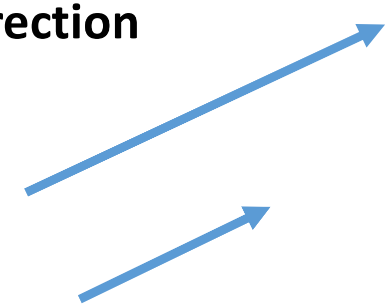
   b. **en 3D - formalisme vectoriel**

      Position – trajectoire
      Vitesse
      Accélération
      Applications

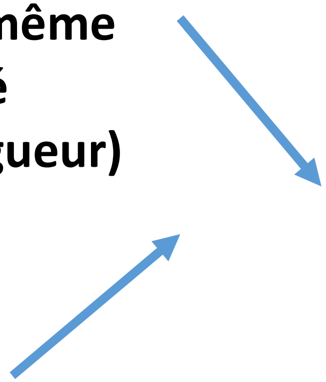
2. Vecteurs

Un vecteur est un concept mathématique très puissant en physique car il agrège de façon compacte une double information sur une quantité physique : (1) l’information de direction (et de sens); (2) l’information sur l’amplitude/l’intensité

Vecteurs de même direction



Vecteurs de même intensité (= même longueur)



De nombreuses quantités en physique ont une directionnalité et une intensité: le déplacement, le champ électrique, la force, la vitesse, etc. Ces quantités seront représentées par des vecteurs.

Notations pour les vecteurs

Choix pour LEPL1201

$\vec{\mathbf{A}}$ ou $\vec{\mathbf{a}}$ Majuscule ou minuscule avec une flèche au-dessus et en gras (on privilégiera parfois la minuscule pour les quantités physiques)

$\vec{\mathrm{A}}$ ou $\vec{\mathrm{a}}$ Idem mais pas en gras (par exemple, quand on écrit sur papier ou au tableau, il n'est pas facile de mettre en gras)

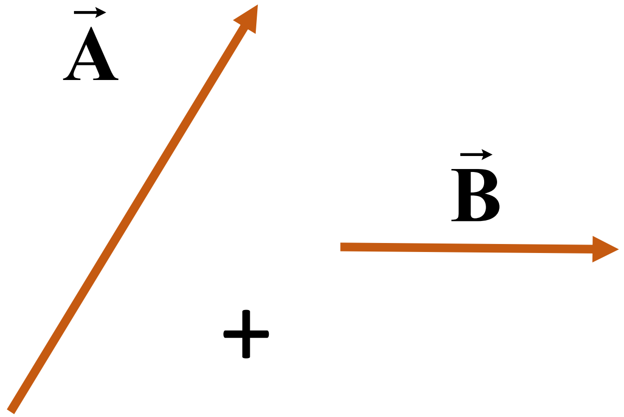
$\hat{A}$ ou $\hat{a}$ Utilisation du chapeau plutôt que la flèche, avec italique et pas gras (choix qui sera proposé par exemple par le Prof. Fisette, plus tard)

$\tilde{\mathbf{A}}$ ou $\tilde{\mathbf{a}}$ ou $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ ou $\underset{\sim}{\mathbf{a}}$ Utilisation du tilde au dessus ou en dessous (en gras ici)

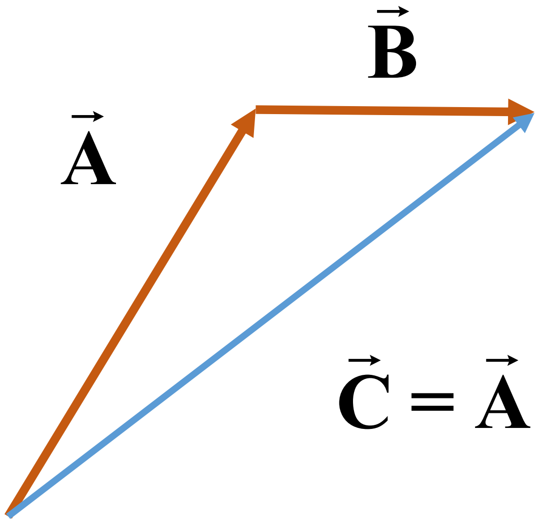
Ce qui compte : être consistant dans le cadre du même cours, même matière, même livre etc

et encore bien d'autres …

Somme de vecteurs (I)



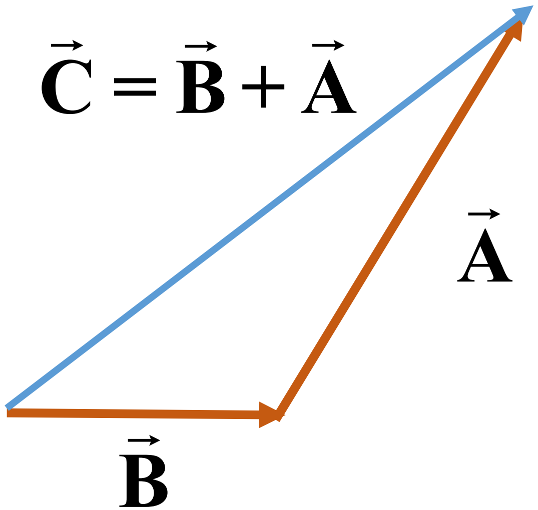
=>



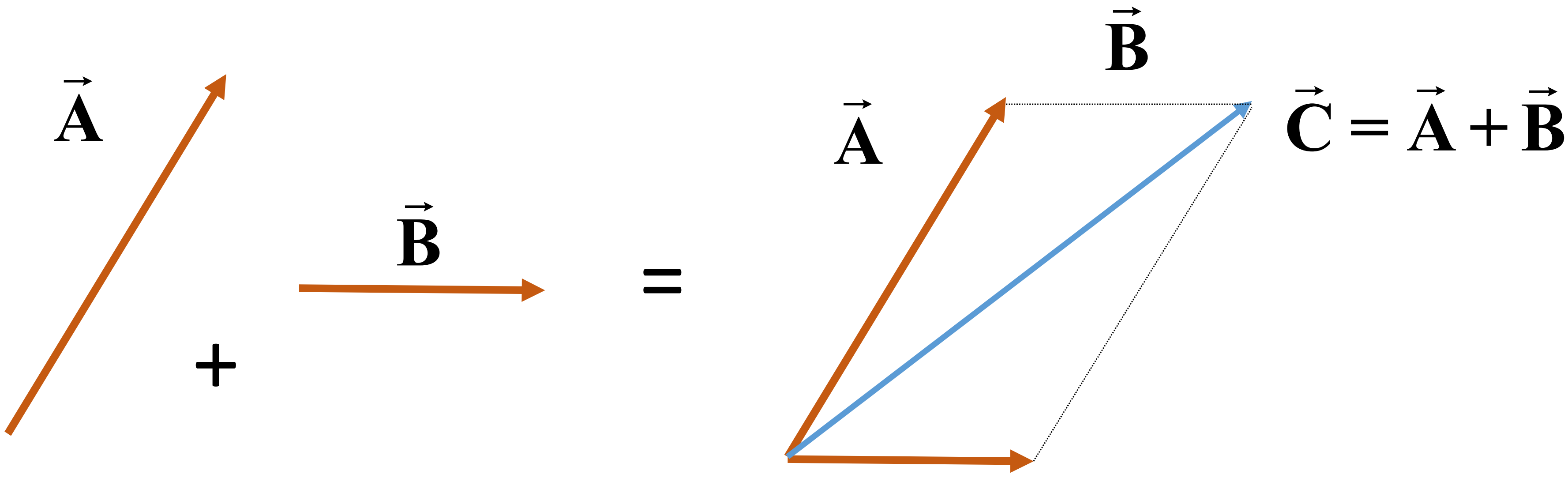
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

=>

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A}$$

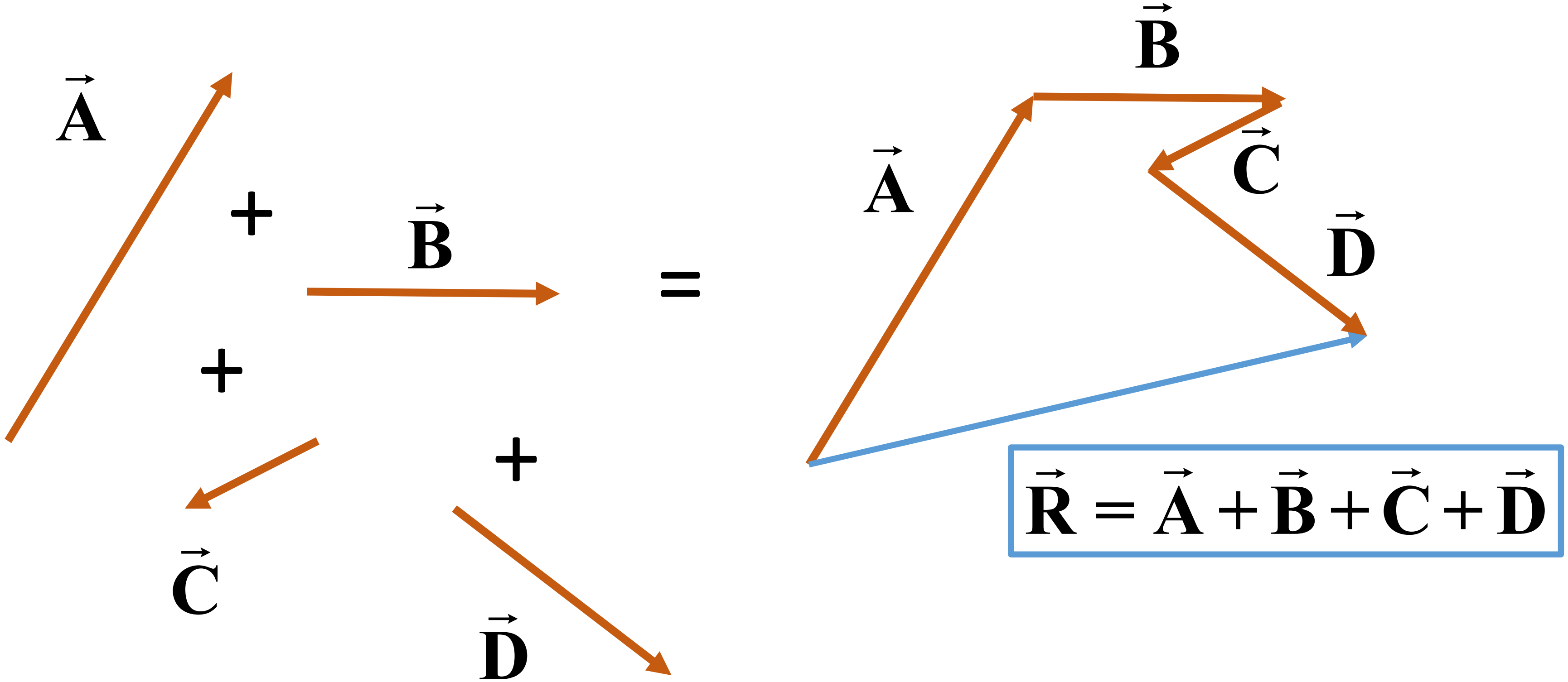


Somme de vecteurs (II)



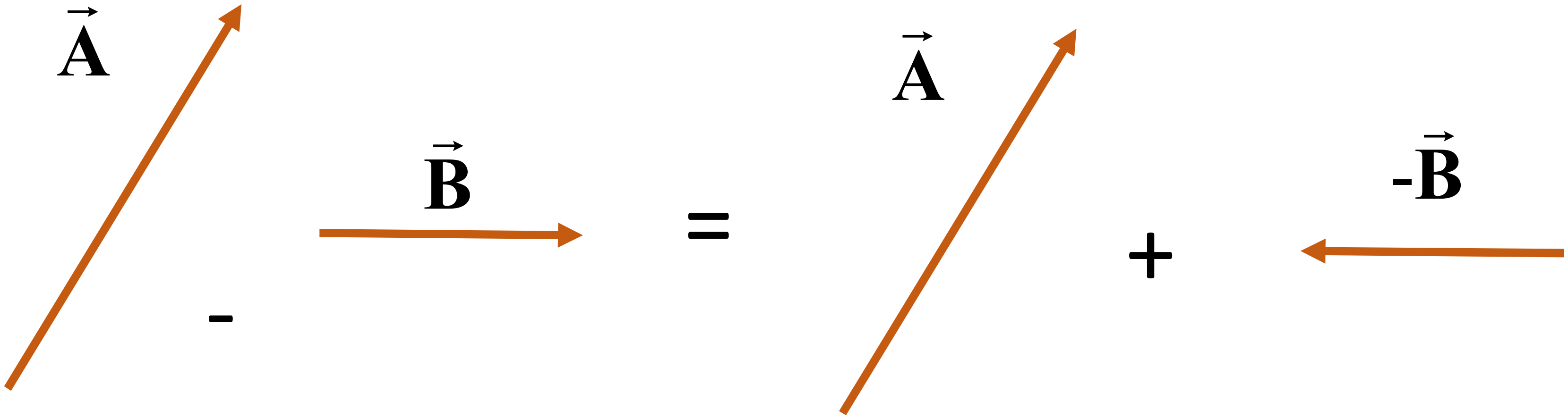
Méthode dite du parallélogramme

Somme de vecteurs (III)

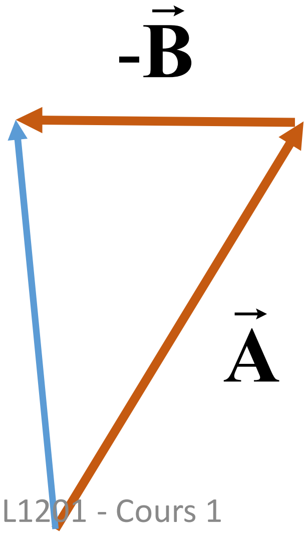


$$\boxed{\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}}$$

Soustraction de vecteurs

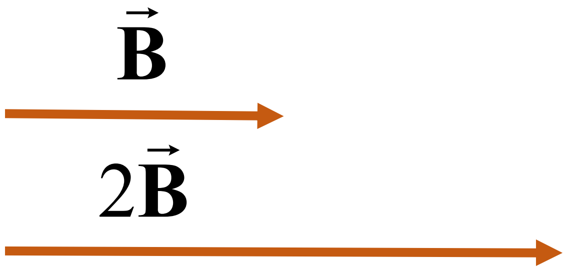


=> $\boxed{\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}}$

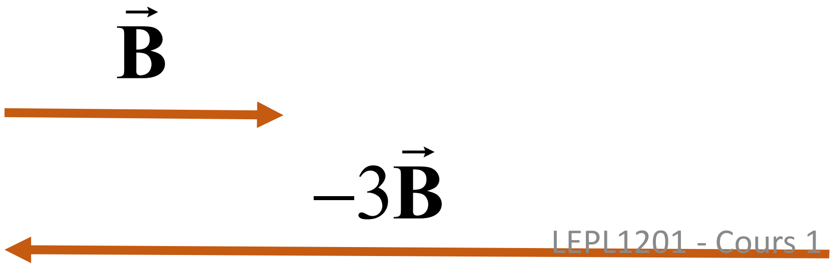


Multiplication d'un vecteur par un scalaire *a*

Scalaire positif : l'amplitude (norme, longueur) du vecteur est multipliée par *a*, mais la direction et le sens ne changent pas:



Scalaire négatif : l'amplitude (norme, longueur) du vecteur est multipliée par *a* et le sens est inversé:

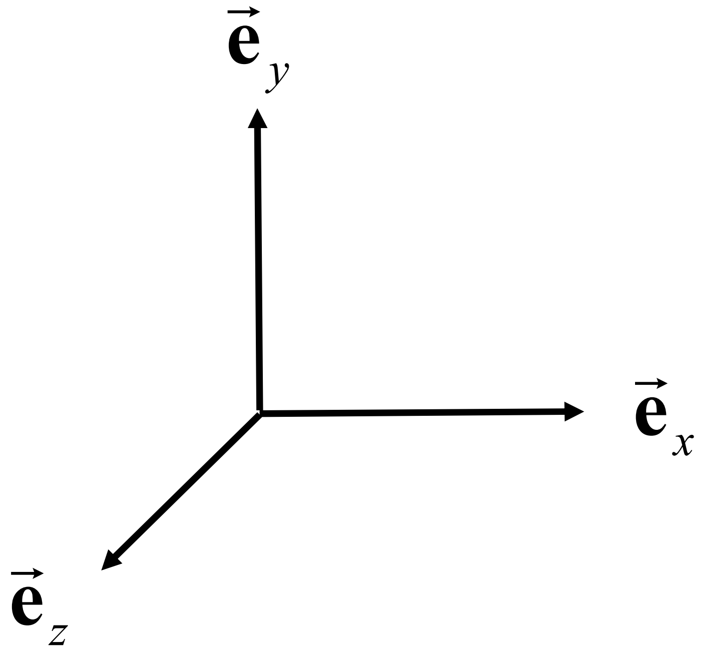


Composantes d'un vecteur (I)

Jusqu'ici, tout était graphique

Si vous voulez quantifier une direction et une amplitude, vous avez besoin d'une **référence** (*direction par rapport à quoi ? intensité par rapport à quoi ?*)

Cette référence sera généralement donnée par **3 vecteur orthonormés**, ce qui veut dire trois vecteurs de longueur unité et orthogonaux les uns aux autres. Ces trois vecteurs peuvent être notés de différentes manières. Notre convention dans ce cours est $\boxed{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z}$.



