Le truc vraiment le plus non-intuitif de la physique...

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{I}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}\right) = \sum \vec{\mathbf{M}}_i$$

Résumé des épisodes précédents :-)

Episode 1 : Décrire le mouvement
Episode 2 : Newton et la force de gravité
Episode 5 : Le frottement
Episode 6 : L'énergie c'est formidable !
Episode 9 : La mécanique des corps : ooouuupppsss : cela tourne !
Episode 10 : Le truc plus non intuitif !

Bilan de la quantité de mouvement

La cause : la force !

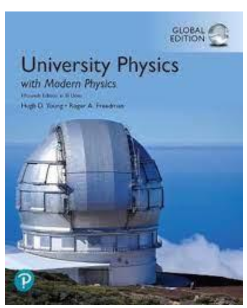
Résistance au mouvement = masse

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)} = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}_i}$$

La conséquence : l'accélération !

Quelle est la voiture qui va accélérer le plus vite pour la même force motrice ?

Linear Momentum



La cause :
le moment de force !

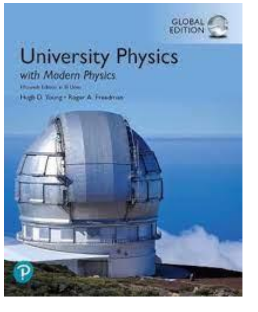
Résistance à la rotation
= moment d'inertie

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right)} = \boxed{\sum M_i}$$

La conséquence :
l'accélération angulaire !

Bilan du moment cinétique

Que fait la danseuse pour tourner plus vite sur elle-même ?



Angular Momentum

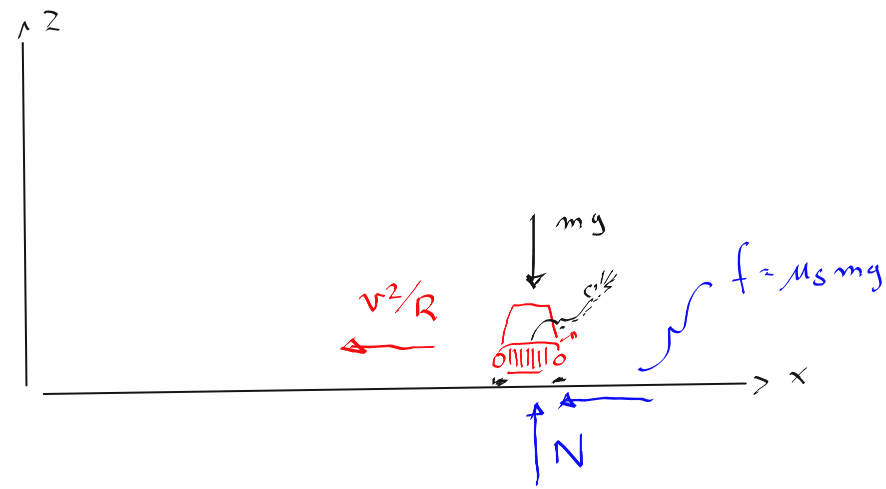
A quelle vitesse la voiture fera-t-elle un tonneau ?

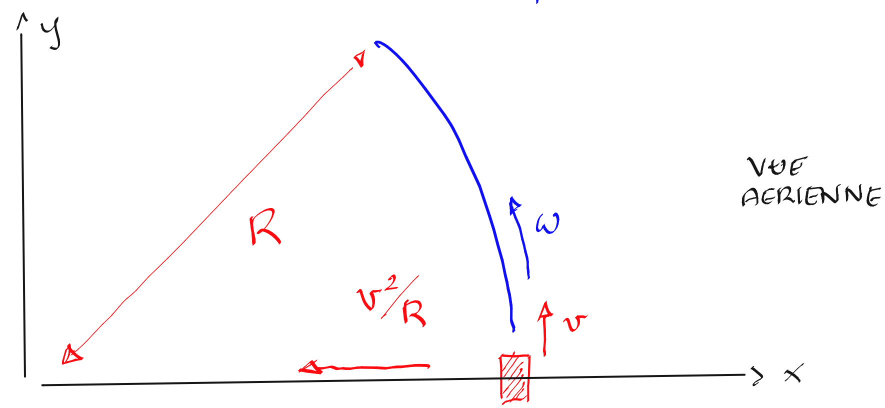
Equilibre statique

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
0 &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Tout d'abord...
Est-ce que
la voiture va déraper ?

60 Km/h
↳ 16,7 m/s





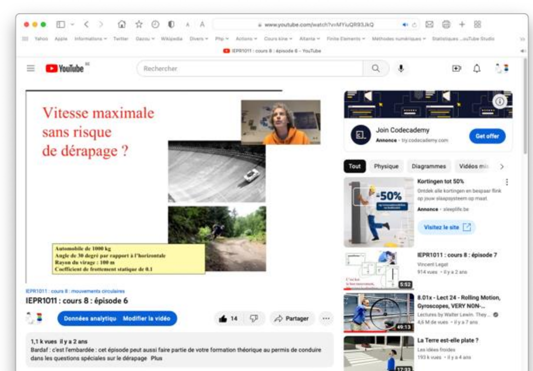
$$\cancel{m}\,\frac{v^2}{R} = \mu_s\,\cancel{m}\,g$$

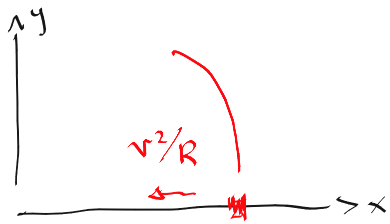
60km

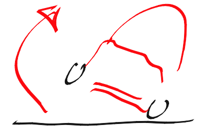
10

ACCELERATION CENTRIPETE

$\mu_s = 0{,}47$

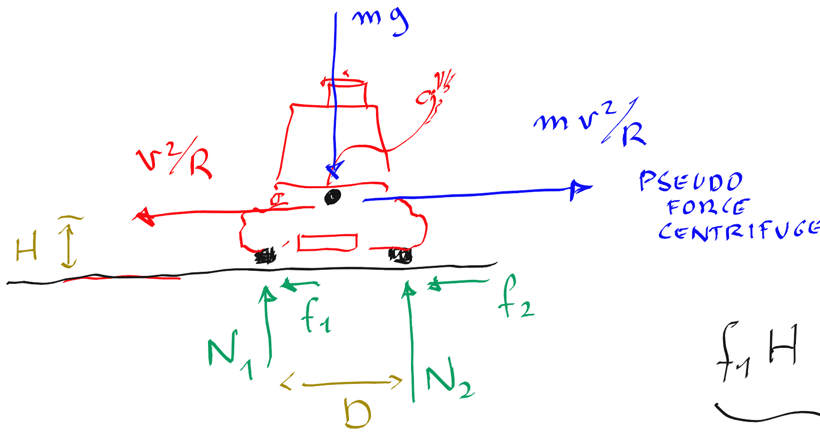






$$\underbrace{f_1 + f_2} = \frac{m v^2}{R}$$

$$N_1 + N_2 = m g$$



$$\underbrace{f_1 H + f_2 H}_{(f_1+f_2)H} + N_1 \frac{D}{2} - N_2 \frac{D}{2} = 0$$

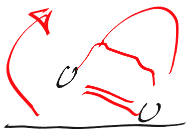
$$\sum F_x = -m \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum H = 0$$

Trois équations !

Trois inconnues !



$$\cancel{f_1} + f_2 = \frac{m v^2}{R}$$

$$\cancel{N_1} + N_2 = m g$$

$$\underbrace{f_1 H + f_2 H}_{(\cancel{f_1} + f_2)\,H} + \cancel{N_1}\,\frac{D}{2} - \underbrace{N_2}_{m g}\,\frac{D}{2} = 0$$

$$\underbrace{(\cancel{f_1} + f_2)}_{\frac{m v^2}{R}}\,H$$

TONNEAU

$N_1 = 0$

$f_1 = 0$

$$\frac{m v^2}{R} H = m g \frac{D}{2}$$

Trois équations !

Trois inconnues !

$$\frac{\cancel{m} v^2}{R} H = \cancel{m} g \frac{D}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{gDR}{2H}}$$

g: $[m/s^2]$, D: $[m]$, R: $[m]$, H: $[m]$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{[m^2]}{[s^2]}}}_{\frac{[m]}{[s]}}$$

Calcul de la vitesse critique !

C’est indépendant du coefficient de frottement !

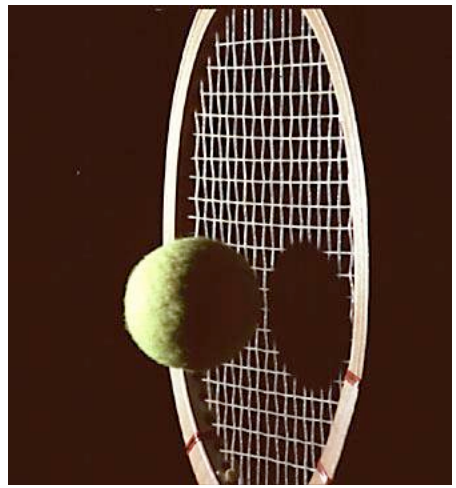
$[m/s^2]$ $[m]$ $[m]$

$$v = \sqrt{\frac{g\,D\,R}{2H}} \quad \Bigg\} \quad \underbrace{\sqrt{\frac{[m^2]}{[s^2]}}}_{\frac{[m]}{[s]}}$$

$[m]$

Concevoir une voiture
qui ne fera pas trop vite un tonneau !

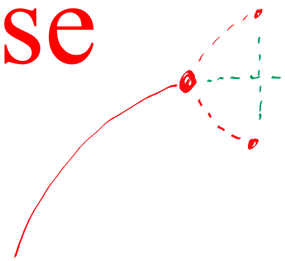
Un corps, cela peut aussi être un paquet de corps !



**On peut appliquer la conservation
de la quantité de mouvement ou de l'énergie
pour l'ensemble du système.**

C'est ce qu'on a fait pour analyser les chocs !

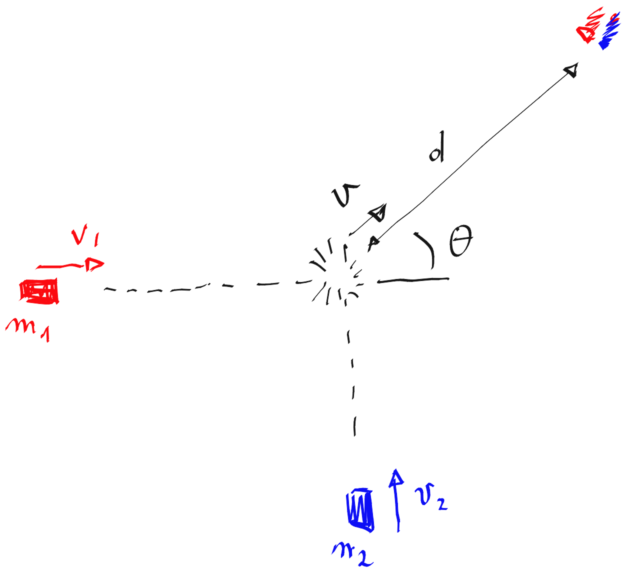
Un obus qui explose en deux parties...



On peut déduire le mouvement d'un des morceaux à partir du mouvement de l'autre fragment !

Le centre de masse poursuit la trajectoire parabolique initiale…

... et la collision tout-à-fait inélastique entre deux voitures !



$m = m_1 + m_2$

DONNEES

$m_1 \quad m_2 \quad d \quad \theta \quad \mu_c$

APRES LE CHOC

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v^2 = \underbrace{\underbrace{\mu_c\,(m_1+m_2)\,g}_{\text{FORCE FROTTEMENT}}\ d}_{\text{TRAVAIL DE FORCE DE FROTTEMENT}}$$

CHOC INELASTIQUE

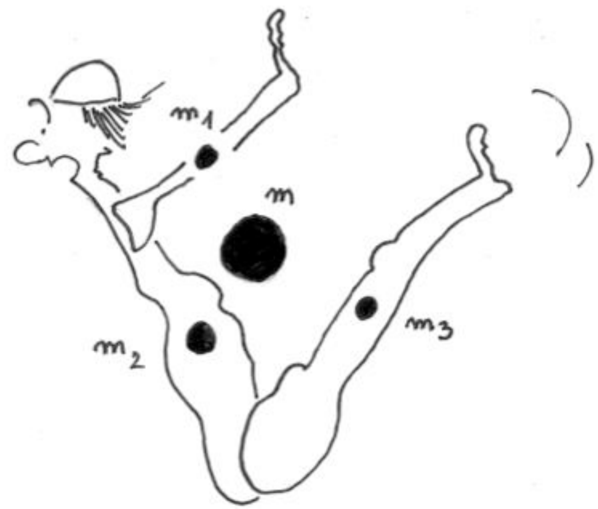
$$\begin{bmatrix} m_1 v_1 \\ m_2 v_2 \end{bmatrix} = (m_1+m_2)\,v \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$v = \sqrt{2\mu_c\, g\, d}$$

$v_1 \quad v_2$

Autopsie d'un accident

La somme de moments
de forces de gravité...



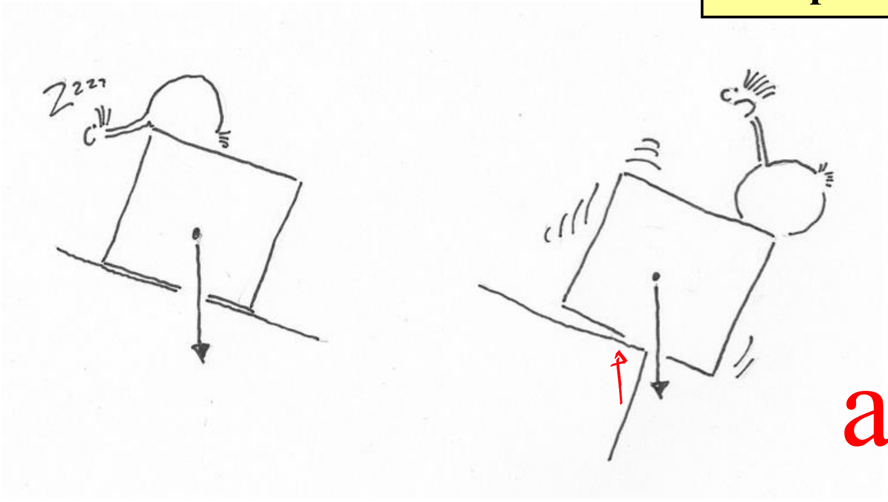
$$\begin{aligned}
\sum m_i \, \vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum m_i \, \vec{\mathbf{x}}_i(t) \\
0 &= \sum m_i \left(\vec{\mathbf{x}}_i(t) - \vec{\mathbf{x}}(t) \right) \\
0 &= \sum m_i \vec{\mathbf{g}} \times \underbrace{\left(\vec{\mathbf{x}}_i(t) - \vec{\mathbf{x}}(t) \right)}_{\vec{\mathbf{r}}_i(t)}
\end{aligned}$$

... par rapport
au centre de gravité
est nulle

La somme de moments de forces de gravité...

Le centre de gravité est le point d'application de la résultante des forces de gravité !

La connaissance de la position du centre de gravité est indispensable pour déterminer la stabilité d'un objet !



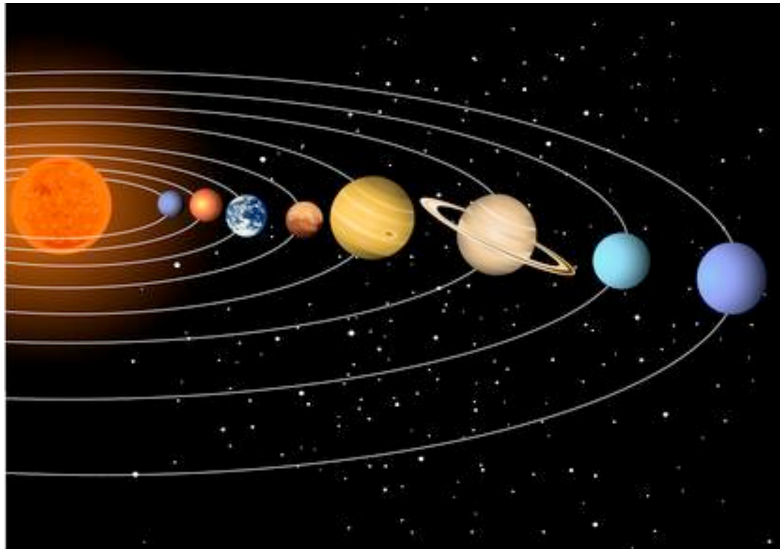
... par rapport au centre de gravité est nulle

Centre de gravité...

$$0 = \sum m_i \vec{\mathbf{g}}_i \times \left(\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_{\text{gravité}}\right)$$

C'est différent uniquement si l'accélération de la gravité n'est pas constante !

Pour prédire le mouvement des planètes, c'est important !
Pour prédire le mouvement du corps humain, ce n'est vraiment pas bien important !



$$0 = \sum m_i \left(\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_{\text{masse}}\right)$$

... et centre de masse

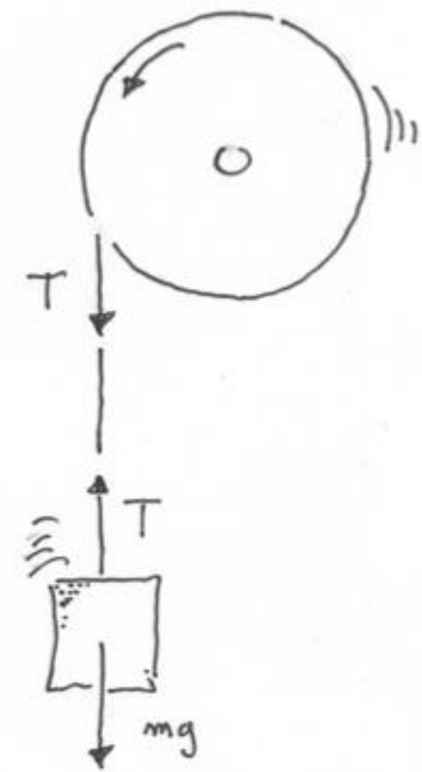
On lache un bloc attaché à une poulie

Quelle est la vitesse angulaire de la poulie après 3 secondes ?
Vitesse du bloc lorsqu'il est descendu de 1.6 mètre ?

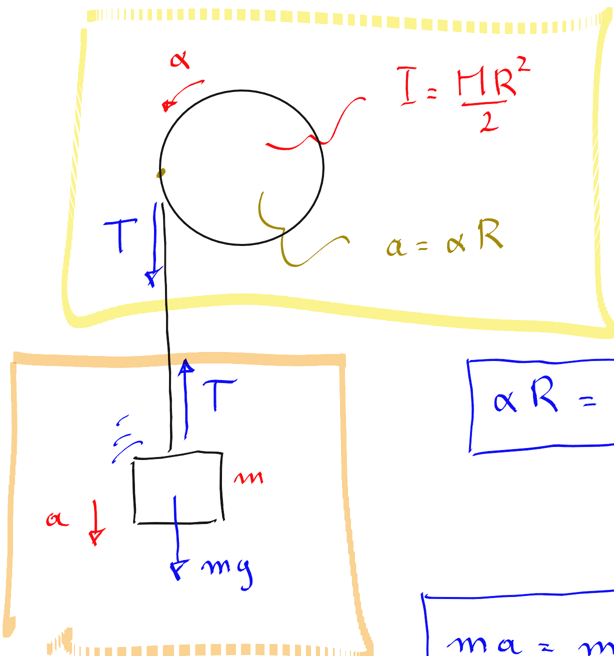
$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$