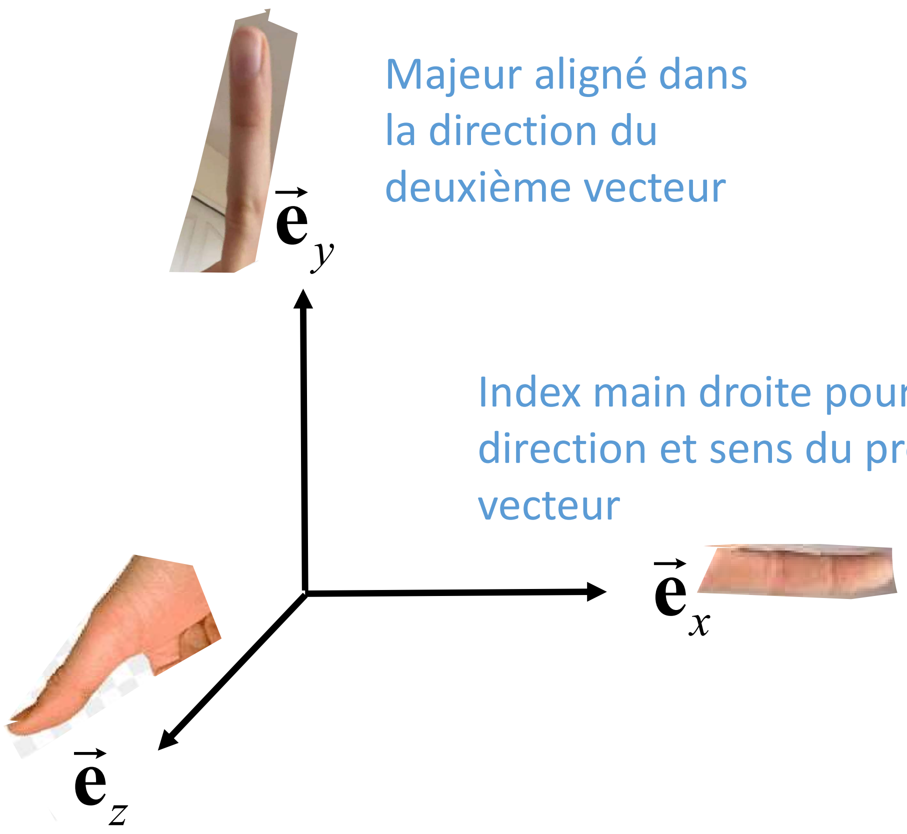
Composantes d’un vecteur (II)

Il y a deux façons de choisir les vecteurs de référence (aussi appelés « vecteurs de base ») les uns par rapport aux autres: la règle de la main droite ou la règle de la main gauche. **La convention est la règle de la main droite**.

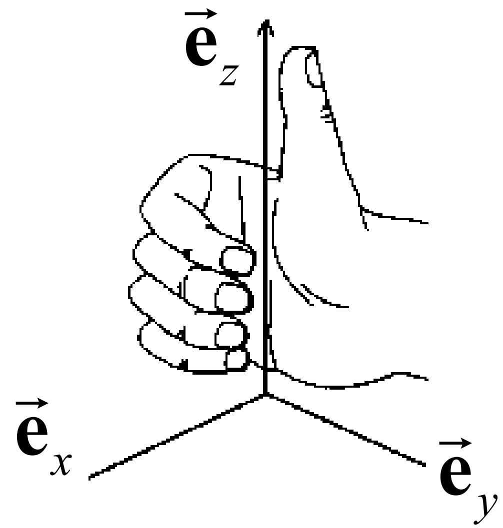
Majeur aligné dans la direction du deuxième vecteur

Index main droite pour la direction et sens du premier vecteur

Pouce main droite donnant la direction du troisième vecteur de base



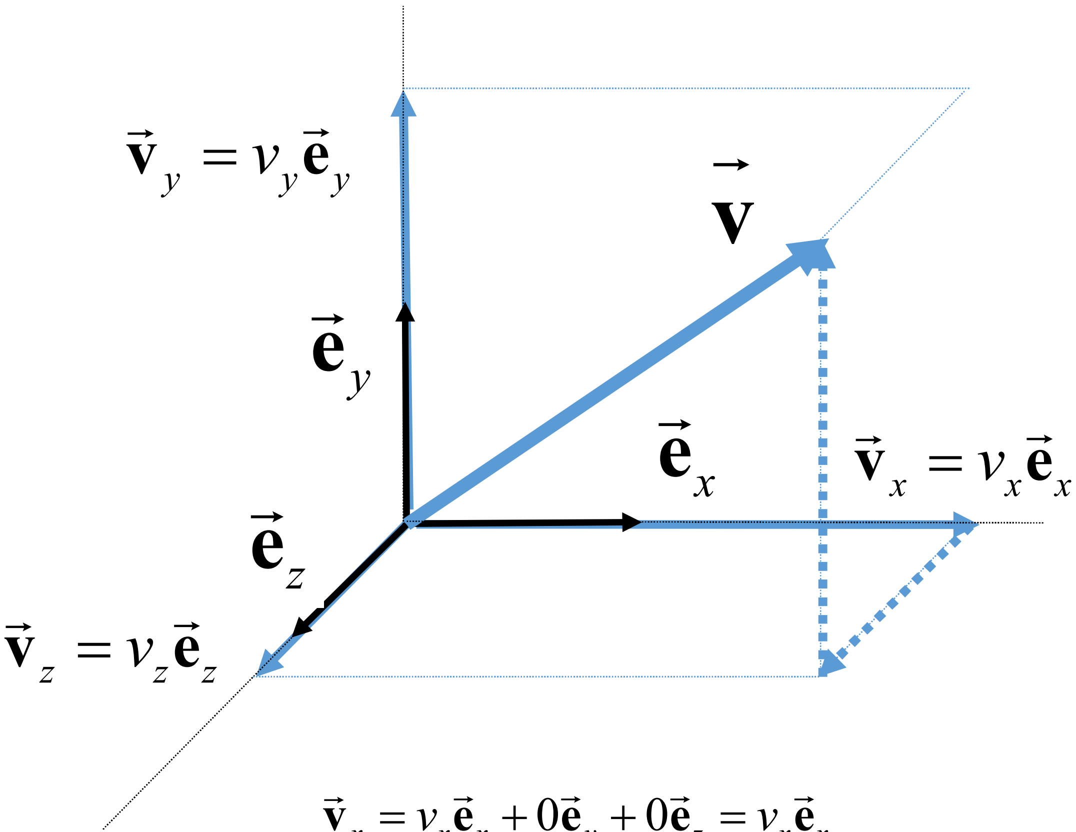
Vous pouvez aussi faire tourner le premier vecteur orienté en x, vers le deuxième en y et le troisième en z sera orienté dans la direction d’enfoncement d’une vis.



https://services.math.duke.edu/

Composantes d'un vecteur (III)

Tout vecteur peut être décrit comme une combinaison linéaire* des vecteurs de base



$$\vec{\mathbf{v}}_x = v_x \vec{\mathbf{e}}_x + 0\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z = v_x \vec{\mathbf{e}}_x$$
$$\vec{\mathbf{v}}_y = 0\vec{\mathbf{e}}_x + v_y \vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z = v_y \vec{\mathbf{e}}_y$$
$$\vec{\mathbf{v}}_z = 0\vec{\mathbf{e}}_x + 0\vec{\mathbf{e}}_y + v_z \vec{\mathbf{e}}_z = v_z \vec{\mathbf{e}}_z$$

Un vecteur est défini univoquement par 3 nombres appelés les composantes du vecteur et notés v_x, v_y, v_z ou aussi v_1, v_2, v_3 ou toute autre notation cohérente:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}} &= \vec{\mathbf{v}}_x + \vec{\mathbf{v}}_y + \vec{\mathbf{v}}_z \\ &= v_x \vec{\mathbf{e}}_x + v_y \vec{\mathbf{e}}_y + v_z \vec{\mathbf{e}}_z \\ &= v_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + v_2 \vec{\mathbf{e}}_2 + v_3 \vec{\mathbf{e}}_3\end{aligned}$$

* Combinaison linéaire = une somme de ces vecteurs chacun multiplié par un scalaire

Composantes d’un vecteur (IV)

$$\vec{\mathbf{v}} = v_x \vec{\mathbf{e}}_x + v_y \vec{\mathbf{e}}_y + v_z \vec{\mathbf{e}}_z$$

Le vecteur peut aussi s’écrire de façon très pratique en colonne (même si parfois peu apprécié des physiciens et mathématiciens) théoriciens:

$$\vec{\mathbf{v}} : \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z}$$

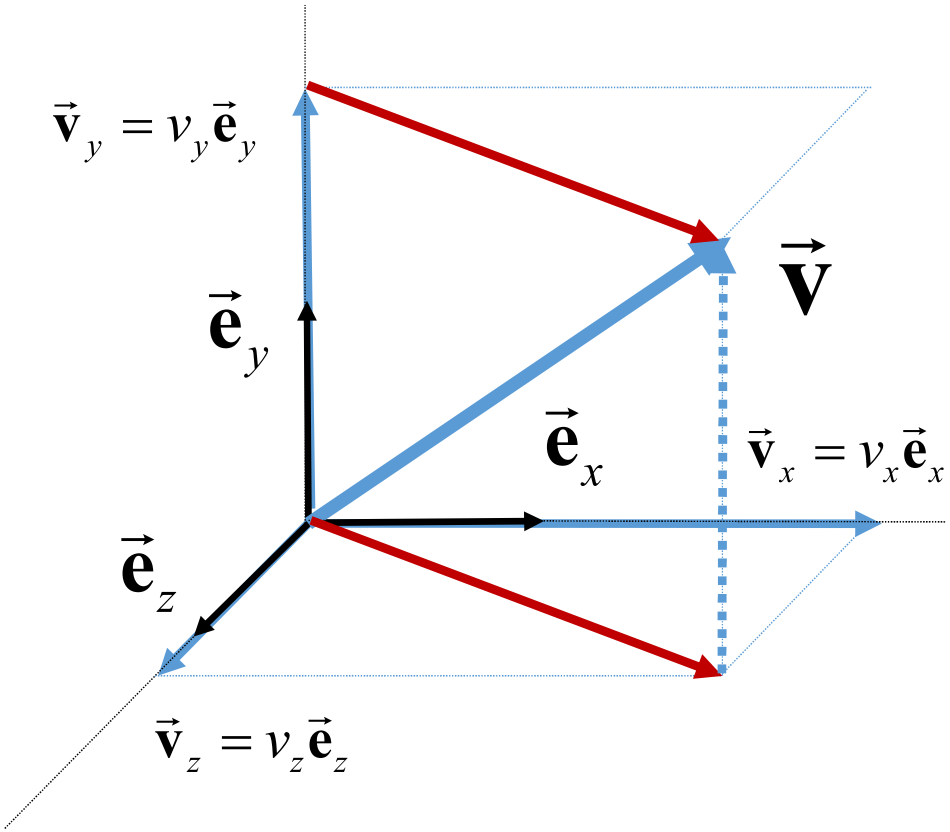
ou, avec un peu de fainéantise

$$\vec{\mathbf{v}} : \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Composantes d'un vecteur (V)

La longueur/amplitude/intensité du vecteur est appelée la **norme (ou module) du vecteur**:

$$v \equiv \left\|\vec{\mathbf{v}}\right\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



Longueur de $\vec{\mathbf{v}}_x = v_x \vec{\mathbf{e}}_x$ est égale à v_x

Longueur de $\vec{\mathbf{v}}_z = v_z \vec{\mathbf{e}}_z$ est égale à v_z

Longueur de est égale à $\sqrt{v_x^2 + v_z^2}$ par Pythagore

Longueur de $\vec{\mathbf{v}}$ est égale à $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ par Pythagore

Addition et multiplication de vecteurs via les composantes

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \left(v_x\vec{\mathbf{e}}_x + v_y\vec{\mathbf{e}}_y + v_z\vec{\mathbf{e}}_z\right) + \left(w_x\vec{\mathbf{e}}_x + w_y\vec{\mathbf{e}}_y + w_z\vec{\mathbf{e}}_z\right)$$

$$= \underbrace{\left(v_x + w_x\right)}_{R_x}\vec{\mathbf{e}}_x + \underbrace{\left(v_y + w_y\right)}_{R_y}\vec{\mathbf{e}}_y + \underbrace{\left(v_z + w_z\right)}_{R_z}\vec{\mathbf{e}}_z$$

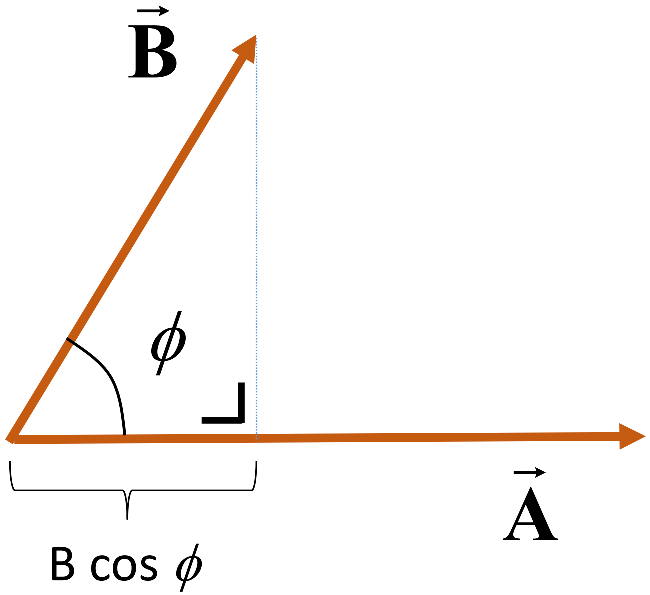
$$\vec{\mathbf{R}} = A\vec{\mathbf{v}} = A\left(v_x\vec{\mathbf{e}}_x + v_y\vec{\mathbf{e}}_y + v_z\vec{\mathbf{e}}_z\right)$$

$$= \underbrace{Av_x}_{R_x}\vec{\mathbf{e}}_x + \underbrace{Av_y}_{R_y}\vec{\mathbf{e}}_y + \underbrace{Av_z}_{R_z}\vec{\mathbf{e}}_z$$

Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire

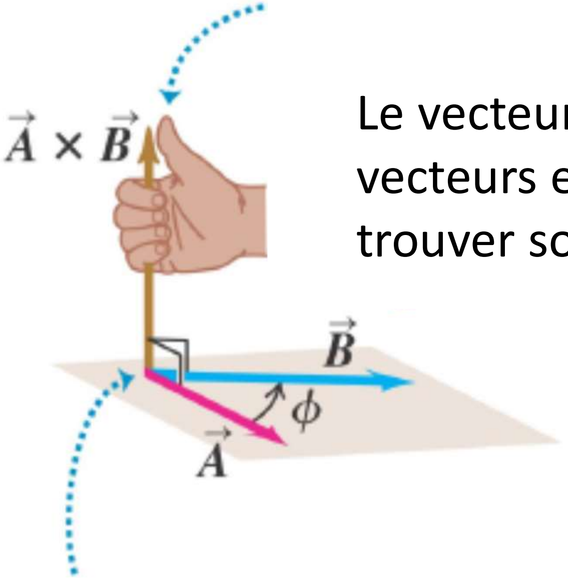
$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\phi \equiv \left\|\vec{\mathbf{A}}\right\| \left\|\vec{\mathbf{B}}\right\| \cos\phi = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



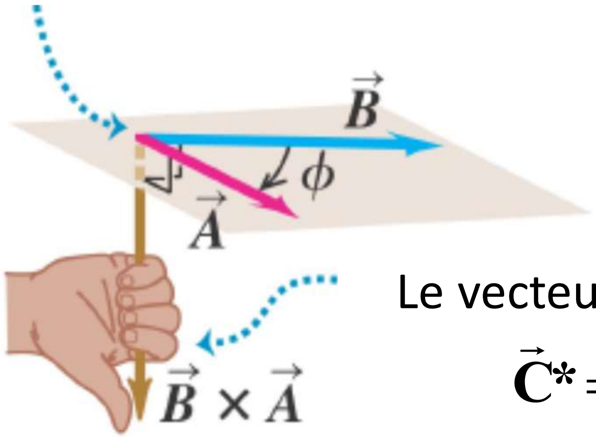
Cette égalité n'est pas triviale et requiert un petit développement (voir slide extra « note » à la fin)

Produit vectoriel (I)

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = C_x \vec{\mathbf{e}}_x + C_y \vec{\mathbf{e}}_y + C_z \vec{\mathbf{e}}_z$$



Le vecteur $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ est perpendiculaire aux deux vecteurs et on utilise la règle de la main droite pour trouver son sens (on fait tourner $\vec{\mathbf{A}}$ vers $\vec{\mathbf{B}}$)



Le vecteur

$$\vec{\mathbf{C}}^* = \vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = -\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

est l'opposé de $\vec{\mathbf{C}}$

avec $\left\|\vec{\mathbf{C}}\right\| = AB \sin\phi \equiv \left\|\vec{\mathbf{A}}\right\| \left\|\vec{\mathbf{B}}\right\| \sin\phi$

Produit vectoriel (II)

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = C_x \vec{\mathbf{e}}_x + C_y \vec{\mathbf{e}}_y + C_z \vec{\mathbf{e}}_z$$

Mais avec cela, nous n'avons pas encore les expressions de C_x, C_y, C_z en fonction de A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z ; les voici :

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y \\ C_y &= A_z B_x - A_x B_z \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x \end{aligned}$$

Note : Il y a plusieurs moyens mnémotechniques pour retenir ces expressions (je vous en parlerai plus tard)

et donc

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \left(A_y B_z - A_z B_y \right) \vec{\mathbf{e}}_x + \left(A_z B_x - A_x B_z \right) \vec{\mathbf{e}}_y + \left(A_x B_y - A_y B_x \right) \vec{\mathbf{e}}_z$$

Agenda Cours 1

La cinématique est l'analyse du mouvement sans considération des raisons (forces) qui entraînent le mouvement.

1. Unités
2. Vecteurs
3. **Cinématique**

A. Tout en 1D

Position – trajectoire - déplacement

Vitesse

Accélération

Applications

B. en 3D - formalisme vectoriel

Position – trajectoire

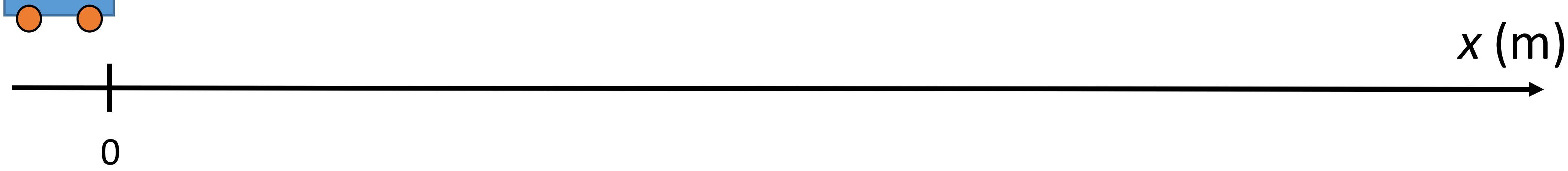
Vitesse

Accélération

Applications

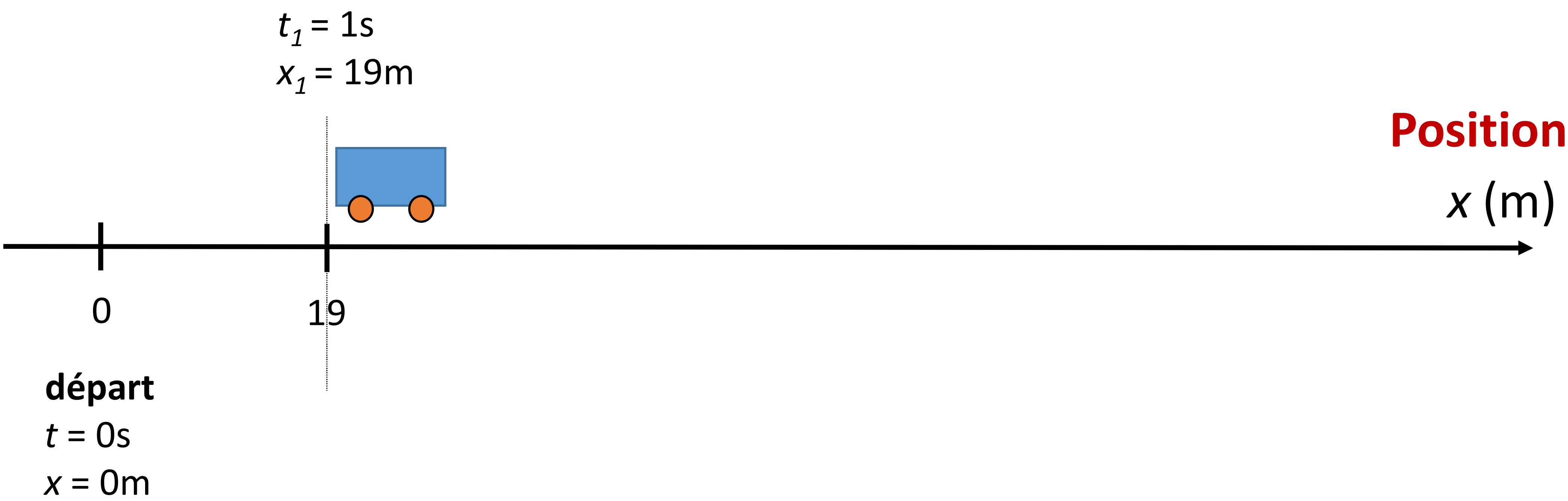
Position, déplacement et vitesse moyenne (en 1D)

Position



départ
t = 0s
x = 0m

Position, déplacement et vitesse moyenne (en 1D)



Position, déplacement et vitesse moyenne (en 1D)

$t_1 = 1$s
$x_1 = 19$m

$t_2 = 4$s
$x_2 = 277$m

intervalle de temps $\equiv \Delta t = (t_2 - t_1)$

$= 4 - 1 = 3$s

départ
$t = 0$s
$x = 0$m

déplacement $\equiv u \equiv \Delta x = (x_{final} - x_{initial}) = (x_2 - x_1)$

$= 277 - 19 = 258$m

Ce déplacement est positif car le mobile bouge dans le sens des x croissants.

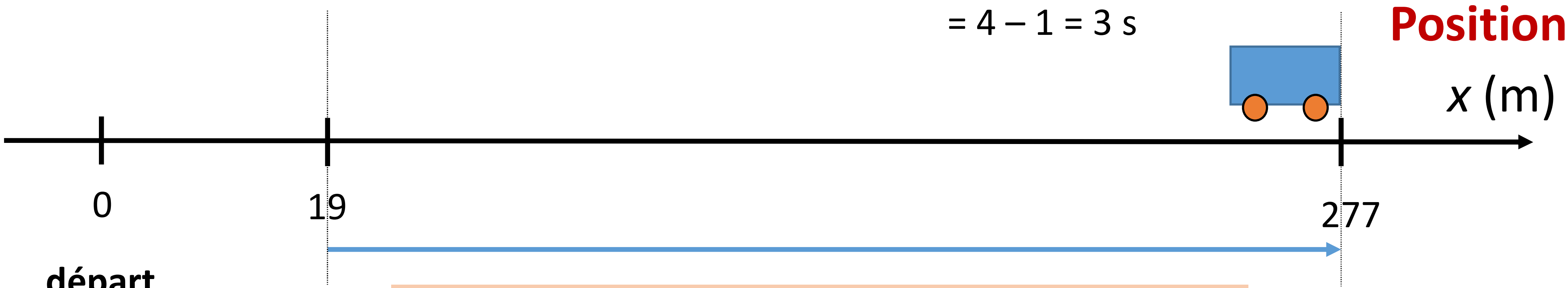
Position, déplacement et vitesse moyenne (en 1D)

$t_1 = 1\text{s}$
$x_1 = 19\text{m}$

intervalle de temps $\equiv \Delta t = (t_2 - t_1)$

$= 4 - 1 = 3$ s

$t_2 = 4$ s
$x_2 = 277$ m



départ
$t = 0\text{s}$
$x = 0\text{m}$

déplacement $\equiv u \equiv \Delta x = (x_{final} - x_{initial}) = (x_2 - x_1)$

$= 277 - 19 = 258$ m

Ce déplacement est positif car le mobile bouge dans le sens des x croissants.

vitesse moyenne entre temps t_1 et $t_2 = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

$= 258/3 = 86$ m/s

Note
Notation mathématique de différence entre deux termes

«Δ » *veut dire :* ***« différence finie »*** *- juste une différence entre deux quantités, celle finale moins celle initiale.*

«d » ou «δ » *veut dire :* ***« différence infinitésimale »*** *c'est-à-dire, entre deux termes infiniment proches l'un de l'autre (toujours le final moins l'initial)*

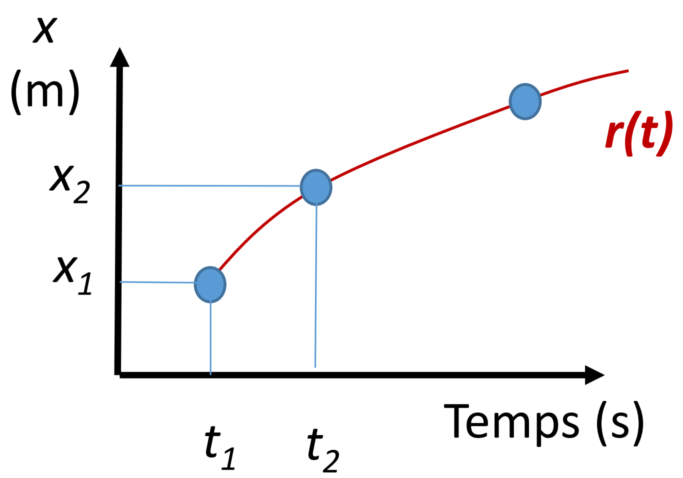
Position

La position évolue durant le mouvement et donc avec le temps; la position décrit une **trajectoire**.

temps *t* (s)	Position *x* (m)
t_1	x_1
t_2	x_2
t_3	x_3
…	…

Option 1 : La trajectoire est décrite « point par point » à partir d'un tableau.

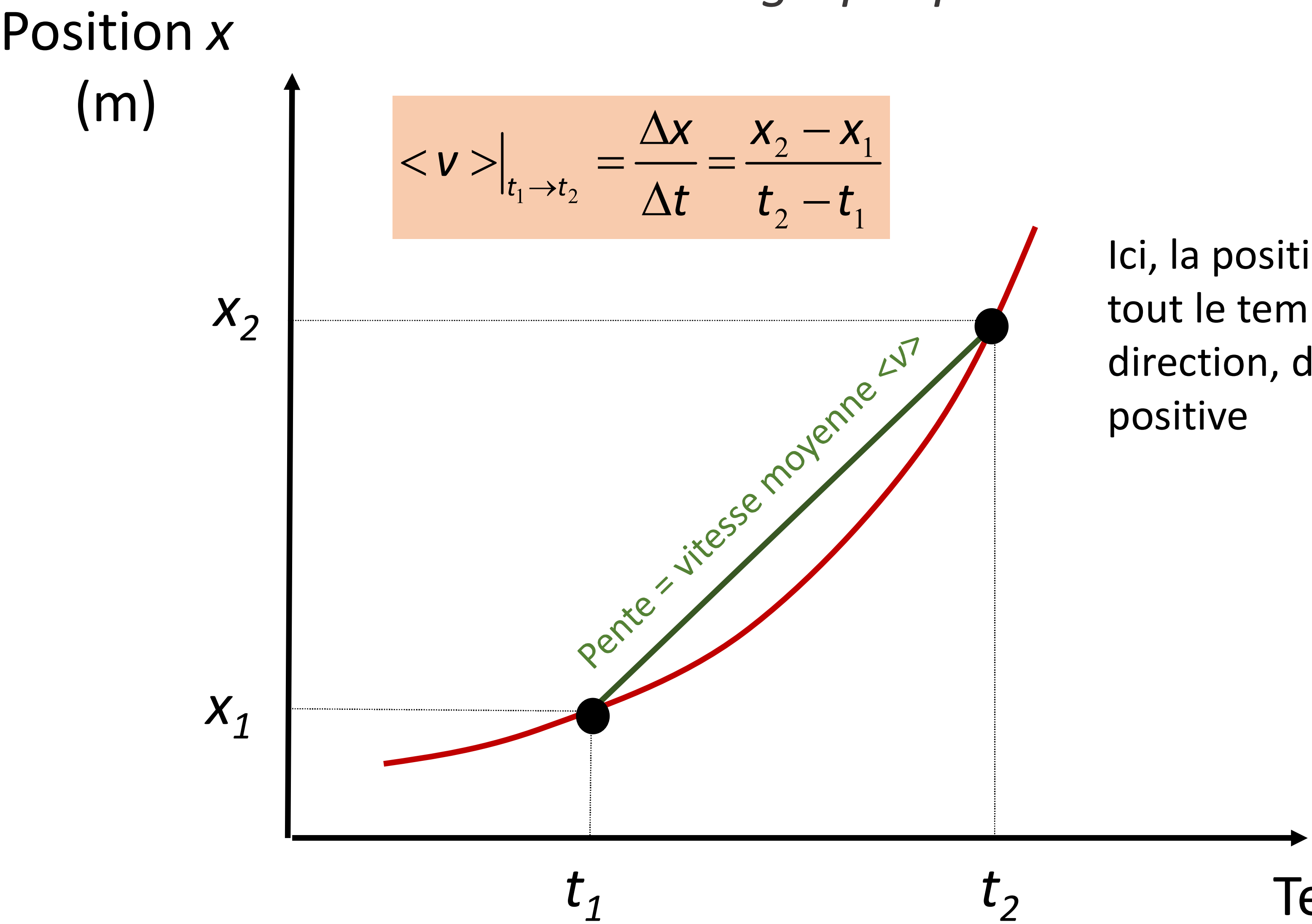
Option 2 : La trajectoire est décrite par **une fonction mathématique du temps:** ***r(t)*** – ce qui est bien plus puissant (et c'est ce que l'on va faire !)



Retour sur la vitesse moyenne (1D)

Vue graphique

$$< v > \Big|_{t_1 \to t_2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

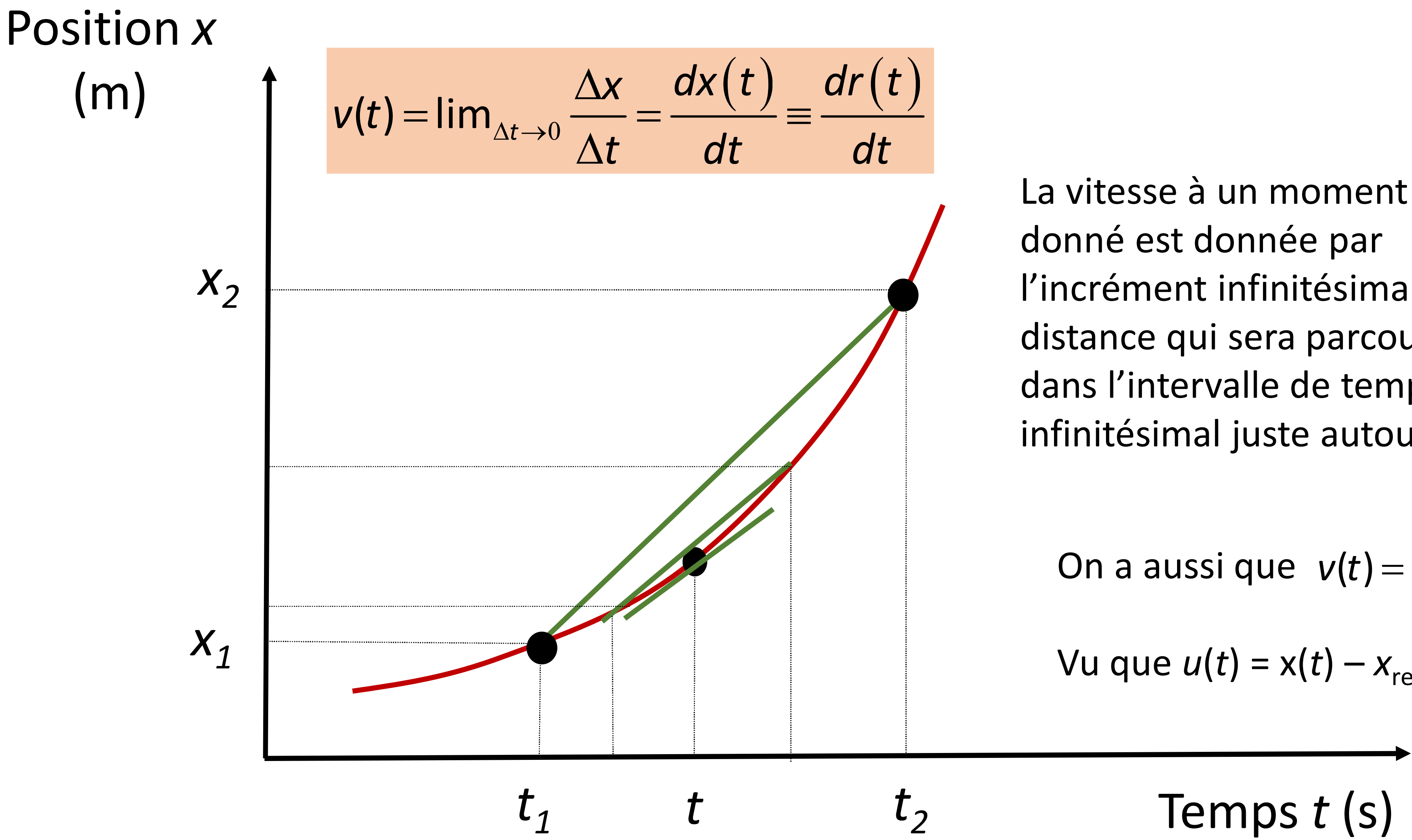


Ici, la position augmente tout le temps dans la même direction, donc la vitesse est positive