Bloc qui tombe !
Calcul de l'accélération



$$\boxed{TR = \frac{MR^2}{2}\alpha}$$

$$T = \frac{Ma}{2} \qquad \alpha = \frac{a}{R}$$

$$\boxed{\alpha R = a}$$

$$\boxed{ma = mg - T}$$

$$T = mg - ma$$

$$m(g-a) = M\frac{a}{2}$$

$$2m(g-a) = Ma$$

$$2mg = (M + 2m)\,a$$

POUR FAIRE TOURNER LA POULIE

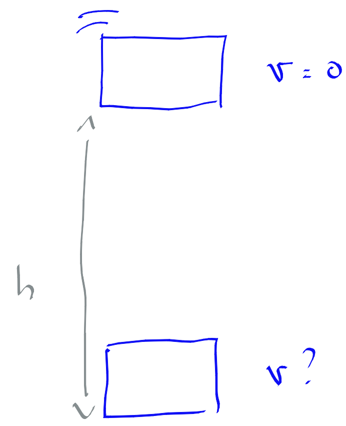
POUR FAIRE TOMBER LE BLOC

Bloc qui tombe !
Calcul de la vitesse

$$2mg = (M + 2m)\,a$$

POUR FAIRE TOURNER LA POULIE

POUR FAIRE TOMBER LE BLOC



$$h = a\frac{t^2}{2}$$

$$a = \frac{2m}{2m + M}\,g$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2h}{a}} \\ v &= ta = \sqrt{\frac{4mgh}{M + 2m}} \end{aligned}}$$

EN. POT

$$\boxed{mgh}$$

EN CIN

$$\boxed{0}$$

EN. CIN

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}$$

$$I = \frac{MR^2}{2} \qquad \omega^2 = \frac{v^2}{R^2}$$

EN. POT.

$$\boxed{0}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{Mv^2}{4}$$

$$4mgh = 2mv^2 + Mv^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{gh\,\frac{4m}{2m+M}}}$$

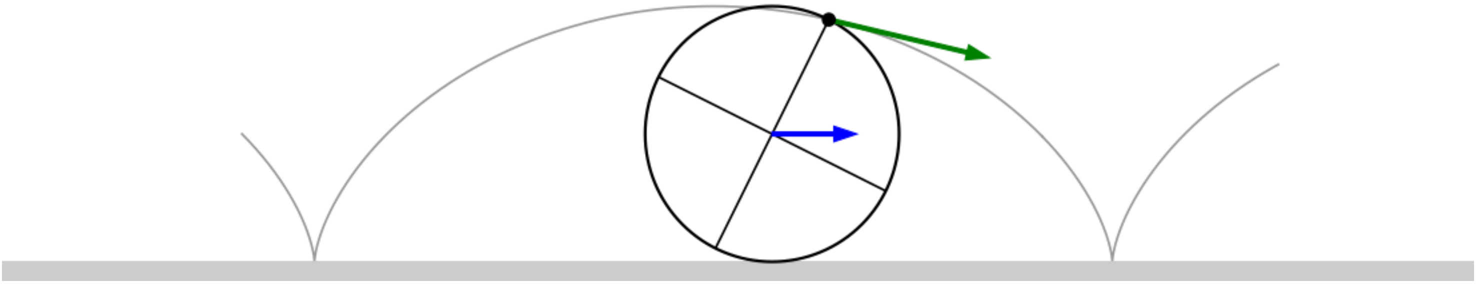
$$\sqrt{\frac{4mgh}{M+2m}}$$

So easy !

L’approche énergétique !

Faisons un peu de vélo...

Comme la roue ne glisse pas, le point bas est très brièvement en contact avec la route.
Ce point est au repos et la roue tourne autour ce point.



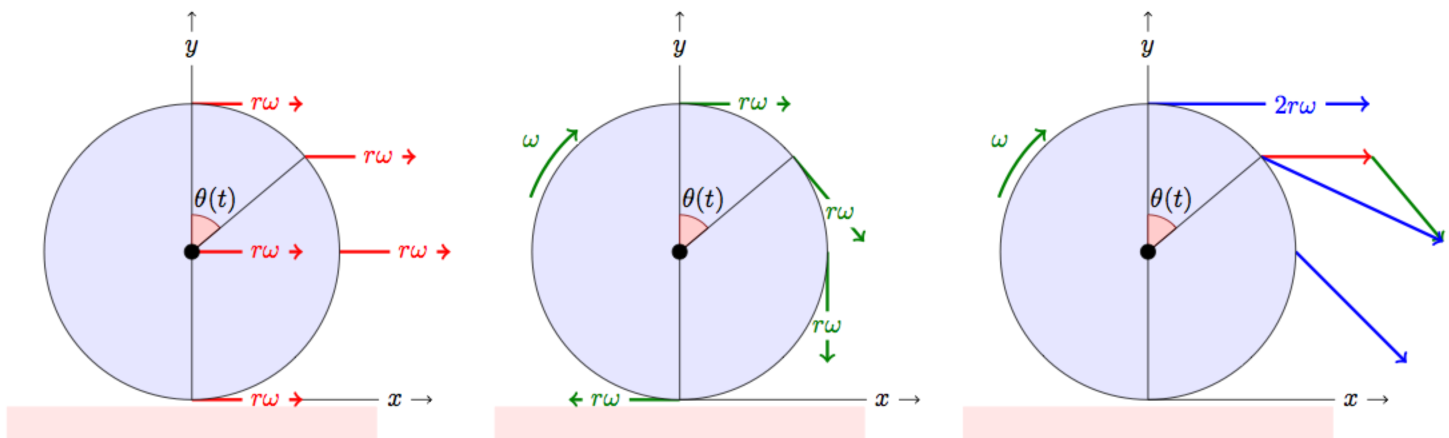
Le roulement : c’est combiner une translation et une rotation !

Rotation autour du centre

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \boxed{\vec{\mathbf{v}}_c} + \boxed{\vec{\mathbf{v}}_t(t)}$$

Translation du centre

Le roulement, c'est une translation du centre avec une rotation autour du centre



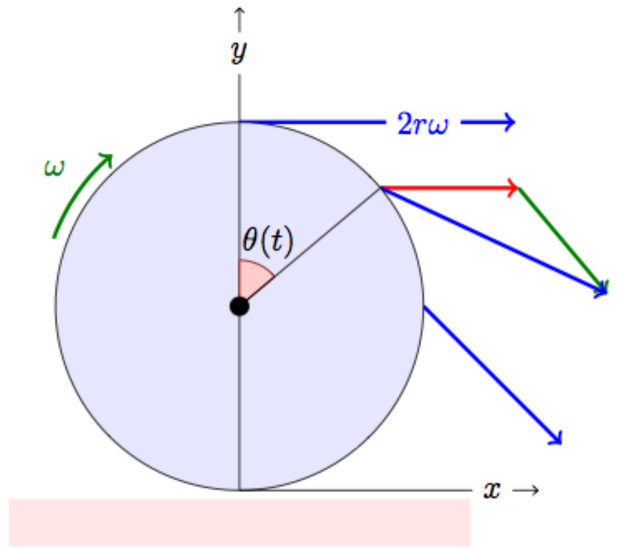
$v = r\omega$

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}(t)} = \boxed{\vec{\mathbf{v}}_c} + \boxed{\vec{\mathbf{v}}_t(t)}$$

Rotation autour du centre

Translation du centre

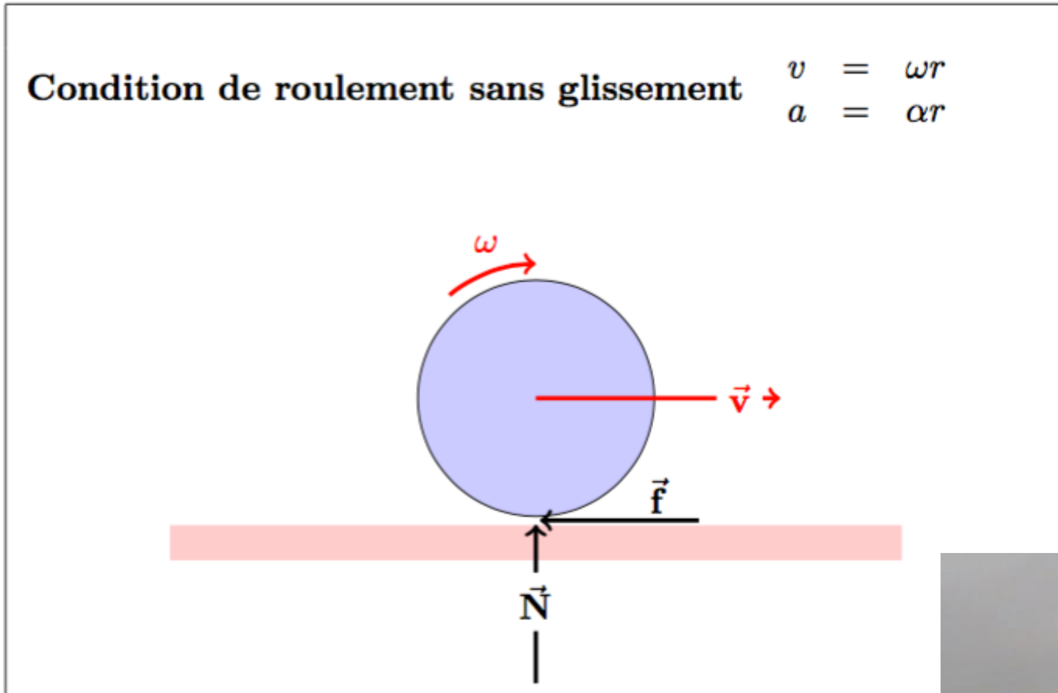
Le roulement, c'est une translation du centre avec une rotation autour du centre



Le mouvement circulaire est dans le sens horlogique.
La roue avance vers la droite.