La vitesse instantanée (1D)

Intuition graphique

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} \equiv \frac{dr(t)}{dt}$$

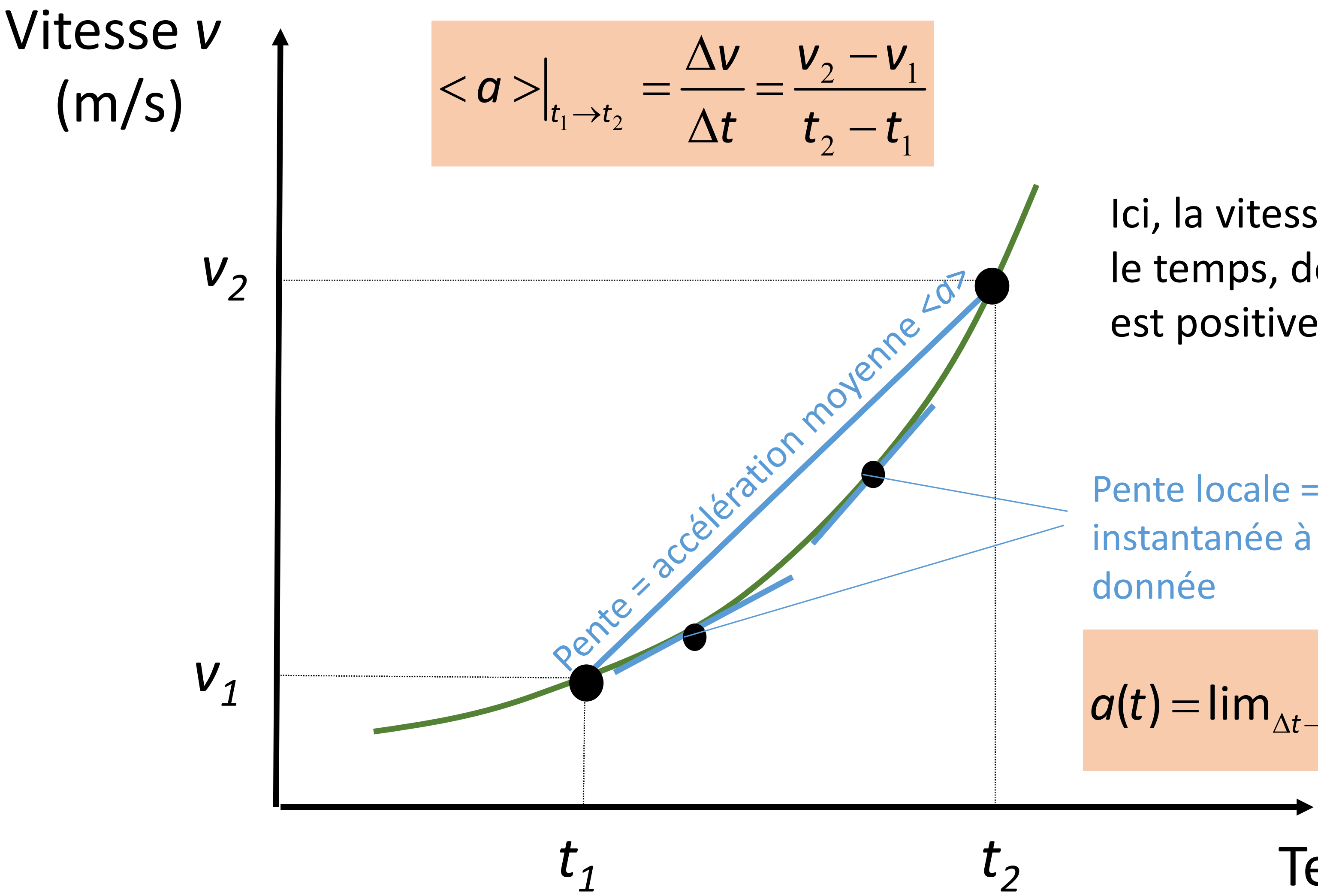


La vitesse à un moment t donné est donnée par l'incrément infinitésimal de distance qui sera parcouru dans l'intervalle de temps infinitésimal juste autour de t.

On a aussi que $v(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$

Vu que $u(t) = x(t) - x_{ref}$

Accélération moyenne et accélération instantanée (1D)



Ici, la vitesse augmente tout le temps, donc l'accélération est positive

Pente locale = accélération instantanée à l'instant et position donnée

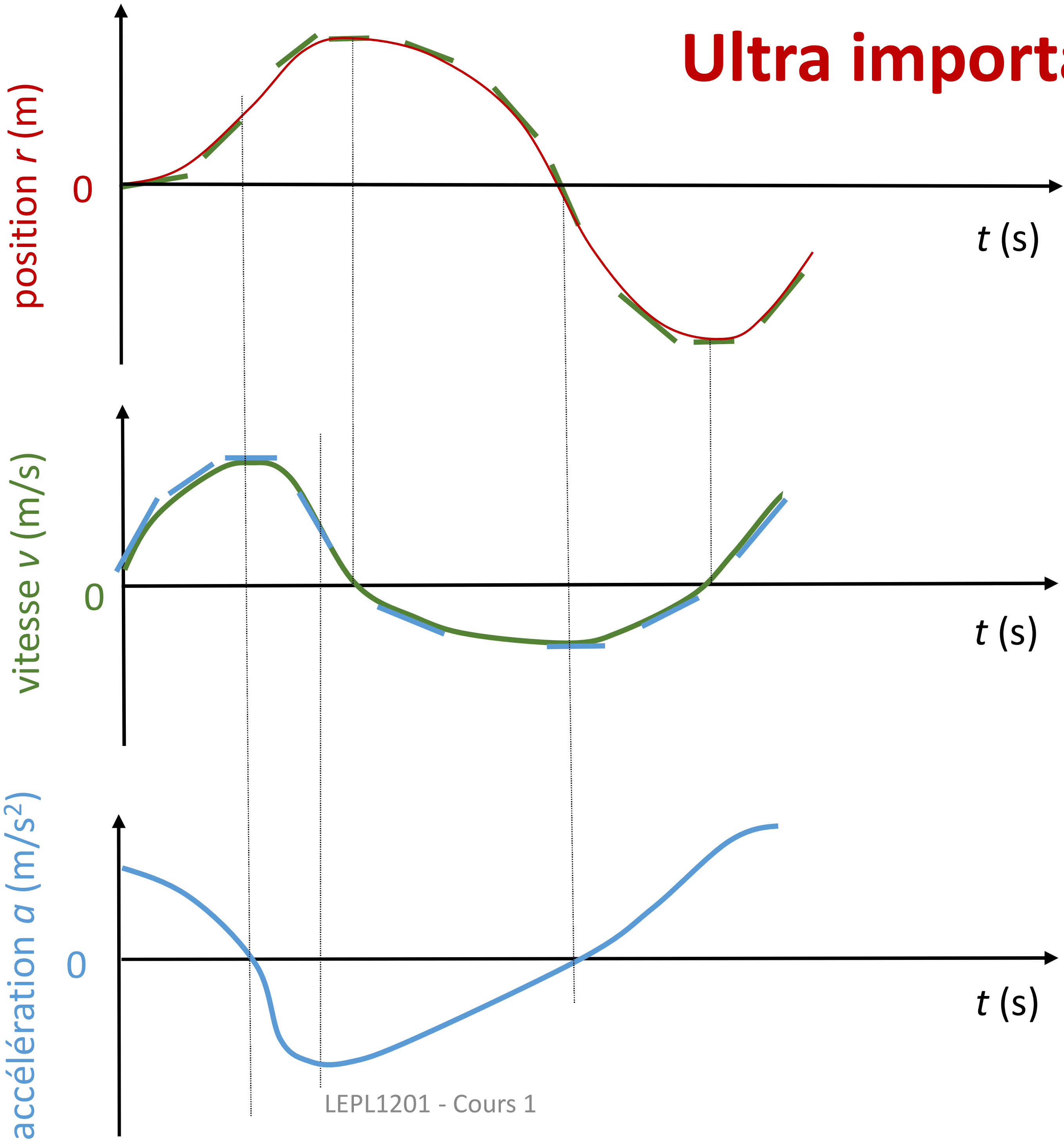
$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt}$$

En résumé

Ultra important

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

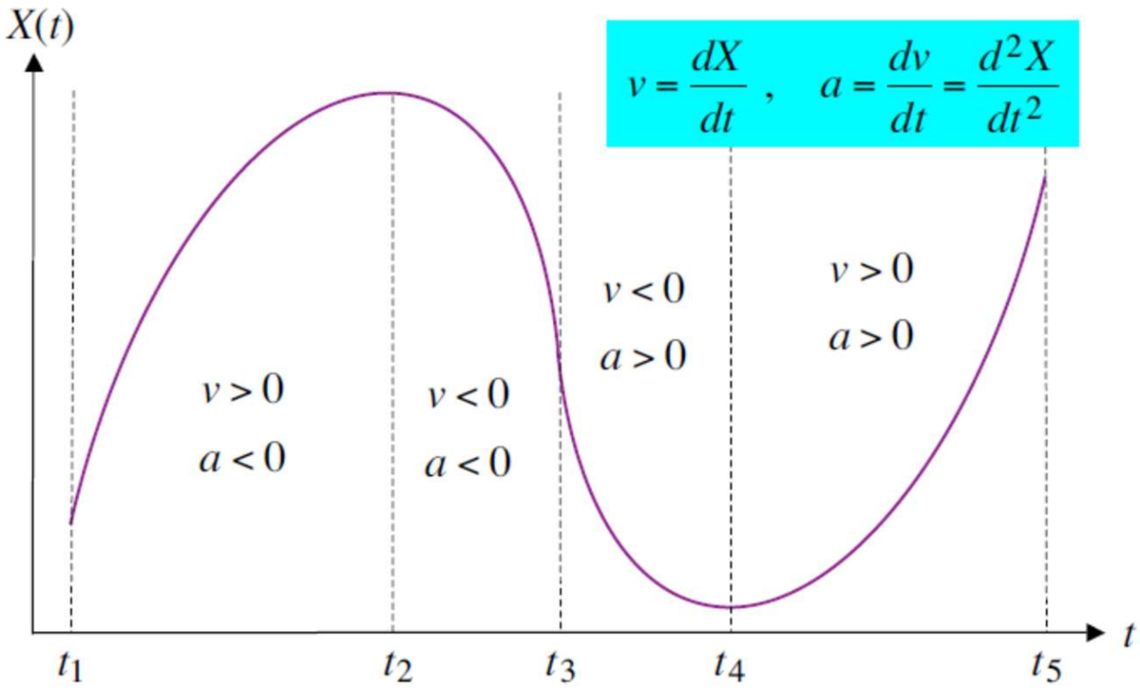
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt^2}$$



Synthèse

Même message que slide précédent

temps	$t_1 \le t < t_2$	$t = t_2$	$t_2 < t < t_3$	$t = t_3$	$t_3 < t < t_4$	$t = t_4$	$t_4 < t \le t_5$
vitesse	$v(t) > 0$	$v(t_2) = 0$	$v(t) < 0$	$v(t_3) < 0$	$v(t_2) < 0$	$v(t_4) = 0$	$v(t) > 0$
accélération	$a(t) < 0$	$a(t_2) < 0$	$a(t) < 0$	$a(t_3) = 0$	$a(t) > 0$	$a(t_4) > 0$	$a(t) > 0$

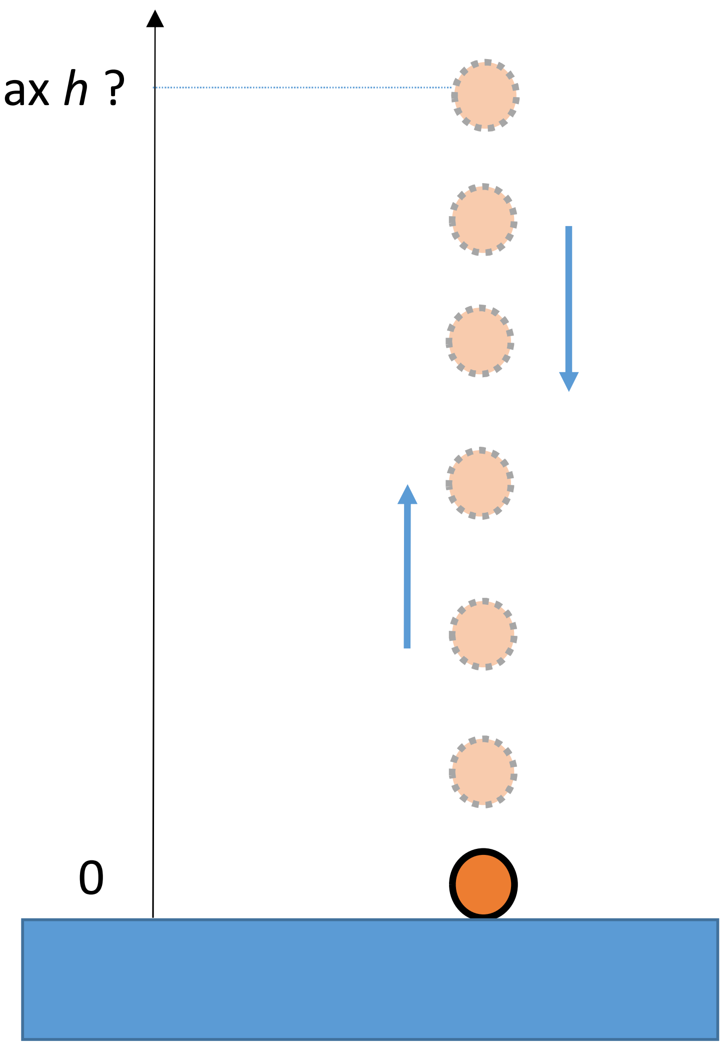


de E. Deleersnijder

Applications en 1D
Le lancement vertical (I)

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2r(t)}{dt^2}$$

$$v(t)=\frac{dr(t)}{dt}$$



L'objet est lancé à partir du sol avec une vitesse v_0 (positive au vu du repère) sous une accélération de -10 m/s² (le « - » indique que l'objet accélère dans le sens inverse de l'axe *y*) – *c'est l'accélération gravitationnelle a = -g* (voir cours 2)

Quelle est l'évolution de la vitesse et de la position avec le temps, en particulier la hauteur maximum?

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}\Leftrightarrow dv(t)=a(t)dt$$

$$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t a\,dt\Leftrightarrow v-v_0=\left[-gt\right]_0^t\Leftrightarrow \quad \boxed{v(t)=v_0-gt}$$

$$dy(t)=v(t)dt\Leftrightarrow\int_0^y dy=\int_0^t(v_0-gt)dt$$

$$\Leftrightarrow y=\left[v_0t-\frac{gt^2}{2}\right]_0^t\Leftrightarrow \quad \boxed{y(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}}$$

Applications en 1D
Le lancement vertical (II)

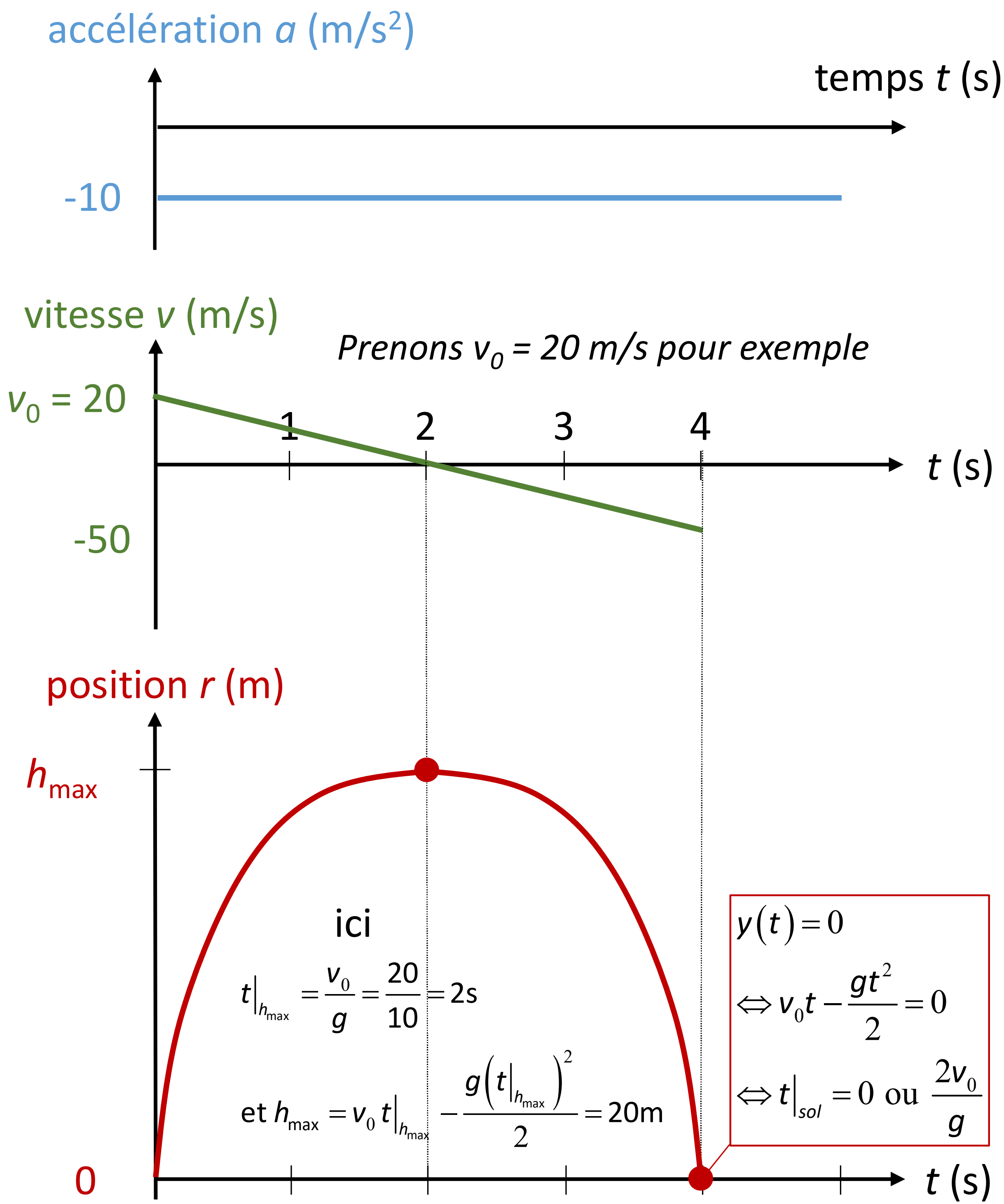
$$a(t) = -g$$

$$v(t) = v_0 - gt$$

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

La hauteur maximale est atteinte quand la vitesse s'annule (après, elle devient négative ce qui indique que l'objet redescend).
Mathématiquement, cet instant correspond au moment où la dérivée de la position devient zéro:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Leftrightarrow t|_{h_{\max}} = \frac{v_0}{g}$$



Agenda Cours 1

1. Unités
2. Vecteurs

3. Cinématique

A. Tout en 1D

- Position – trajectoire - déplacement
- Vitesse
- Accélération
- Applications

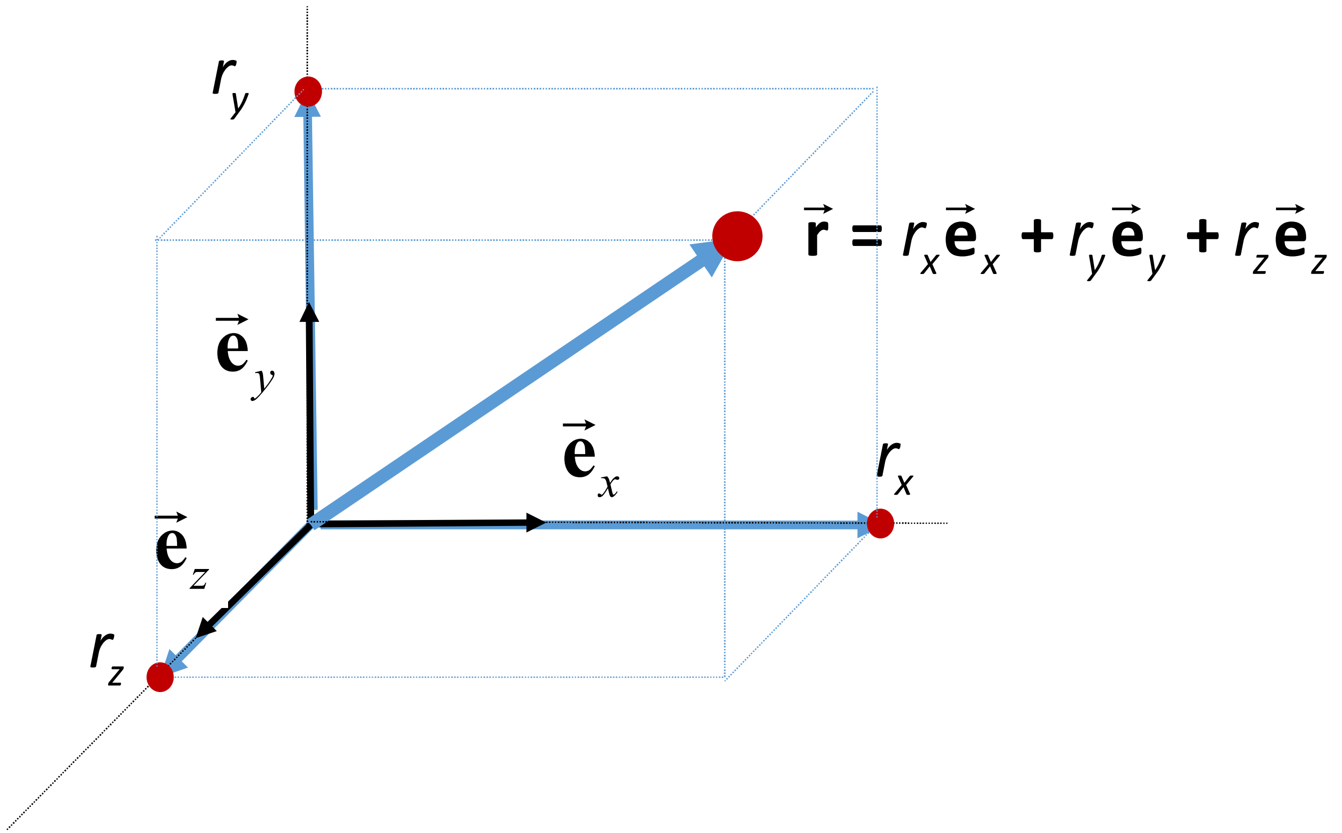
Note: Les formules et développements seront vus de façon générale (en 3D), mais la plupart des exemples resteront en 2D afin de pouvoir, entre autre, représenter les choses simplement.

B. En 3D avec le formalisme vectoriel

- Position – trajectoire
- Vitesse
- Accélération
- Applications

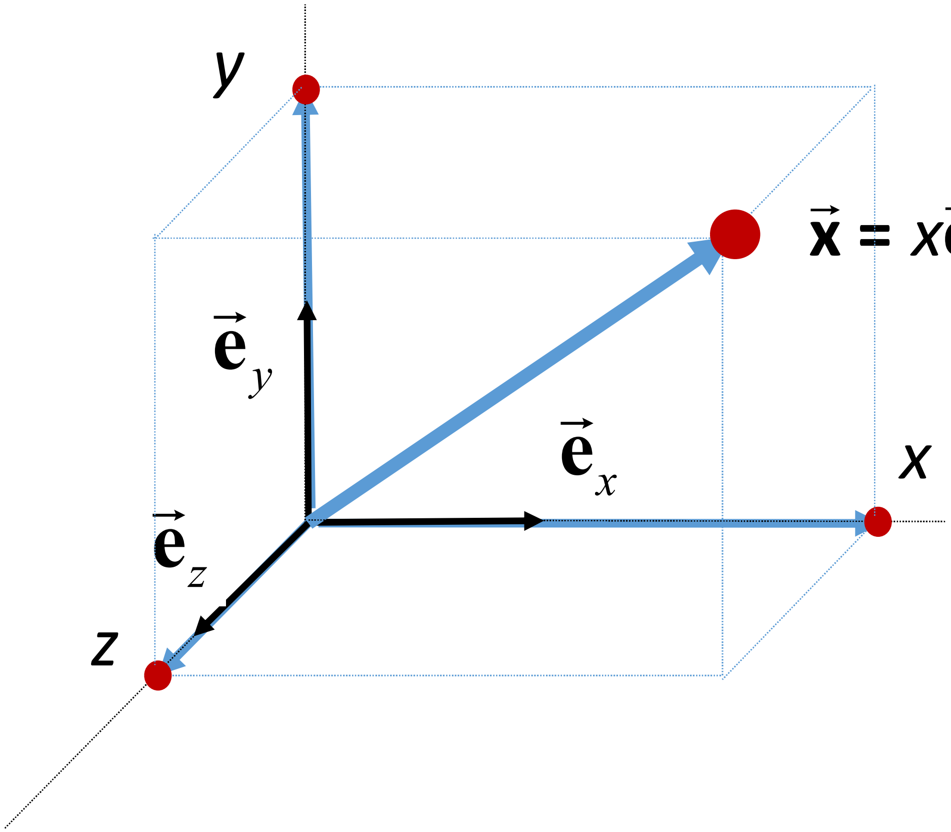
Position (I)

La position est représentée par un vecteur $\vec{\mathbf{r}}$ (le « vecteur position ») de composantes r_x, r_y et r_z, qui sont les coordonnées associées à sa position.



Position (II)

Autre notation : on utilise aussi souvent la notation $\vec{\mathbf{x}}$ au lieu de $\vec{\mathbf{r}}$ pour le « vecteur position » de composantes *x*, *y* et *z*.



$$\vec{\mathbf{x}} = x\vec{\mathbf{e}}_x + y\vec{\mathbf{e}}_y + z\vec{\mathbf{e}}_z$$

Note : Il ne faut juste pas confondre le vecteur $\vec{\mathbf{x}}$ et sa première composante *x*.

Position (III)

La position évolue dans le temps et décrit une **trajectoire**. Sa représentation par une fonction mathématique est très riche.

On a donc toujours que $\vec{\mathbf{r}}(t) = r_x(t)\vec{\mathbf{e}}_x + r_y(t)\vec{\mathbf{e}}_y + r_z(t)\vec{\mathbf{e}}_z$

avec $r_x(t)$, $r_y(t)$ et $r_z(t)$ des fonctions de la variable temps t.

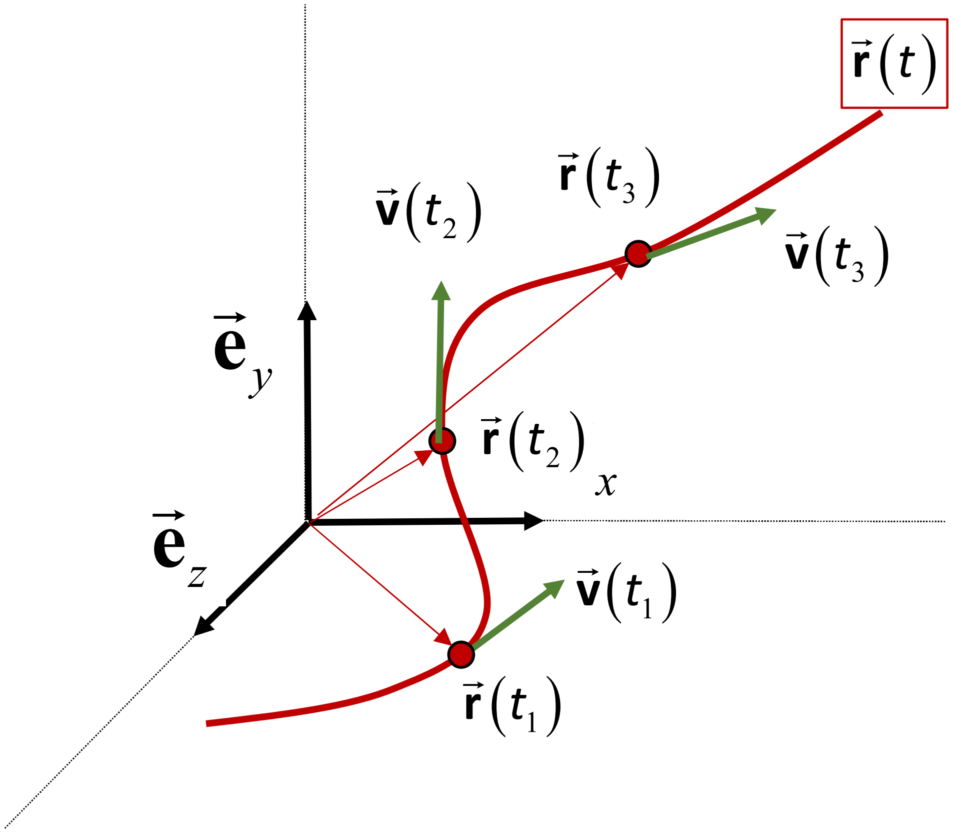
par exemple $\vec{\mathbf{r}}(t) = \underbrace{(2+t)}_{r_x(t)}\vec{\mathbf{e}}_x + \underbrace{t^2}_{r_y(t)}\vec{\mathbf{e}}_y + \underbrace{0}_{r_z(t)}\vec{\mathbf{e}}_z$

Note: parfois ces fonctions sont imposées par nous (ou par une machine), ou parfois par les lois de la nature.

ce qui veut dire qu'en t = 0s, les composantes/coordonnées de la position sont (2,0,0) [m] et en t = 5s, on a (7,25,0) [m]

Vitesse (I)

La vitesse est la variation de la position avec le temps. La vitesse peut être constante ou changer avec le temps. Elle est représentée par un vecteur qui est tangent à la trajectoire à chaque instant.



Chaque position (à un temps donné) correspond à un vecteur position.

Une petite variation du vecteur position durant un petit intervalle de temps correspond à la vitesse instantanée.

Vitesse (II)

Mathématiquement maintenant
(dans le formalisme vectoriel)

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt}$$
$$= \underbrace{\frac{dr_x(t)}{dt}}_{v_x(t)} \vec{\mathbf{e}}_x + \underbrace{\frac{dr_y(t)}{dt}}_{v_y(t)} \vec{\mathbf{e}}_y + \underbrace{\frac{dr_z(t)}{dt}}_{v_z(t)} \vec{\mathbf{e}}_z$$

Note : si on ne dit rien, « vitesse » veut dire vitesse instantanée

$$v_x(t) = \frac{dr_x(t)}{dt} \; ; \; v_y(t) = \frac{dr_y(t)}{dt} \; ; \; v_z(t) = \frac{dr_z(t)}{dt}$$

$$\left\| \vec{\mathbf{v}}(t) \right\| \equiv v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}$$

Autre notation usuelle

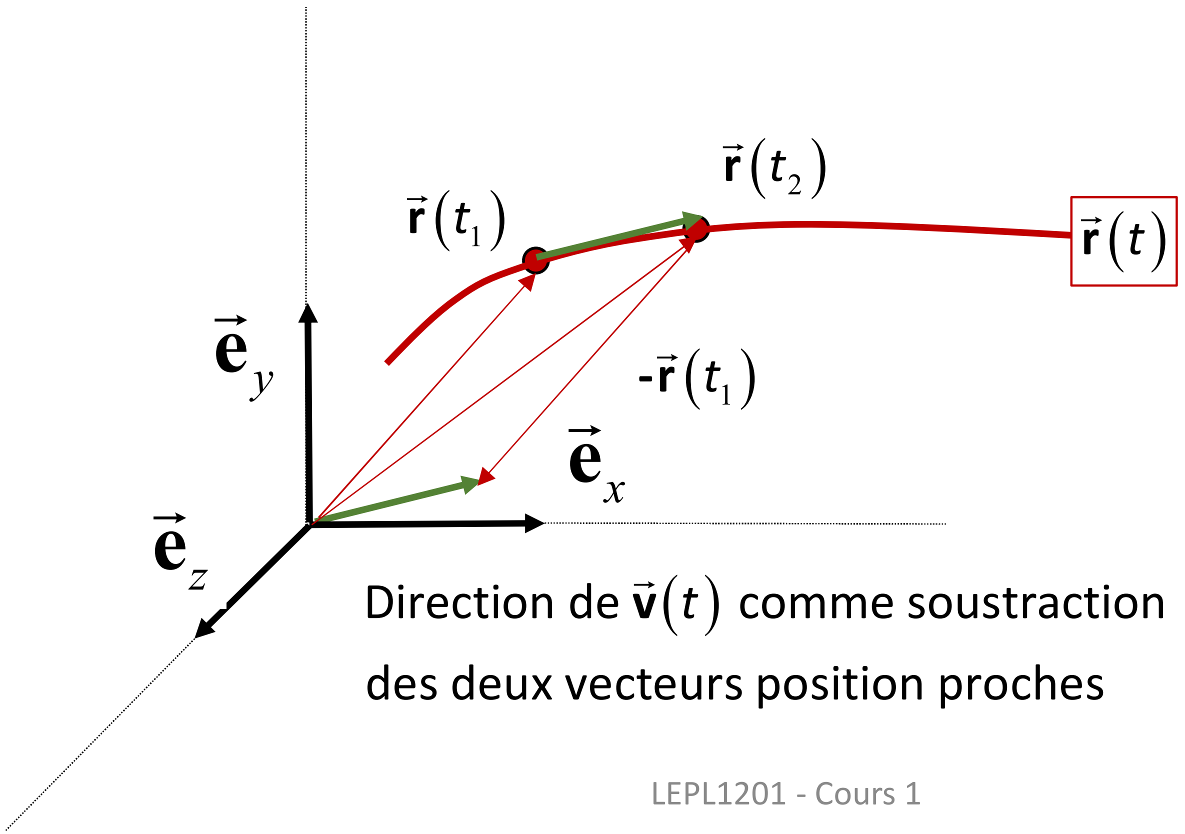
$$\vec{\mathbf{v}} = u\vec{\mathbf{e}}_x + v\vec{\mathbf{e}}_y + w\vec{\mathbf{e}}_z$$