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_c(t) \\ 0 \end{bmatrix} + r\omega(t)\begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_c(t) \\ 0 \end{bmatrix} + r\omega^2(t)\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ -\cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\alpha(t)\begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

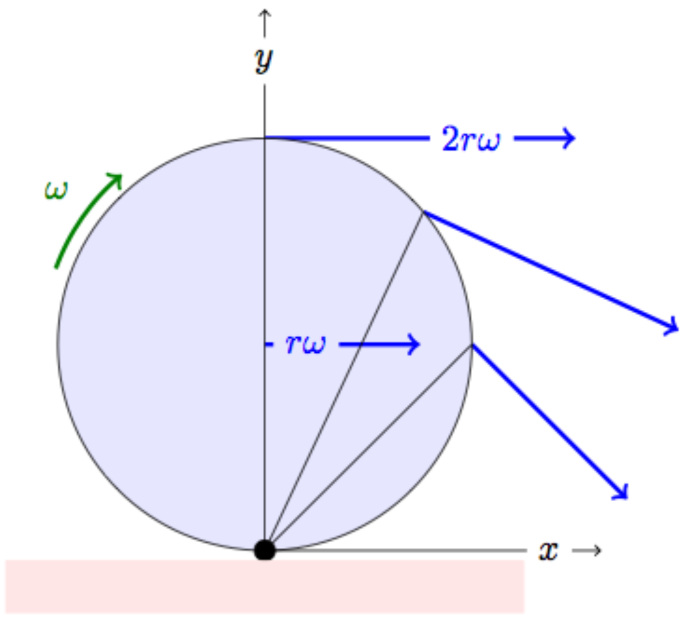


C'est l'inverse du glissement sans roulement ou dérapage incontrolé !

Roulement sans glissement d'une roue !

La roue tourne autour du point de contact

En un tour de roue, le centre avance d'une distance 2πR



La norme de la vitesse du centre est égale à la norme de la vitesse tangentielle de rotation !

On en déduit la même relation pour les accélérations

Condition de roulement sans glissement

$$
\begin{aligned}
v &= \omega r \\
a &= \alpha r
\end{aligned}
$$

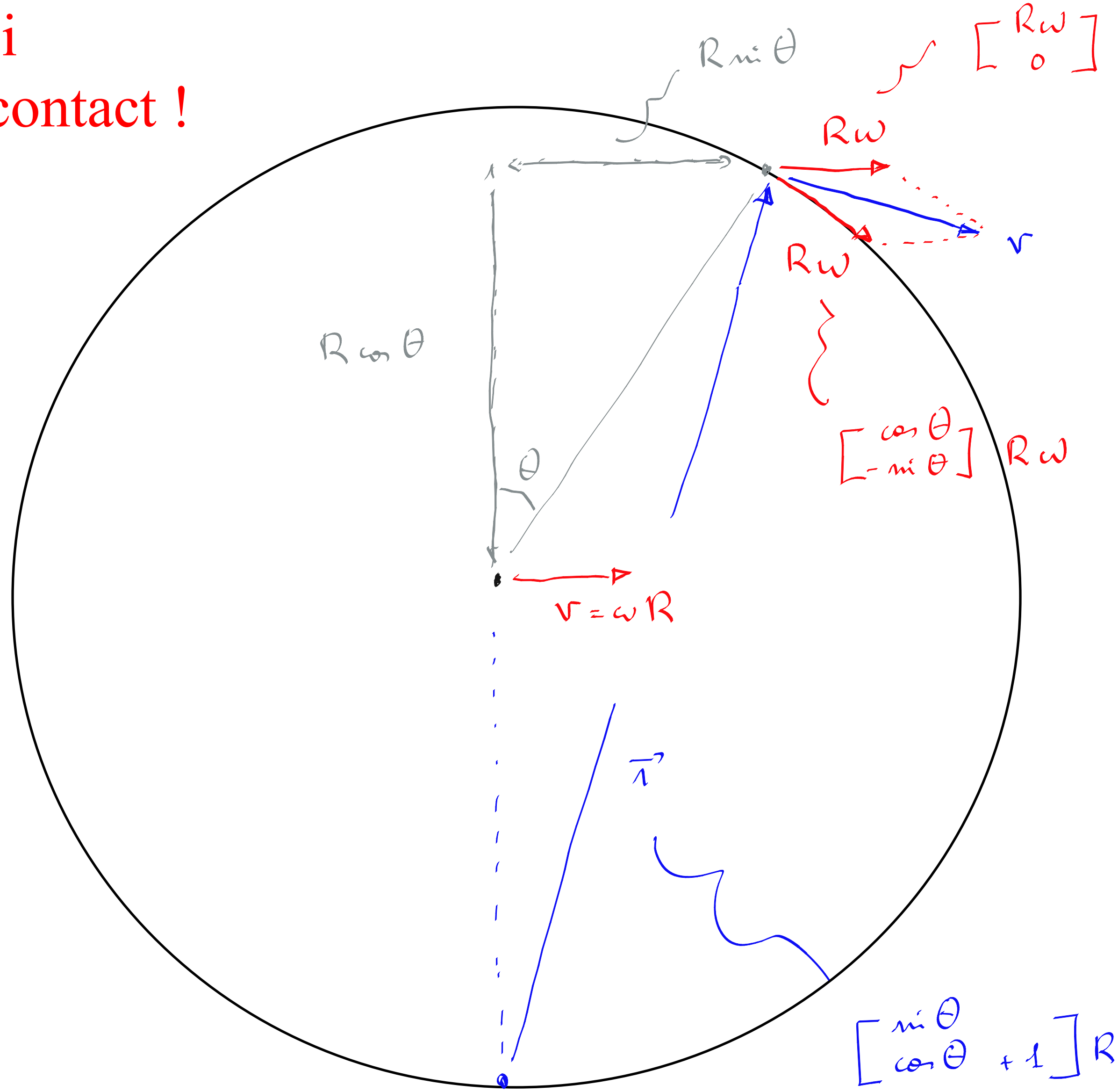
La roue tourne aussi
autour du point de contact !
Si, si, si !

$$\underbrace{\vec{v}}_{\begin{bmatrix} 1+\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} R\omega} \cdot \underbrace{\vec{r}} = 0$$

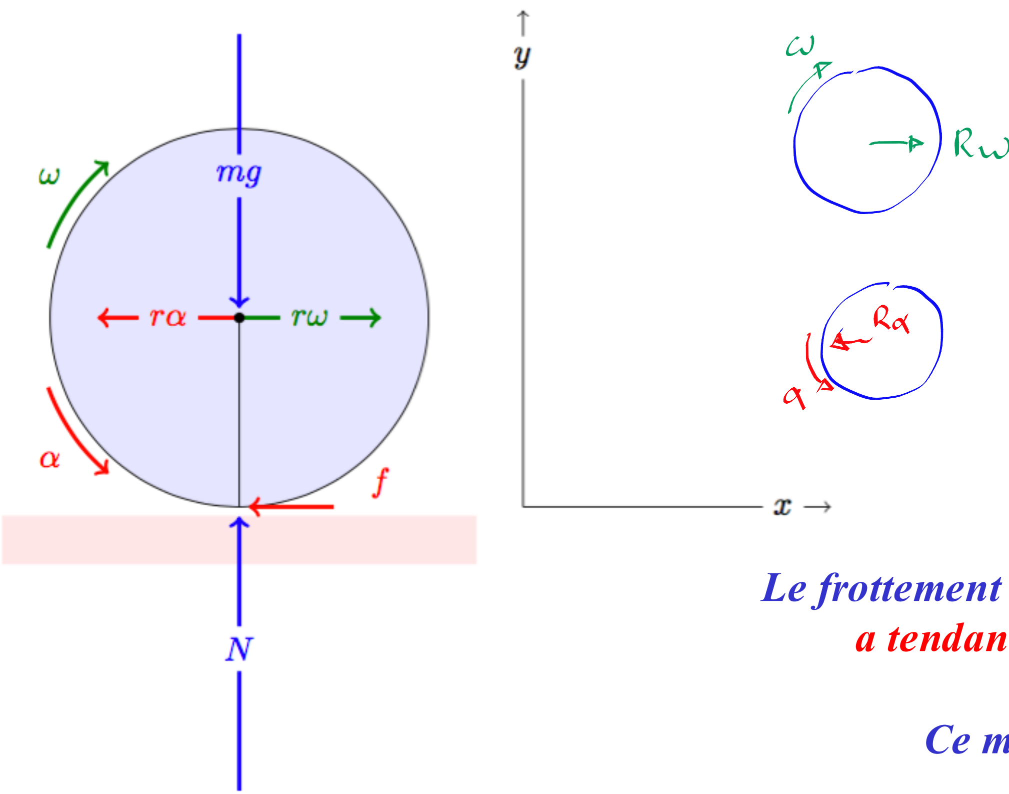
$$= v_x r_x + v_y r_y$$

$$= \underbrace{R\omega(1+\cos\theta)\sin\theta R - \sin\theta R\omega(1+\cos)R}_{=0}$$

:-)



Une roue roule sans glisser...
Le frottement devrait-il la ralentir ?



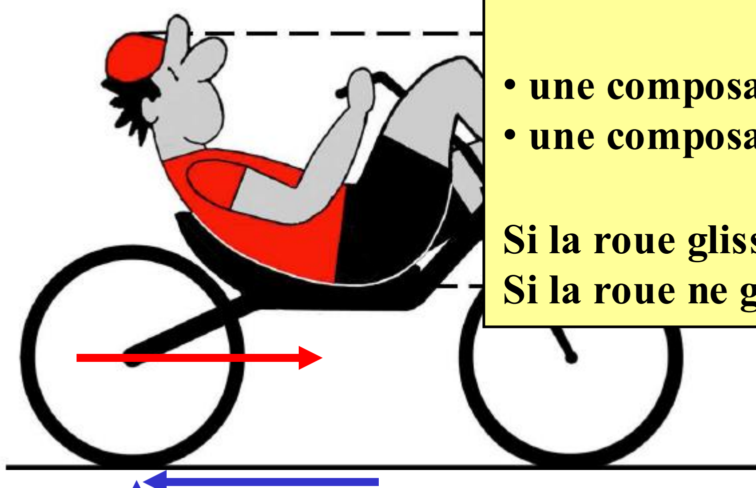
$$\begin{cases} a = r\,\alpha \\ ma = f \\ I\alpha = -r\,f \end{cases}$$

Le frottement ralentit la progression de la roue mais a tendance à augmenter sa vitesse de rotation !

Ce modèle semble sérieusement déficient !

Les équations sont écrites par rapport aux normes des vecteurs tels que dessinés sur la figure !

Est-ce que le frottement roue-sol devrait ralentir notre cycliste ?



La force de contact se compose de :

- **une composante perpendiculaire : N**
- **une composante tangentielle : f**

Si la roue glisse (dérape) sur la route, frottement cinétique !
Si la roue ne glisse pas, frottement statique !

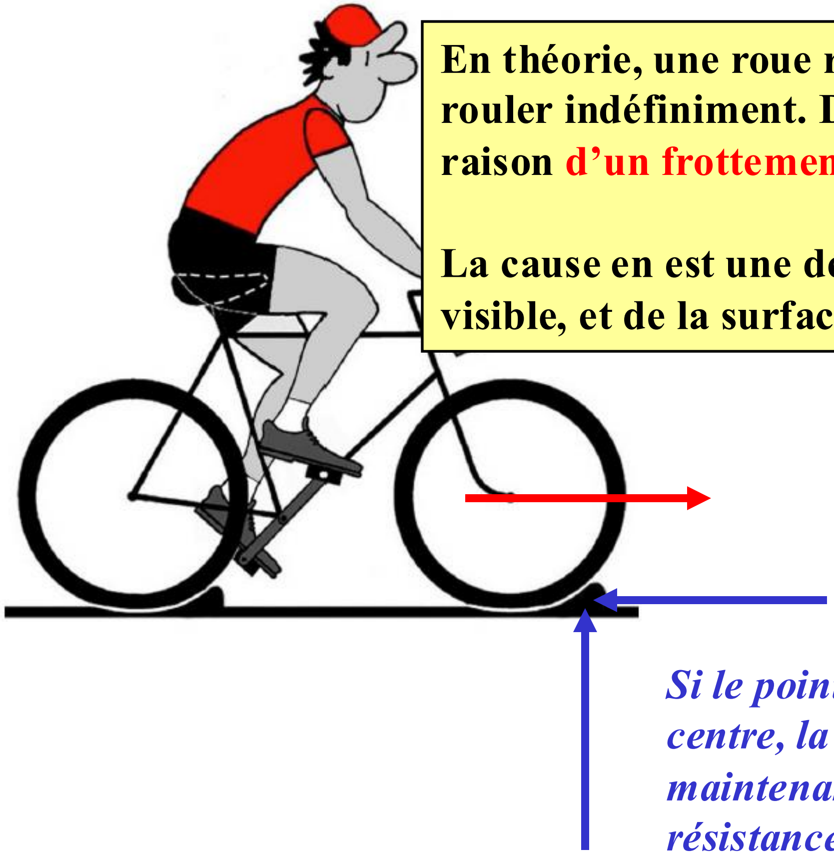
Une roue roulant sur une route va finir par s'arrêter de rouler…

La force de frottement f ne peut pas expliquer cela, car son effet contribue simplement à faire tourner la roue de plus en plus vite !

En réalité, on est freiné par la résistance au roulement !

En théorie, une roue rigide sur une surface plane devrait rouler indéfiniment. Dans la pratique, ce n'est pas le cas en raison d'un frottement dit avec roulement .

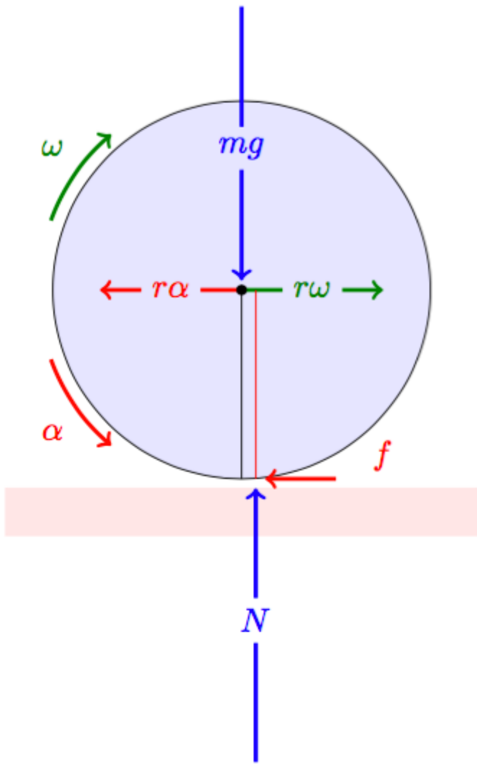
La cause en est une déformation du pneu de la roue, bien visible, et de la surface de la route, imperceptible celle-là.



$$f_r = \mu_r N$$

Si le point de contact n'est plus sous le centre, la composante normale s'oppose maintenant à la rotation : c'est cela la résistance au roulement !

C'est la résistance au roulement qui ralentit une roue roulant sans glisser !

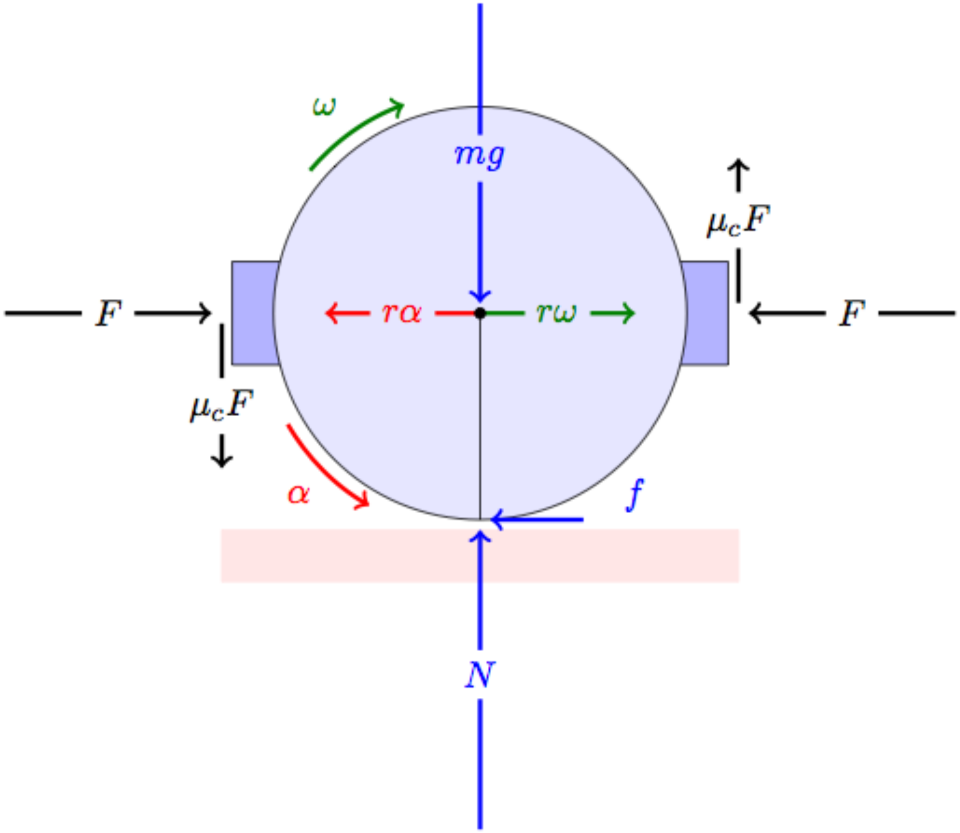


$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & r\,\alpha \\ ma & = & f \\ I\alpha & = & \epsilon\,N - r\,f \end{array}\right.$$

Mais les surfaces ne sont pas parfaitement rigides et vont subir une déformation !

L'effet combiné de f et de N correspond au frottement par roulement et aux pertes d'énergie dues à la déformation de la roue.

Freinons !

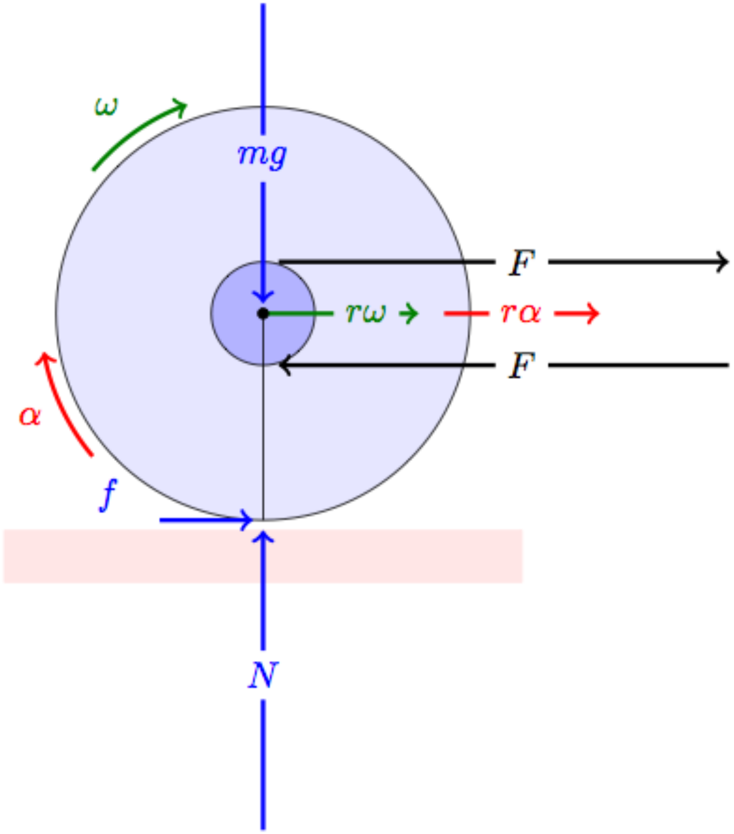


$$\begin{cases} ma = f \\ I\alpha = 2\mu_c\, r\, F - r\, f \end{cases}$$

Le freinage optimal est obtenu lorsque la roue est juste sur le point de glisser.

Si on freine trop brutalement, la roue se bloque et glisse sur la route !

Accélérons !