Vitesse (III)

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1)}{\Delta t}$$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire à chaque instant

essayons de visualiser en prenant deux positions très proches



Direction de $\vec{\mathbf{v}}(t)$ comme soustraction des deux vecteurs position proches

Accélération

L'accélération est le taux de variation de la vitesse avec le temps. L'accélération peut être constante (ce compris nulle) ou varier avec le temps. Elle est représentée par un vecteur

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}(t)}{dt}$$

$$= \underbrace{\frac{dv_x(t)}{dt}}_{a_x(t)} \vec{\mathbf{e}}_x + \underbrace{\frac{dv_y(t)}{dt}}_{a_y(t)} \vec{\mathbf{e}}_y + \underbrace{\frac{dv_z(t)}{dt}}_{v_z(t)} \vec{\mathbf{e}}_z$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2 r_x(t)}{dt^2} \qquad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2 r_y(t)}{dt^2} \qquad a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d^2 r_z(t)}{dt^2}$$

Accélération (II)

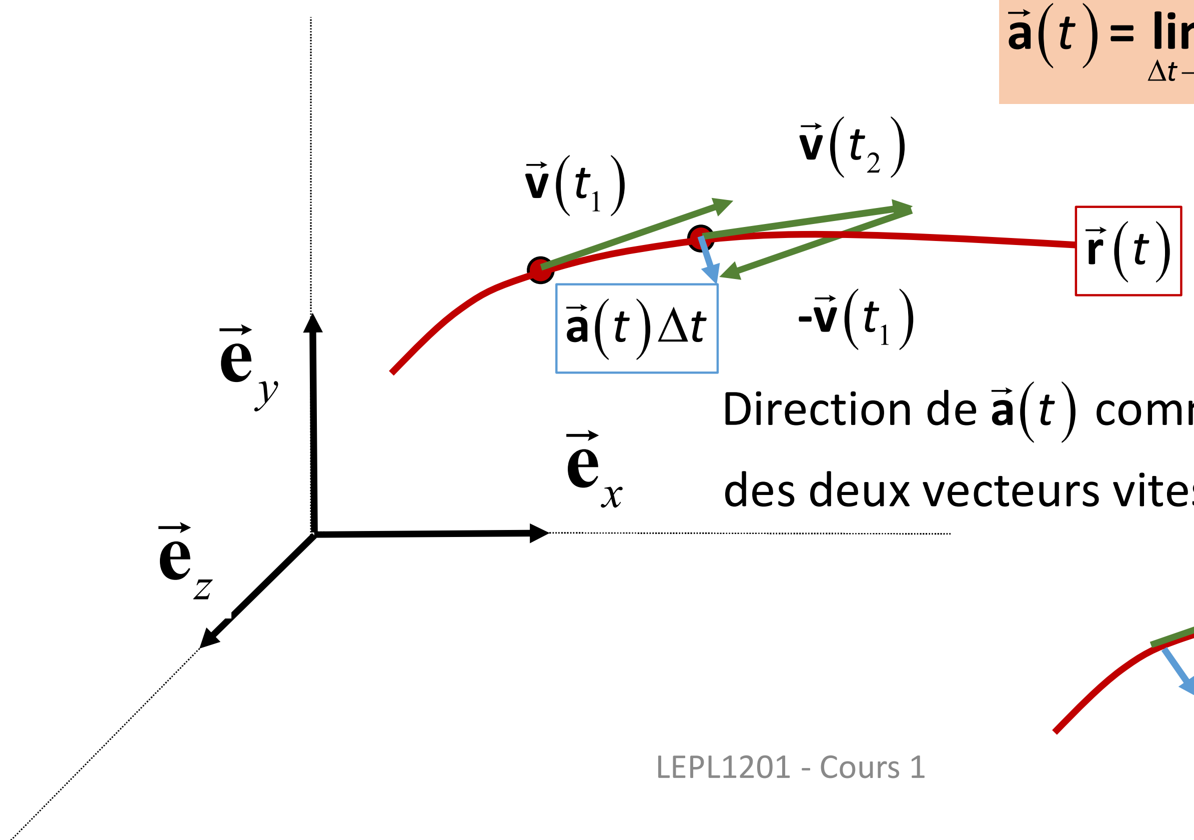
Le vecteur accélération est à chaque instant orienté vers l'intérieur de la trajectoire

CHANGER DE DIRECTION (« TOURNER ») IMPLIQUE TOUJOURS UNE ACCELERATION MEME SI LA NORME DU VECTEUR VITESSE RESTE CONSTANTE

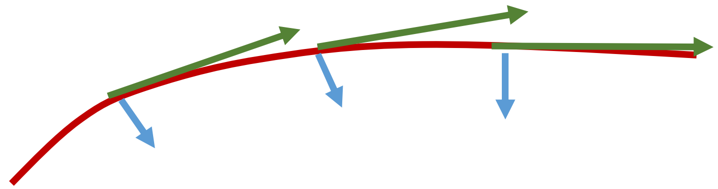
(voir cours 9 pour en tirer toutes les conséquences, *accélération centripète etc*)

essayons de visualiser

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{v}}(t_2) - \vec{\mathbf{v}}(t_1)}{\Delta t}$$



Direction de $\vec{\mathbf{a}}(t)$ comme soustraction des deux vecteurs vitesse proches



Accélération moyenne

$$\left\langle \vec{\mathbf{a}} \right\rangle_{t_1}^{t_2} \equiv \vec{\mathbf{a}}_{\text{moyenne entre deux instants}} = \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{v}}(t_2) - \vec{\mathbf{v}}(t_1)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1}{t_2 - t_1}$$

Ex. Que vaut l'accélération moyenne entre 0s et 5s d'un mobile parcourant la trajectoire suivante : $\vec{\mathbf{r}}(t) = \underbrace{(2+t)}_{r_x(t)}\vec{\mathbf{e}}_x + \underbrace{t^2}_{r_y(t)}\vec{\mathbf{e}}_y + \underbrace{0}_{r_z(t)}\vec{\mathbf{e}}_z$

On a $\vec{\mathbf{v}}(t) = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt} = 1\vec{\mathbf{e}}_x + 2t\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z$

Donc $\vec{\mathbf{v}}(t = 0s) = 1\vec{\mathbf{e}}_x + 0\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z$ et $\vec{\mathbf{v}}(t = 5s) = 1\vec{\mathbf{e}}_x + 10\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z$

$$\vec{\mathbf{a}}_{moyenne}\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1\vec{\mathbf{e}}_x + 10\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z - \left(1\vec{\mathbf{e}}_x + 0\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z\right)}{5-0} = 0\vec{\mathbf{e}}_x + 2\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z \ (\text{m/s}^2)$$

et

$$a_{moyenne}\Big|_{t_1}^{t_2} = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2 \ (\text{m/s}^2)$$

Synthèse: *de l'accélération à la vitesse, à la position*
Formules générales « in extenso »

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}(t)}{dt}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2r_x(t)}{dt^2} \qquad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2r_y(t)}{dt^2} \qquad a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d^2r_z(t)}{dt^2}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \Leftrightarrow a_x(t)dt = dv_x(t) \Leftrightarrow \int_0^t a_x(t)dt = \int_0^t dv_x(t) = v_x(t) - \underbrace{v_x(0)}_{v_{x,0}}$$

$$v_x(t) = v_{x,0} + \int_0^t a_x(t)dt; \;\; v_y(t) = v_{y,0} + \int_0^t a_y(t)dt; \;\; v_z(t) = v_{z,0} + \int_0^t a_z(t)dt$$

$$r_x(t) = r_{x0} + v_{x,0}t + \int\int_0^t a_x(t)\,dt^2$$

$$r_y(t) = r_{y0} + v_{y,0}t + \int\int_0^t a_y(t)\,dt^2$$

$$r_z(t) = r_{z0} + v_{z,0}t + \int\int_0^t a_z(t)\,dt^2$$

Donc, pour résoudre un problème de cinématique, vous avez besoin d'informations sur l'évolution avec le temps des vecteurs position, vitesse ou accélération ce compris les valeurs de référence /initiales (en gros, que l'on vous donne une des fonctions – ou une façon de les trouver).

Quelques cas particuliers très importants avec lesquels vous allez jouer durant les séances d'exercices (et chez vous)

MRU = mouvement rectiligne uniforme = pas d'accélération

Accélération nulle

$$a_x(t) = 0; a_y(t) = 0; a_z(t) = 0$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le MRU est la seule possibilité d'avoir un mouvement sans accélération

$$v_x(t) = v_{x,0} + \int_0^t a_x(t)\,dt = v_{x,0}; v_y(t) = v_{y,0}; v_z(t) = v_{z,0}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) : \begin{bmatrix} v_{x,0} \\ v_{y,0} \\ v_{z,0} \end{bmatrix}$$

La vitesse est constante en norme et en direction

$$x(t) = x_0 + v_{x,0}t + \int\int_0^t a_x(t)\,dt^2 = x_0 + v_{x,0}t$$

$$y(t) = y_0 + v_{y,0}t$$

$$z(t) = z_0 + v_{z,0}t$$

$$\vec{\mathbf{r}}(t) : \begin{bmatrix} x_0 + v_{x,0}t \\ y_0 + v_{y,0}t \\ z_0 + v_{z,0}t \end{bmatrix}$$

La position évolue proportionnellement au temps

MRUA = accélération constante

$$a_x(t) = a_x ; a_y(t) = a_y ; a_z(t) = a_z$$

avec a_x, a_y, a_z constant

$$v_x(t) = v_{x,0} + \int_0^t a_x(t)\,dt = v_{x,0} + a_x t$$

$$v_y(t) = v_{y,0} + a_y t$$

$$v_z(t) = v_{z,0} + a_z t$$

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} t + \int\int_0^t a_x(t)\,dt^2 = x_0 + v_{x,0} t + a_x \frac{t^2}{2}$$

$$y(t) = y_0 + v_{y,0} t + a_y \frac{t^2}{2}$$

$$z(t) = z_0 + v_{z,0} t + a_z \frac{t^2}{2}$$

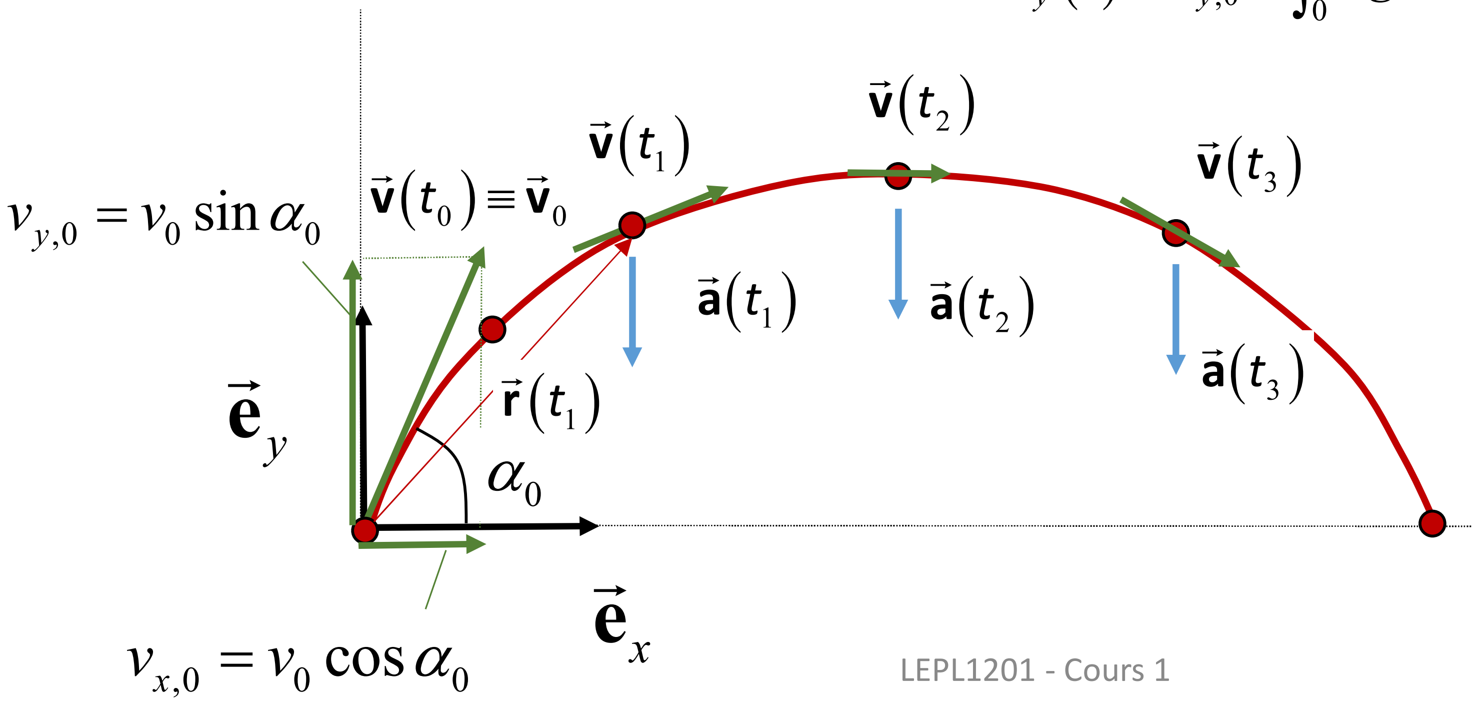
Application typique du MRUA

Le projectile en 2D (I)

On shoote sur un ballon ou on tire un projectile avec vitesse et position initiale connues et accélération connue = la gravité (des variantes sont possibles avec d'autres infos). Sur cette base, calculez l'évolution de la vitesse et de la position.

$$a_x(t) = 0; a_y(t) = -g \quad \text{ou} \quad \vec{\mathbf{a}}(t) : \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x,0} + \int_0^t a_x(t)\,dt = v_{x,0} \\ v_y(t) &= v_{y,0} + \int_0^t -g\,dt = v_{y,0} - gt \end{aligned}\right\} \vec{\mathbf{v}}(t) : \begin{bmatrix} v_{x,0} \\ v_{y,0} - gt \end{bmatrix}$$

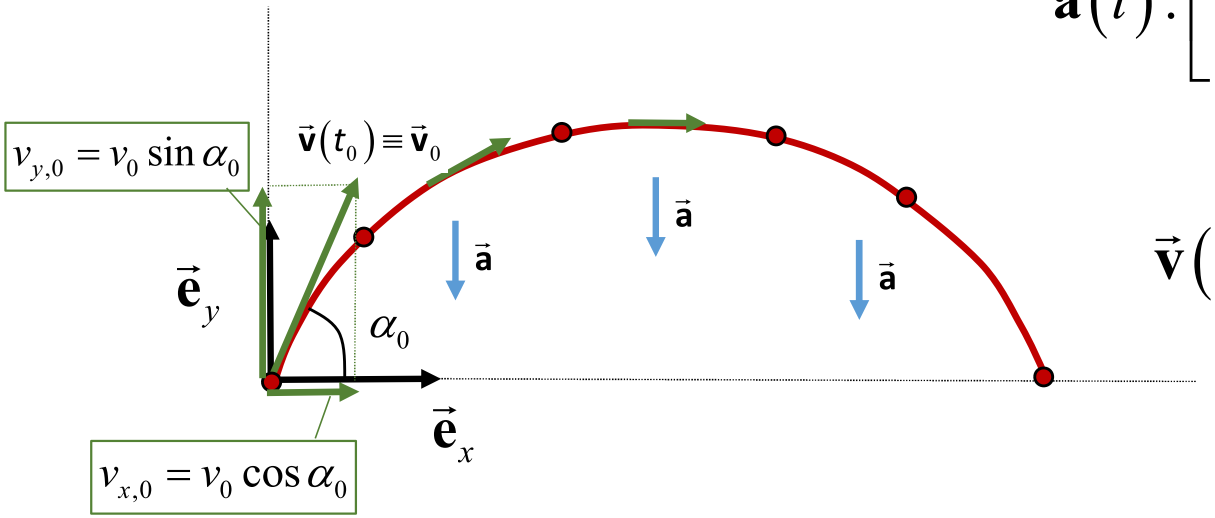


$$\left.\begin{aligned} r_x(t) &\equiv x(t) = \underbrace{x_0}_{\text{ici } 0} + v_{x,0}t \\ r_y(t) &\equiv y(t) = \underbrace{y_0}_{\text{ici } 0} + v_{y,0}t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\vec{\mathbf{r}}(t) : \begin{bmatrix} \underbrace{x_0}_{\text{ici } 0} + v_{x,0}t \\ \underbrace{y_0}_{\text{ici } 0} + v_{y,0}t - \frac{gt^2}{2} \end{bmatrix}$$

Application typique du MRUA

Le projectile en 2D (I)



$$\vec{a}(t): \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}(t): \begin{bmatrix} \underbrace{x_0}_{\text{ici } 0} + v_{x,0}t \\ \underbrace{y_0}_{\text{ici } 0} + v_{y,0}t - \dfrac{gt^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}(t): \begin{bmatrix} v_{x,0} \\ v_{y,0} - gt \end{bmatrix}$$

Vous pouvez alors vous poser plein de questions intéressantes :

- Quel est le point le plus haut qui est atteint ? (moment ou v_y s'annule)
- Distance de retombée au sol ? (le moment ou la position en y s'annule)
- Temps correspondant au moment de l'impact au sol ?
- Quel est le bon angle de tir α_0 pour atteindre un point donné ?
- etc

Application typique du MRUA

Le projectile en 2D (I)

Voici ce que vous trouverez dans le formulaire (donné aussi à l'examen)

Mouvement d'un projectile

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Résolvez un maximum de problèmes/exercices pour pouvoir jongler sans difficulté avec ces concepts !