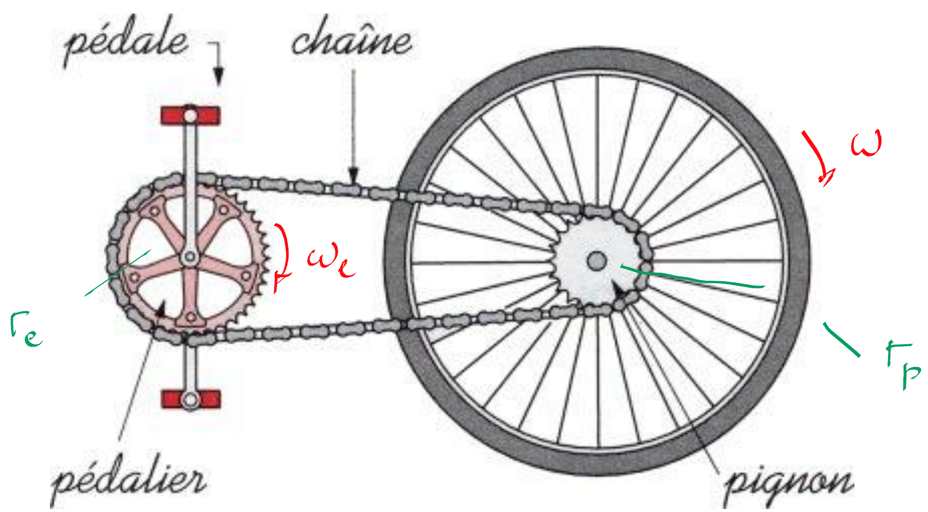
$$\begin{cases} ma = f \\ I\alpha = 2r_e\, F - r\, f \end{cases}$$

Comme la partie inférieure de la roue pousse sur la route vers l'arrière, la force de frottement est dirigée vers l'avant !

Transmission du mouvement de rotation

$$\underbrace{\omega_p r_p}_{v_p} = \underbrace{\omega_e r_e}_{v_e}$$

$$v = \omega r = \omega_p r = \omega_e \frac{r\, r_e}{r_p}$$

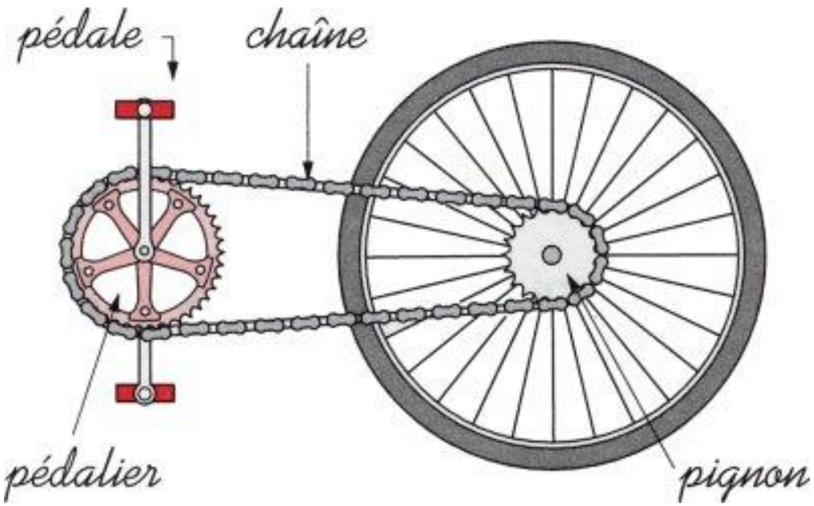


Exemple

Un tour de pédalier par seconde
Rayon du pédalier = 10 cm
Rayon du dérailleur = 5 cm
Rayon de la roue = 35 cm

$$\underbrace{\omega_p r_p}_{v_p} = \underbrace{\omega_e r_e}_{v_e}$$

$$v = \omega r = \omega_p r = \omega_e \frac{r\ r_e}{r_p}$$



$$\underset{6.28}{\omega_p} \frac{\overset{0.35}{r}\ \overset{0.1}{r_e}}{\underset{0.05}{r_p}} = 4{,}41\ m/s$$

15,9 Km/h

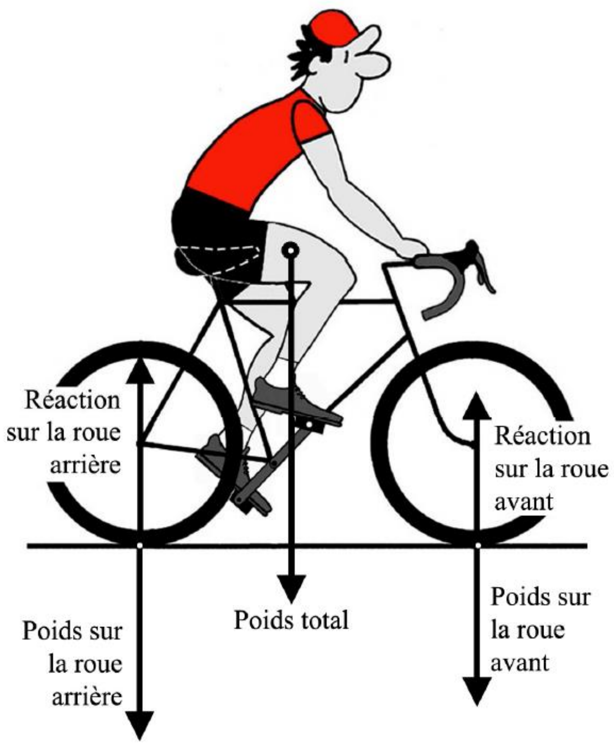
EN PRENANT

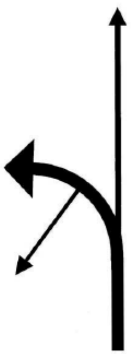
$r_p = 0.025$

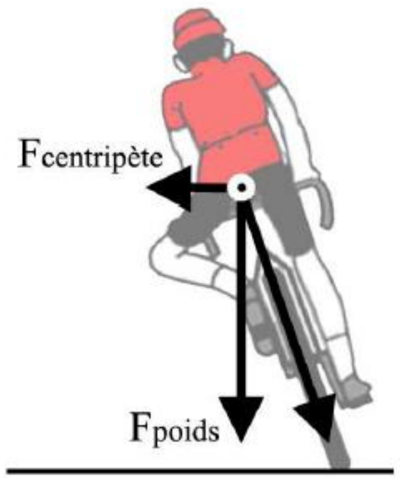
31,8 Km/h

Vitesse du vélo ?
Avec un engrenage avec deux fois moins de dents, quelle sera la vitesse ?
Comment conserver la même vitesse ?

Comment le cycliste peut se diriger avec précision ?



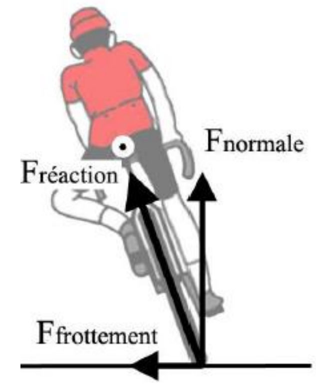




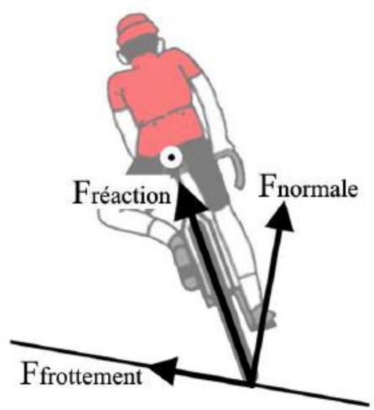
Pour prendre un virage, il faut produire une force centripète pour obtenir une accélération centripète.

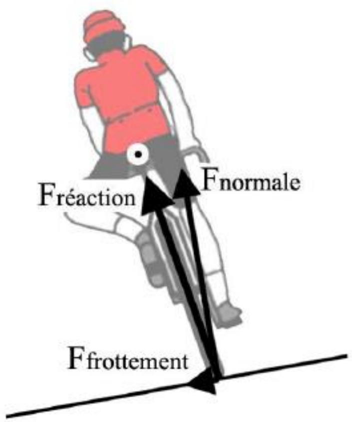
En vélo, on obtient cela en portant le centre de gravité du côté vers lequel on veut aller, en se penchant donc vers l'intérieur du virage.

C’est grâce au frottement qu’il est possible de tourner !



Si la route est en dévers,
le frottement est augmenté.
Le risque de dérapage grandit !





La force de frottement diminue
si le virage est relevé.
De tels virages sont
plus faciles à négocier.

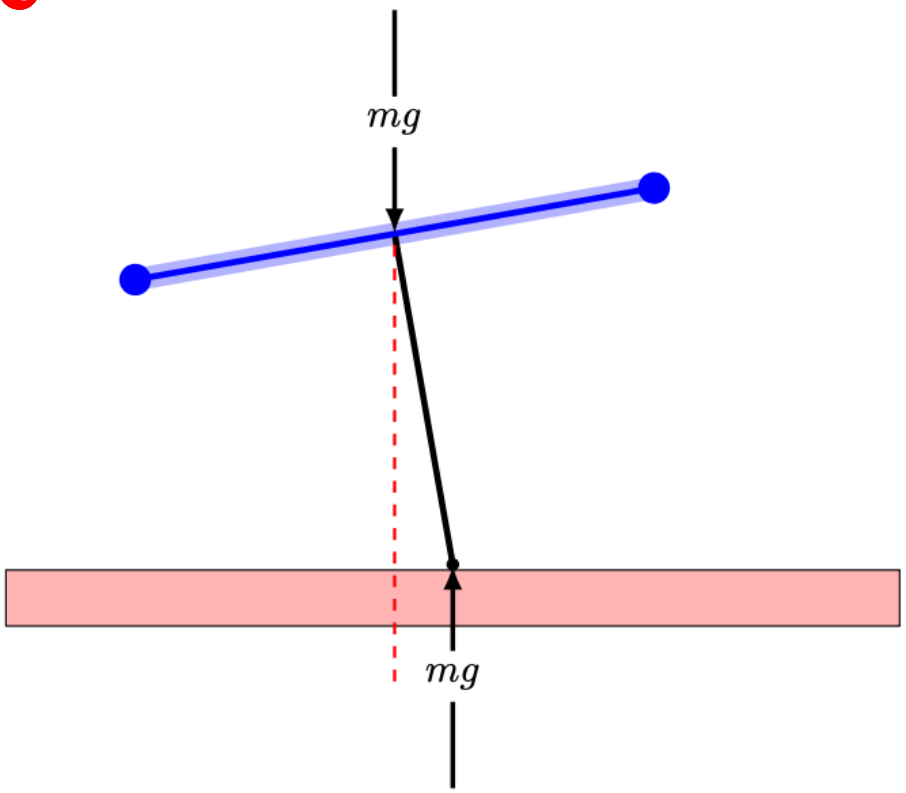
Le truc vraiment le plus non-intuitif de la physique...

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\ v^2 + \frac{1}{2}I\ \omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{I}\ \vec{\boldsymbol{\omega}}\right) = \sum \vec{\mathbf{M}}_i$$

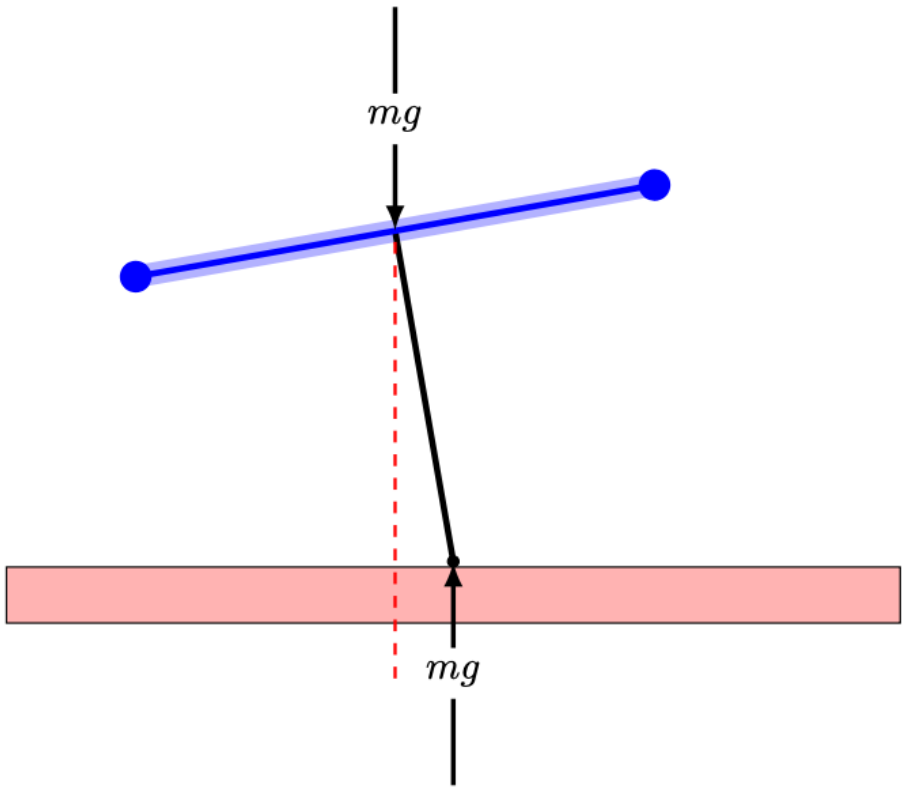
Quand la toupie ne tourne pas...



Pour que la toupie ne tombe pas, il faut que la verticale passant par le centre de gravité passe aussi par le point d'appui sur la table. Et comme cette surface est si petite que la moindre perturbation décale la verticale...

C'est un équilibre instable !

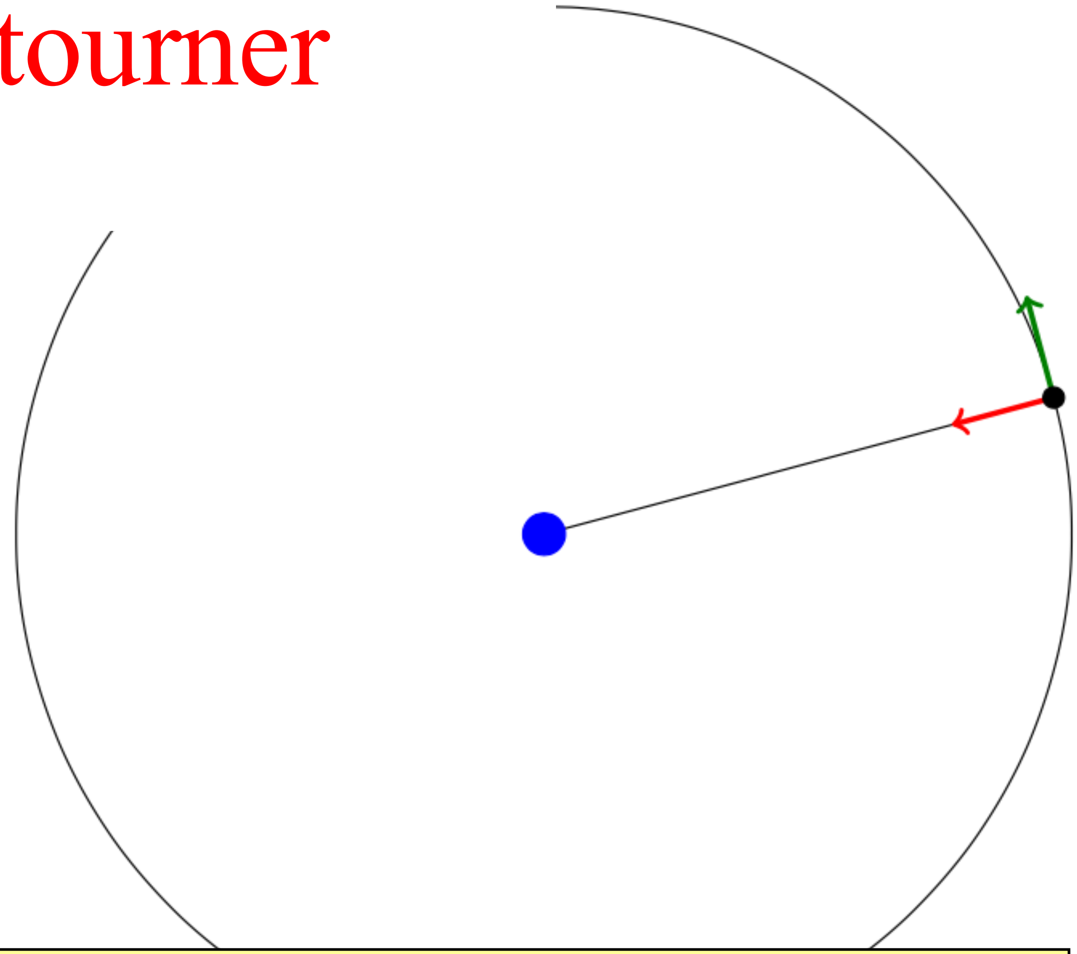
Mais quand la toupie tourne...



Lorsque la toupie est en rotation et bien que le centre de gravité n'est pas au dessus du point d'appui, elle ne tombe pas...

Il y a donc une force qui l'empêche de basculer ! Mais d'où vient cette force ?

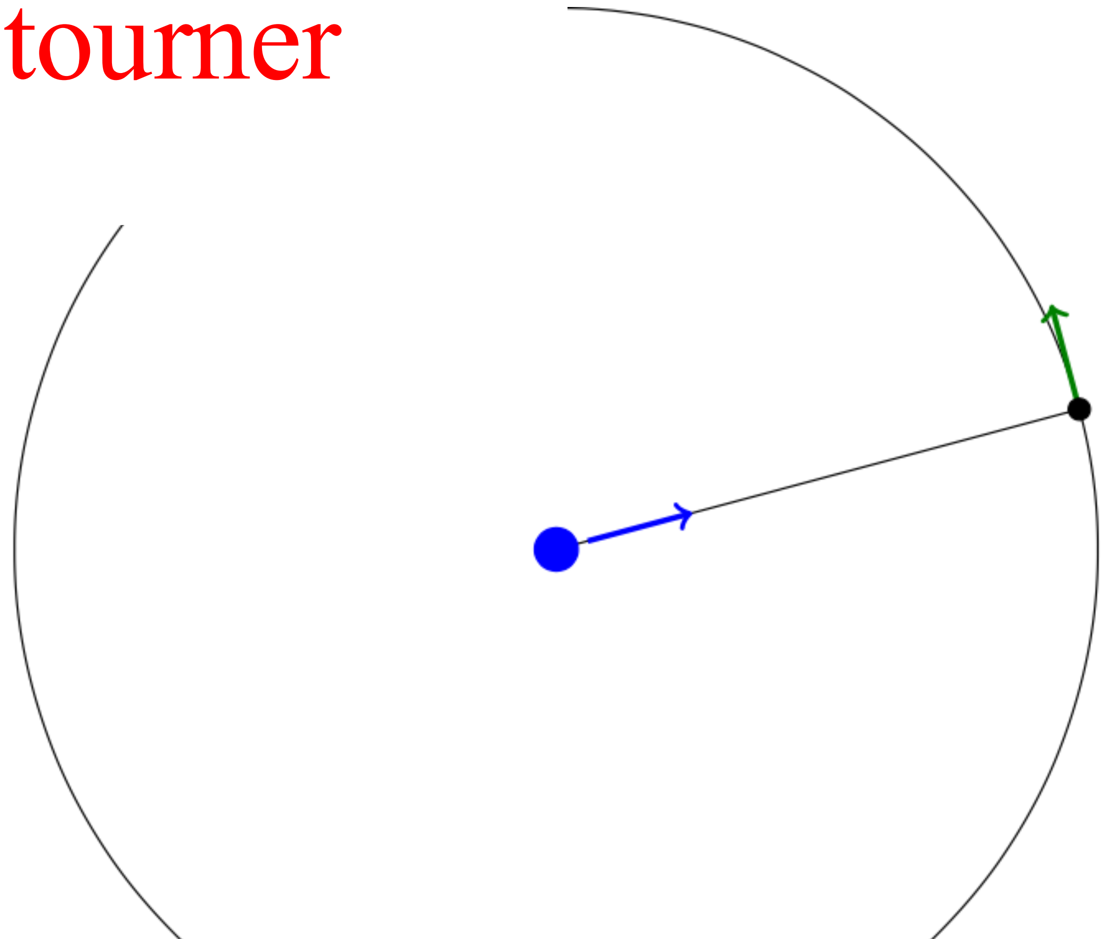
Pour faire tourner une bille...