Synthèse du cours 1

- Une quantité physique sans unité n'a pas de signification !
- Un vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ contient une information de direction et d'amplitude.
- Le vecteur est défini par ses composantes dans un repère $\vec{\mathbf{v}} = v_x\vec{\mathbf{e}}_x + v_y\vec{\mathbf{e}}_y + v_z\vec{\mathbf{e}}_z$
- L'amplitude est donnée par $v \equiv \left\|\vec{\mathbf{v}}\right\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
- Le produit scalaire est un scalaire : $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\phi \equiv \left\|\vec{\mathbf{A}}\right\|\left\|\vec{\mathbf{B}}\right\|\cos\phi = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$
- Le produit vectoriel est un vecteur : $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{\mathbf{e}}_x + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\vec{\mathbf{e}}_y + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{\mathbf{e}}_z$
- Le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}(t)}{dt}}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}; a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt}; a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt}$$

- L'accélération est toujours non nulle sauf en cas de mouvement rectiligne uniforme
- Le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position et est tangent à la trajectoire

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt}}$$

$$v_x(t) = v_{x,0} + \int_0^t a_x(t)\,dt; v_y(t) = \ldots$$

$$x(t) = x_0 + v_{x,0}t + \int\int_0^t a_x(t)\,dt^2 \; ; \; y(t) = \ldots$$

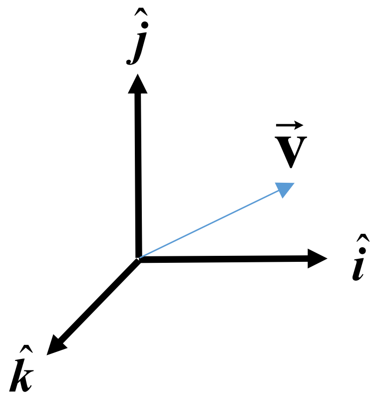
- **Position, vitesse et accélération sont des fonctions du temps.**

Quelques slides « cadeau » en plus avec des informations utiles, applications … intéressant à lire et à comprendre, mais rien à retenir.

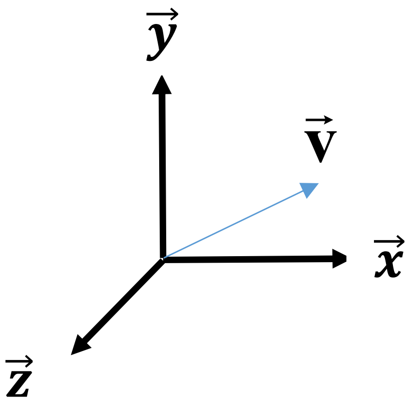
Une infinité de notations possibles pour les vecteurs de base

NOTE

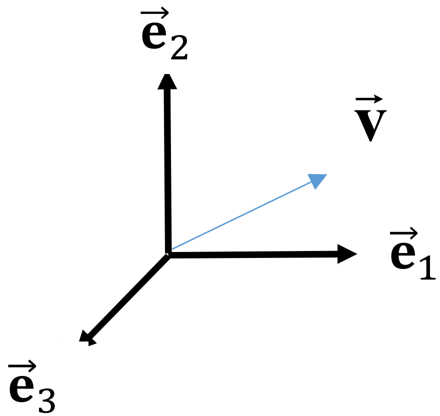
Tout comme il y a plusieurs choix de notations pour les vecteurs, il y a aussi plusieurs conventions de notation des vecteurs de base et des composantes; cela dépend des habitudes de différentes disciplines de la physique. Cela ne doit pas vous perturber – restez juste systématique dans votre convention.



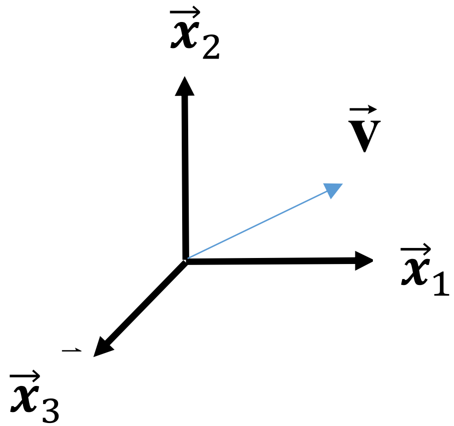
$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$



$$\vec{v} = v_x \vec{x} + v_y \vec{y} + v_z \vec{z}$$

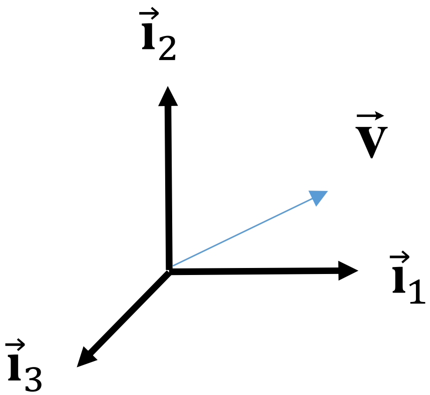


$$\vec{\mathbf{v}} = v_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + v_2 \vec{\mathbf{e}}_2 + v_3 \vec{\mathbf{e}}_3$$



$$\vec{v} = v_1 \vec{x}_1 + v_2 \vec{x}_2 + v_3 \vec{x}_3$$

Notation qui sera utilisée en physique 2 avec aussi :

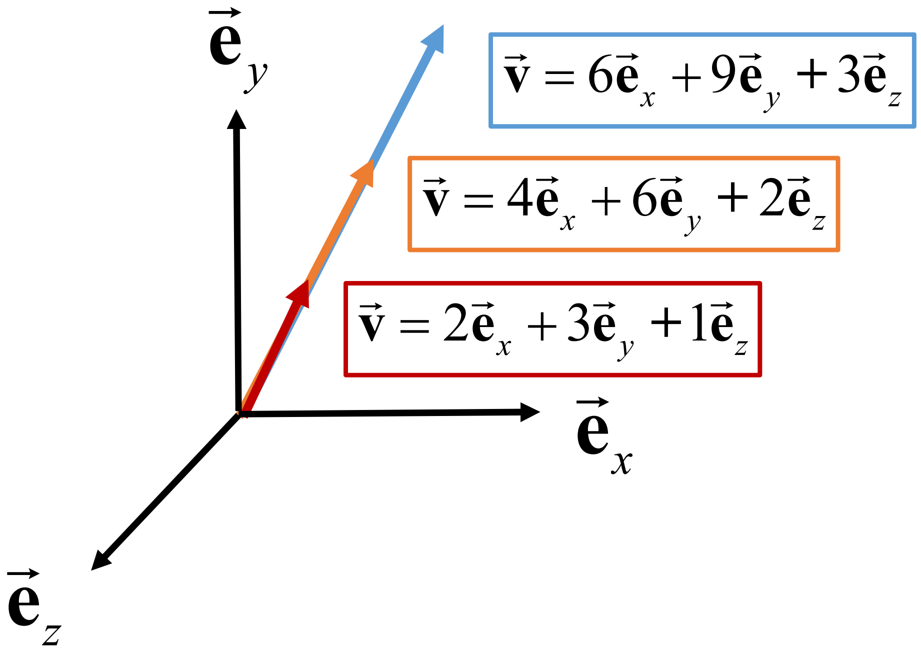


$$\vec{\mathbf{v}} = v_1 \vec{\mathbf{i}}_1 + v_2 \vec{\mathbf{i}}_2 + v_3 \vec{\mathbf{i}}_3$$

NOTE

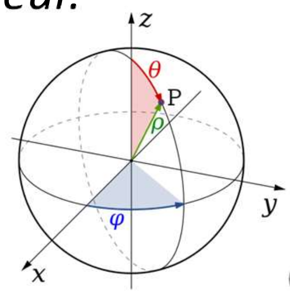
Composantes d’un vecteur

Note : deux nombres sont suffisants pour enregistrer l’information sur la direction en 3D (et un seul nombre en 2D = un angle):



Tous ces vecteurs ont la même direction – vous pouvez toujours ramener une des composantes à la valeur 1, tout en divisant les deux autres composantes par la valeur de la première.

Il suffit de deux angles (latitude et longitude) pour définir une direction en 3D. Vous verrez plus tard dans vos études le lien entre ces angles et les composantes du vecteur.

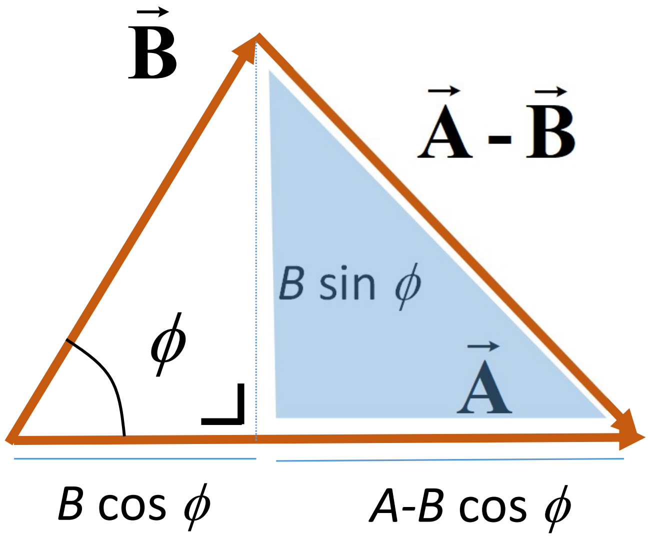


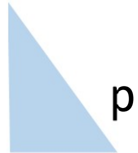
Mais les trois composantes sont nécessaires pour avoir aussi l’info complète sur l’amplitude

NOTE

Démonstration de la formule du produit scalaire

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \|\vec{\mathbf{A}}\| \|\vec{\mathbf{B}}\| \cos\phi = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



Il faut jouer avec Pythagore sur  pour montrer que:

$$\|\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{A}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{B}}\|^2 - 2\|\vec{\mathbf{A}}\| \|\vec{\mathbf{B}}\| \cos\phi$$

Ensuite, c'est un peu calculatoire

$$\|\vec{\mathbf{A}}\| \|\vec{\mathbf{B}}\| \cos\phi = \frac{1}{2}\left[\|\vec{\mathbf{A}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{B}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}\|^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right) + \left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right) - \left(\left(A_x - B_x\right)^2 + \left(A_y - B_y\right)^2 + \left(A_z - B_z\right)^2\right)\right]$$

$$= \ldots.$$

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

NOTE

Produit vectoriel (III)

On peut retrouver l'expression des composantes du produit vectoriel en réécrivant tout à partir des vecteurs de base :

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \left(A_x \vec{\mathbf{e}}_x + A_y \vec{\mathbf{e}}_y + A_z \vec{\mathbf{e}}_z\right) \times \left(B_x \vec{\mathbf{e}}_x + B_y \vec{\mathbf{e}}_y + B_z \vec{\mathbf{e}}_z\right)$$

$$= A_x \vec{\mathbf{e}}_x \times B_x \vec{\mathbf{e}}_x + A_x \vec{\mathbf{e}}_x \times B_y \vec{\mathbf{e}}_y + A_x \vec{\mathbf{e}}_x \times B_z \vec{\mathbf{e}}_z$$

$$+ A_y \vec{\mathbf{e}}_y \times B_x \vec{\mathbf{e}}_x + A_y \vec{\mathbf{e}}_y \times B_y \vec{\mathbf{e}}_y + A_y \vec{\mathbf{e}}_y \times B_z \vec{\mathbf{e}}_z$$

$$+ A_z \vec{\mathbf{e}}_z \times B_x \vec{\mathbf{e}}_x + A_z \vec{\mathbf{e}}_z \times B_y \vec{\mathbf{e}}_y + A_z \vec{\mathbf{e}}_z \times B_z \vec{\mathbf{e}}_z$$

$$= A_x B_x \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_x \times \vec{\mathbf{e}}_x}_{0} + A_x B_y \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_x \times \vec{\mathbf{e}}_y}_{\vec{\mathbf{e}}_z} + A_x B_z \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_x \times \vec{\mathbf{e}}_z}_{-\vec{\mathbf{e}}_y}$$

$$+ A_y B_x \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_y \times \vec{\mathbf{e}}_x}_{-\vec{\mathbf{e}}_z} + A_y B_y \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_y \times \vec{\mathbf{e}}_y}_{0} + A_y B_z \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_y \times \vec{\mathbf{e}}_z}_{\vec{\mathbf{e}}_x}$$

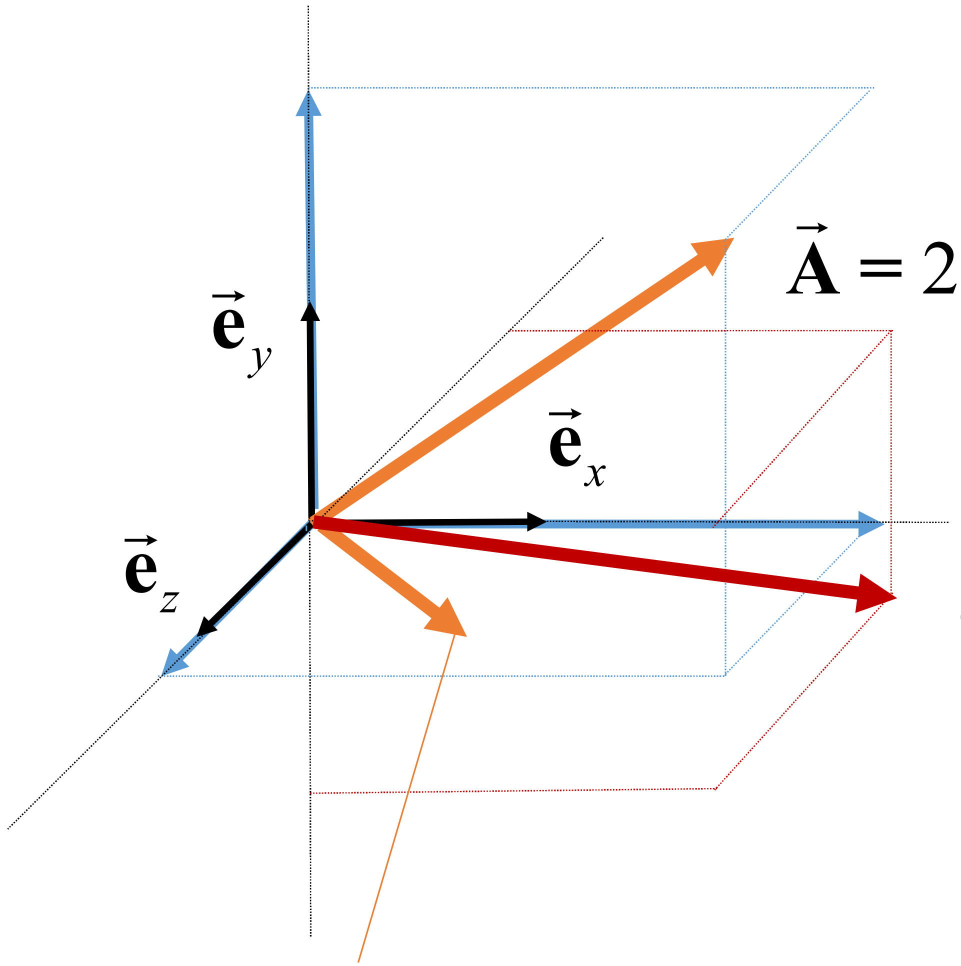
$$+ A_z B_x \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{e}}_x}_{\vec{\mathbf{e}}_y} + A_z B_y \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{e}}_y}_{-\vec{\mathbf{e}}_x} + A_z B_z \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{e}}_z}_{0}$$

$$= \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \vec{\mathbf{e}}_x + \left(A_z B_x - A_x B_z\right) \vec{\mathbf{e}}_y + \left(A_x B_y - A_y B_x\right) \vec{\mathbf{e}}_z$$

Retournez voir le premier slide avec la définition du produit vectoriel pour la direction et la norme et vous comprendrez

Produit vectoriel (IV)

Exemple



$$\vec{\mathbf{A}} = 2.5\vec{\mathbf{e}}_x + 2\vec{\mathbf{e}}_y + 1.2\vec{\mathbf{e}}_z$$

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

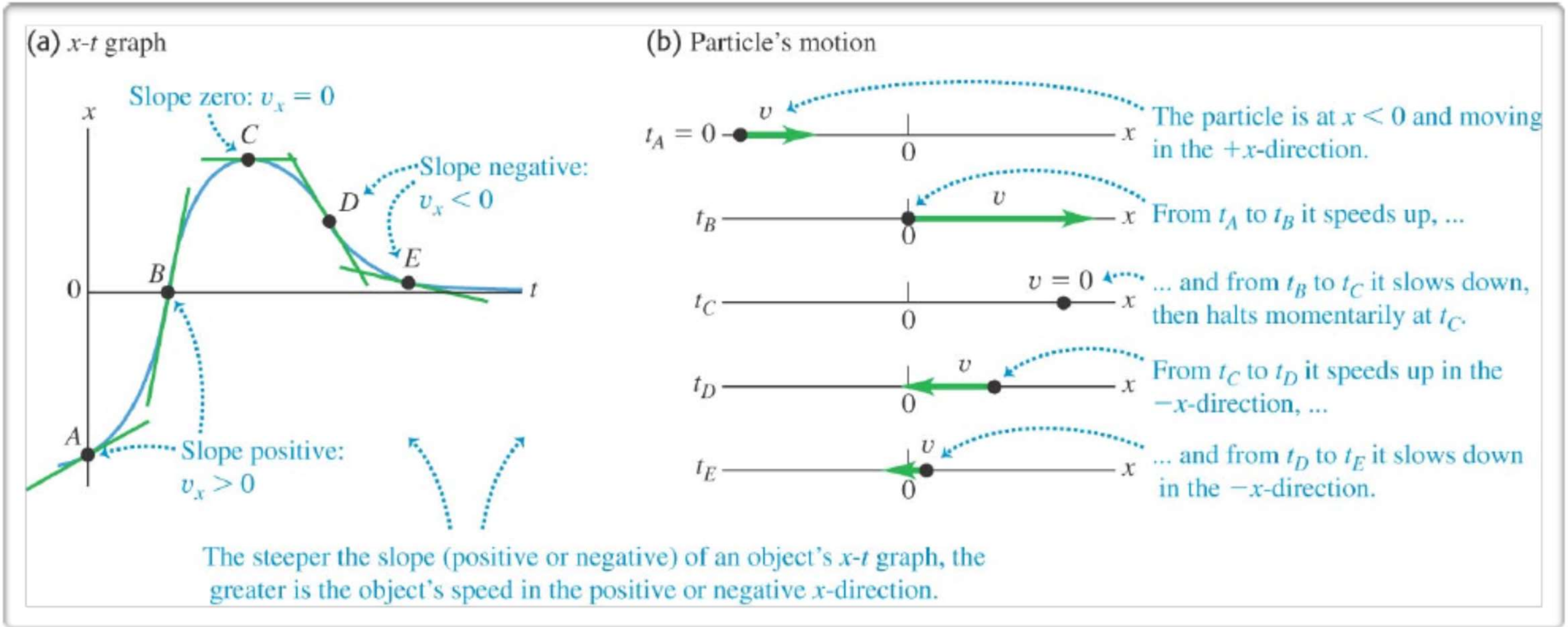
$$= \left(2*1 - 1.2*0\right)\vec{\mathbf{e}}_x + \left(1.2*1 - 2.5*1\right)\vec{\mathbf{e}}_y$$

$$+ \left(2.5*0 - 2*1\right)\vec{\mathbf{e}}_z$$

$$= 2\vec{\mathbf{e}}_x - 1.3\vec{\mathbf{e}}_y - 2\vec{\mathbf{e}}_z$$

$$\vec{\mathbf{B}} = 1\vec{\mathbf{e}}_x + 0\vec{\mathbf{e}}_y + 1\vec{\mathbf{e}}_z$$

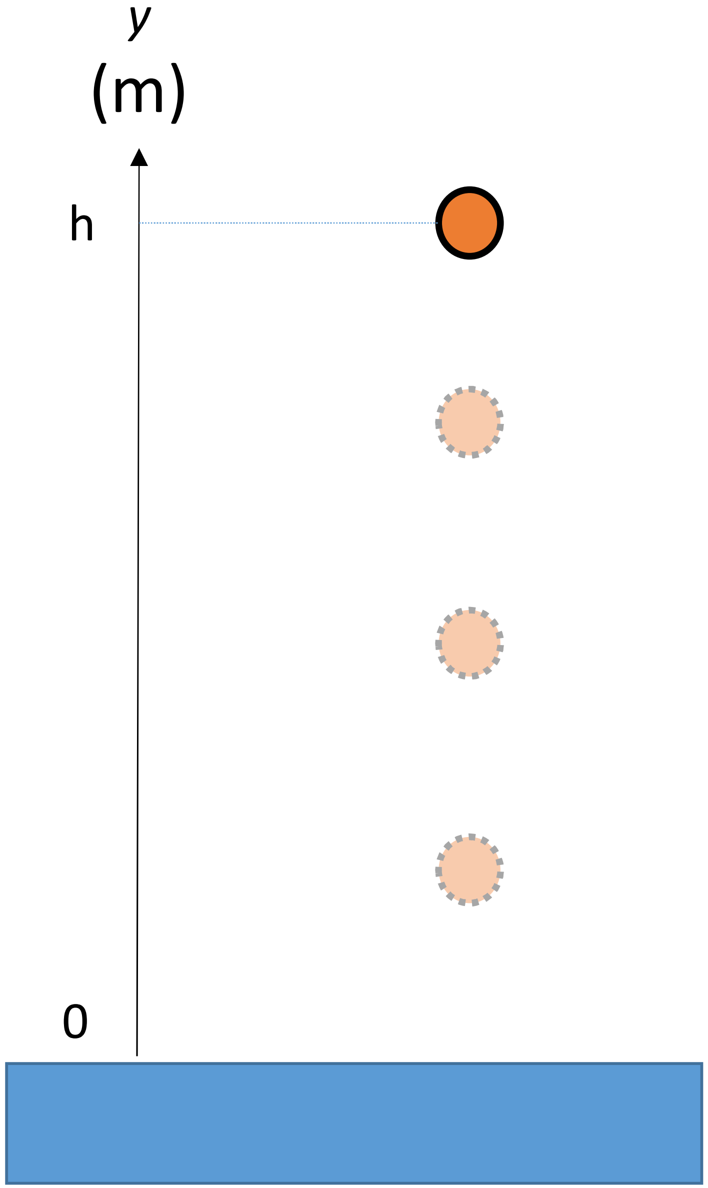
La vitesse instantanée (1D)



Young and Freedman

Applications en 1D

La chute libre (I)



Un objet est lâché depuis une hauteur *h*, en subissant une accélération *a* =-10m/s² (le « - » indique que l'objet accélère dans le sens inverse de l'axe *y*) - *c'est en fait l'accélération -g liée à la gravité dont on parlera très bientôt!*

Sa vitesse initiale est égale à zéro.

Quelle est l'évolution de la vitesse et de la position avec le temps ?

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow dv(t) = a(t)dt$$

$$\int_{v(t=0)=0}^{v} dv = \int_{0}^{t} a dt \Leftrightarrow v - 0 = \left[-10t\right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow v(t) = -10t \quad \text{ou aussi} \quad \boxed{v(t) = -gt}$$

Applications en 1D
La chute libre (II)

$$v(t) = -gt$$

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

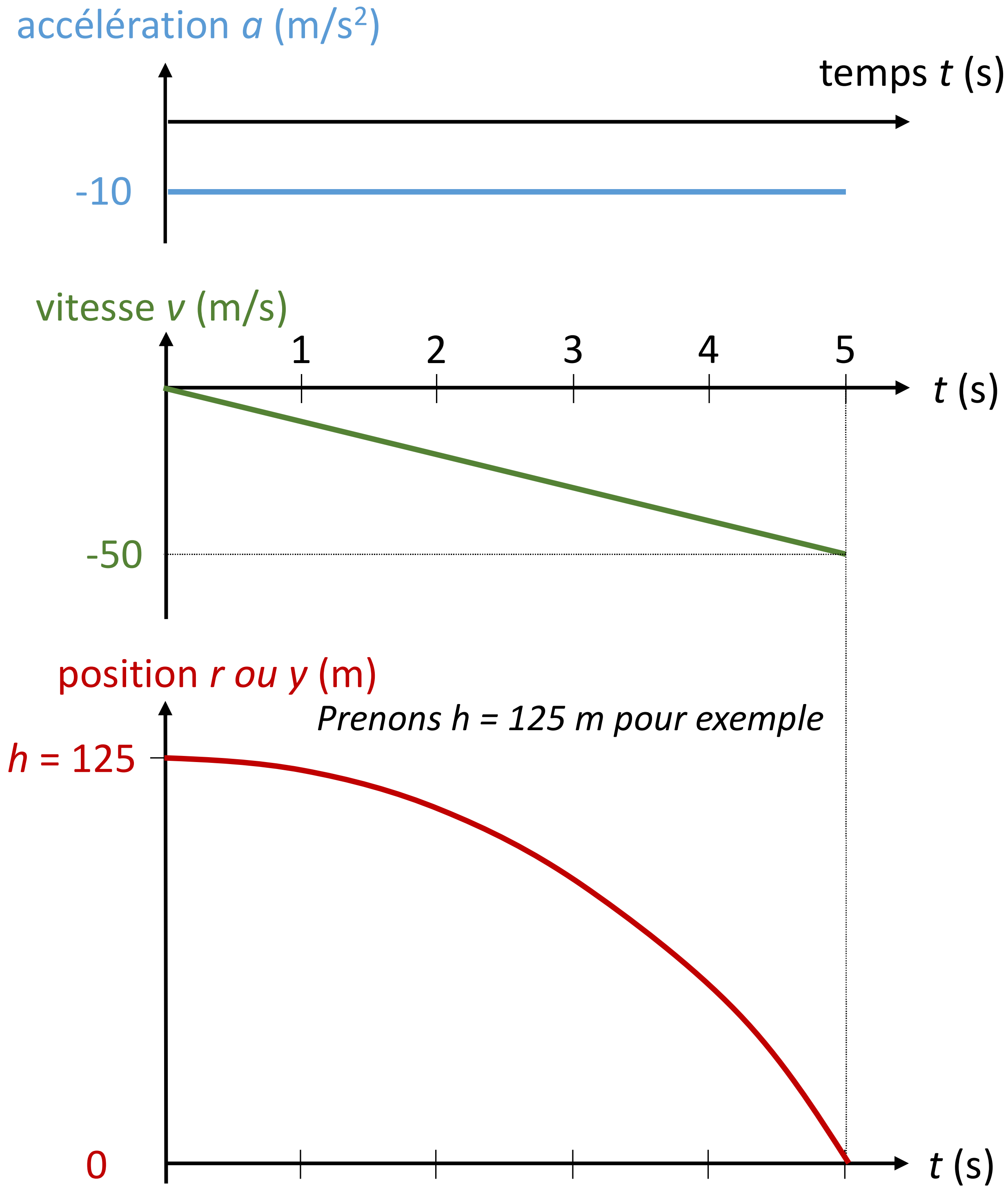
$$\Leftrightarrow dy(t) = v(t)dt$$

$$\Leftrightarrow dy(t) = -gtdt$$

$$\Leftrightarrow \int_{y(t=0)=h}^{y} dy = \int_0^t -gtdt$$

$$\Leftrightarrow y - h = \left[-\frac{gt^2}{2}\right]_0^t$$

$$\boxed{y(t) = h - \frac{gt^2}{2}}$$



Déplacement
(en formalisme vectoriel)

Le déplacement est le changement de position pendant le déplacement par rapport à une référence. Le déplacement varie avec le temps. Il est décrit par un vecteur.

$$\vec{\mathbf{u}}(t) = \vec{\mathbf{r}}(t) - \vec{\mathbf{r}}(t_{ref})$$

$$= \left(r_x(t) - r_x(t_{ref})\right)\vec{\mathbf{e}}_x + \left(r_y(t) - r_y(t_{ref})\right)\vec{\mathbf{e}}_y + \left(r_z(t) - r_z(t_{ref})\right)\vec{\mathbf{e}}_z$$

$$= u_x(t)\vec{\mathbf{e}}_x + u_y(t)\vec{\mathbf{e}}_y + u_z(t)\vec{\mathbf{e}}_z$$

Vitesse : un exemple chiffré à partir de la connaissance de la trajectoire

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt} = \underbrace{\frac{dr_x(t)}{dt}}_{v_x(t)}\vec{\mathbf{e}}_x + \underbrace{\frac{dr_y(t)}{dt}}_{v_y(t)}\vec{\mathbf{e}}_y + \underbrace{\frac{dr_z(t)}{dt}}_{v_z(t)}\vec{\mathbf{e}}_z$$

Ex. Que vaut la vitesse en t = 2s d'un mobile parcourant la trajectoire suivante ?

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \underbrace{(2+t)}_{r_x(t)}\vec{\mathbf{e}}_x + \underbrace{t^2}_{r_y(t)}\vec{\mathbf{e}}_y + \underbrace{0}_{r_z(t)}\vec{\mathbf{e}}_z$$

On a $\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt} = 1\vec{\mathbf{e}}_x + 2t\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z$

et $\|\vec{\mathbf{v}}\| \equiv v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2} = \sqrt{1+4t^2+0}$

Donc, en t=2s, le vecteur vitesse s'écrit: $\vec{\mathbf{v}}(t=2s) = 1\vec{\mathbf{e}}_x + 4\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z$ (m/s)

et la norme de la vitesse vaut $\|\vec{\mathbf{v}}(t=2s)\| \equiv v(t=2s) = \sqrt{1+16+0} = \sqrt{17}$ (m/s)

Vitesse moyenne : un exemple chiffré à partir de la connaissance de la trajectoire

$$\langle \vec{\mathbf{v}} \rangle_{t_1}^{t_2} \equiv \vec{\mathbf{v}}_{\text{moyenne entre deux instants}} = \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1}{t_2 - t_1}$$

Ex. Que vaut la vitesse moyenne entre 0s et 5s d'un mobile parcourant la trajectoire suivante :

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \underbrace{(2+t)}_{r_x(t)}\vec{\mathbf{e}}_x + \underbrace{t^2}_{r_y(t)}\vec{\mathbf{e}}_y + \underbrace{0}_{r_z(t)}\vec{\mathbf{e}}_z$$

On a $\vec{\mathbf{r}}_1 \equiv \vec{\mathbf{r}}(t_1 = 0) = 2\vec{\mathbf{e}}_x + 0\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z$; $\vec{\mathbf{r}}_2 \equiv \vec{\mathbf{r}}(t_2 = 5) = 7\vec{\mathbf{e}}_x + 25\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z$

Donc $$\vec{\mathbf{v}}_{moyenne}\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{7\vec{\mathbf{e}}_x + 25\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z - (2\vec{\mathbf{e}}_x + 0\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z)}{5-0}$$

$$= \frac{(7-2)}{5}\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{(25-0)}{5}\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z = 1\vec{\mathbf{e}}_x + 5\vec{\mathbf{e}}_y + 0\vec{\mathbf{e}}_z \text{ (m/s)}$$

et $$v_{moyenne}\Big|_{t_1}^{t_2} = \sqrt{1^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{26} \text{ (m/s)}$$

Généralisation des relations de la cinématique pour un intervalle de temps t_1 à t_2

$$a_x(t)=\frac{dv_x(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2};a_y(t)=\dots$$

⇓

$$v_x(t_2)=v_x(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}a_x(t)\,dt;v_y(t_2)=\dots.$$

⇓

$$x(t_2)=x(t_1)+v_x(t_1)t_2+\int\int_{t_1}^{t_2}a_x(t)\,dt^2$$

$$y(t_2)=y(t_1)+v_y(t_1)t_2+\int\int_{t_1}^{t_2}a_y(t)\,dt^2$$

$$z(t_2)=z(t_1)+v_z(t_1)t_2+\int\int_{t_1}^{t_2}a_z(t)\,dt^2$$

Donc, si on connaît l'accélération , dans l'intervalle t_1 à t_2 (càd qu'on connaît a_x(t), etc), ainsi que la vitesse et la position à l'instant initial t_1, on peut alors calculer la vitesse et la postion à tous les instants suivants jusque t_2. Mais on peut aussi s'en sortir avec d'autres infos …