Depuis Galilée, nous savons qu'en l'absence de force, une bille suit une trajectoire en ligne droite à vitesse constante...

Et donc pour faire tourner une bille,
il faut appliquer une force centripète sur la bille.

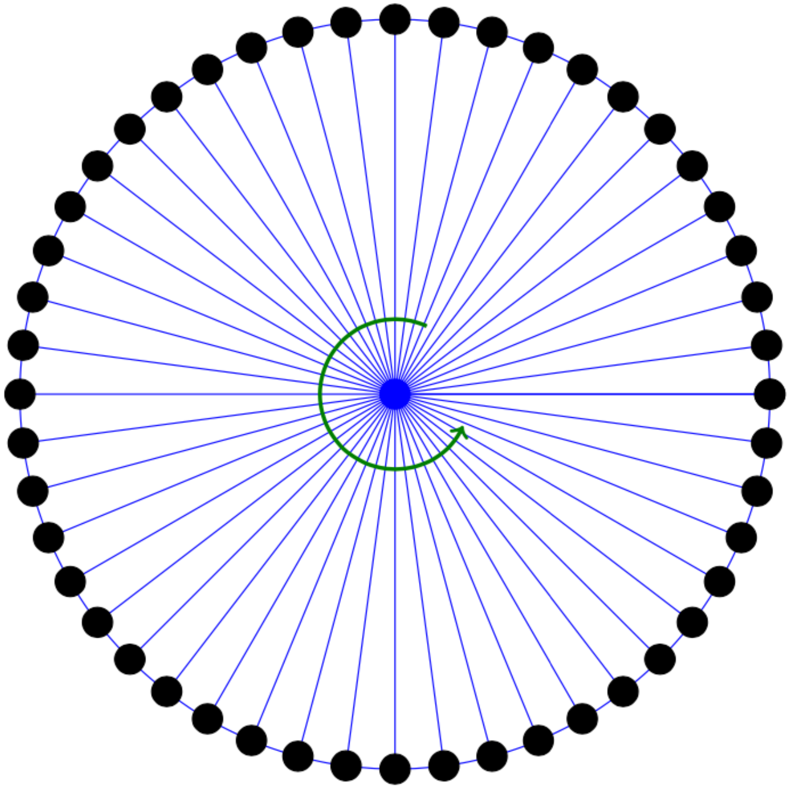
Pour faire tourner une bille...



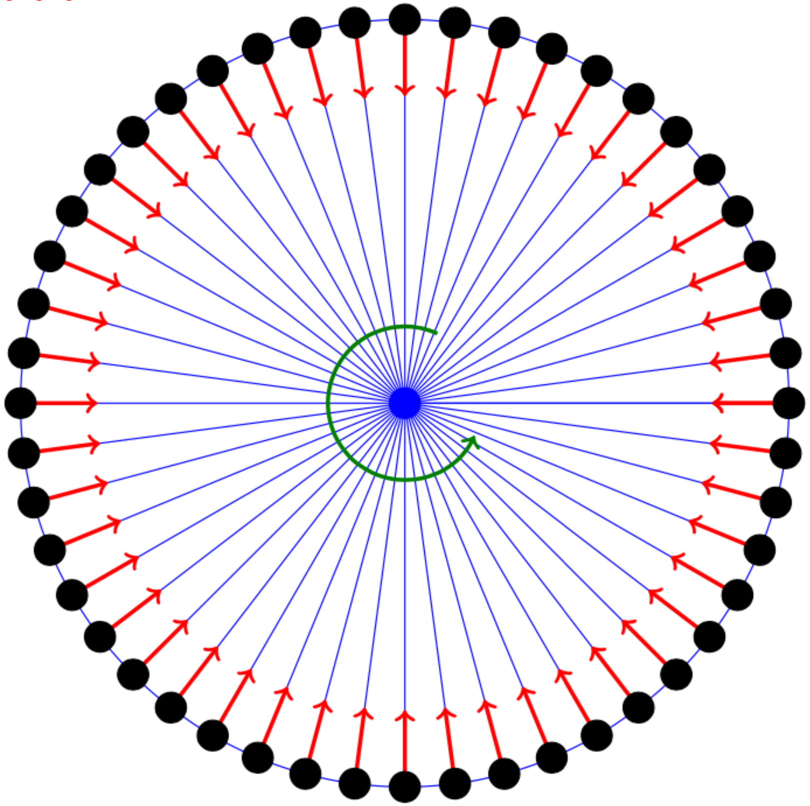
Depuis Galilée, nous savons qu'en l'absence de force, une bille suit une trajectoire en ligne droite à vitesse constante...

Par contre en vertu du principe d'action et de réaction,
la bille applique une force centrifuge sur l'axe de rotation.

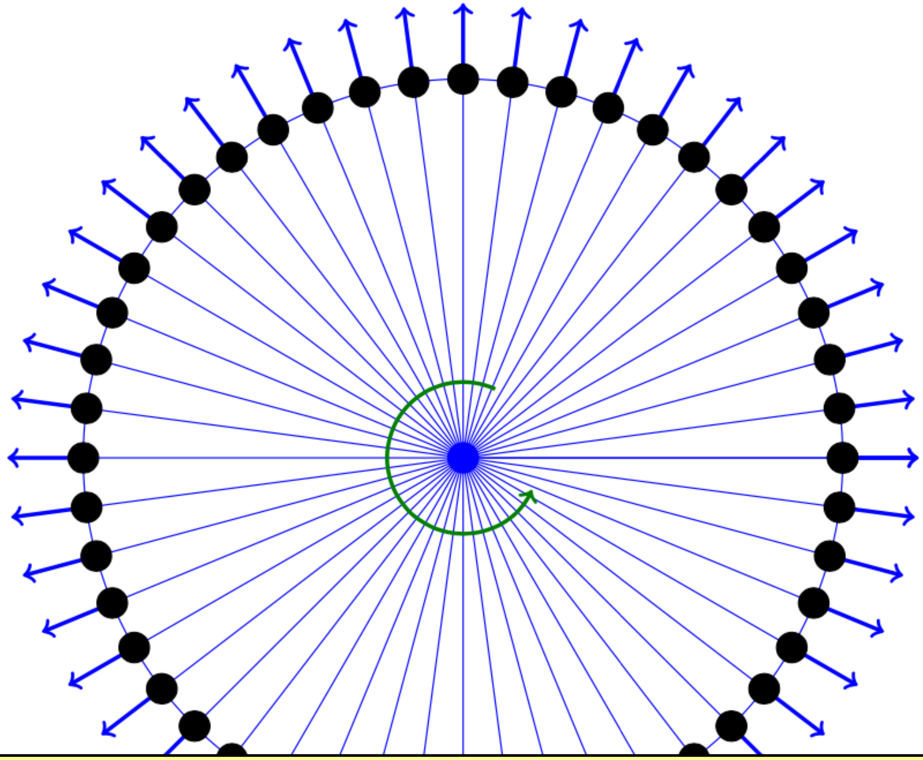
Modélisons notre toupie comme un manège de petites billes...



La toupie exerce
une force centripète
sur chaque bille...

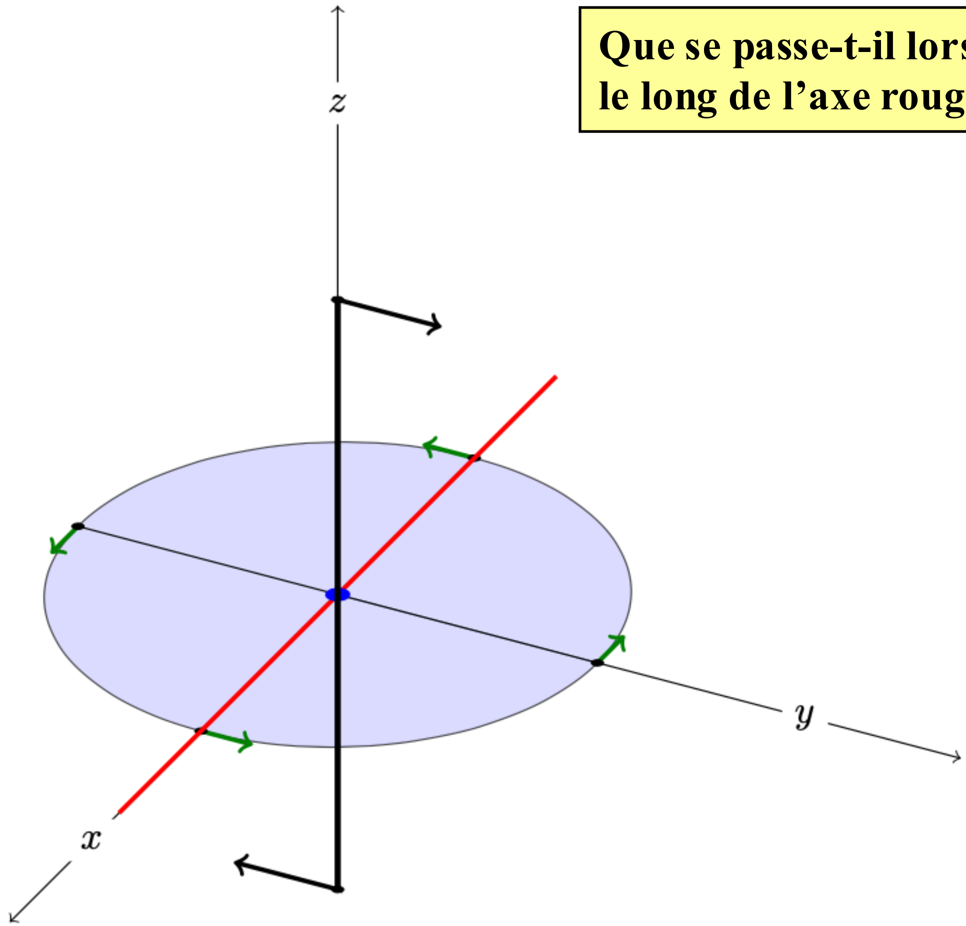


Chaque bille exerce une force centrifuge sur la toupie...



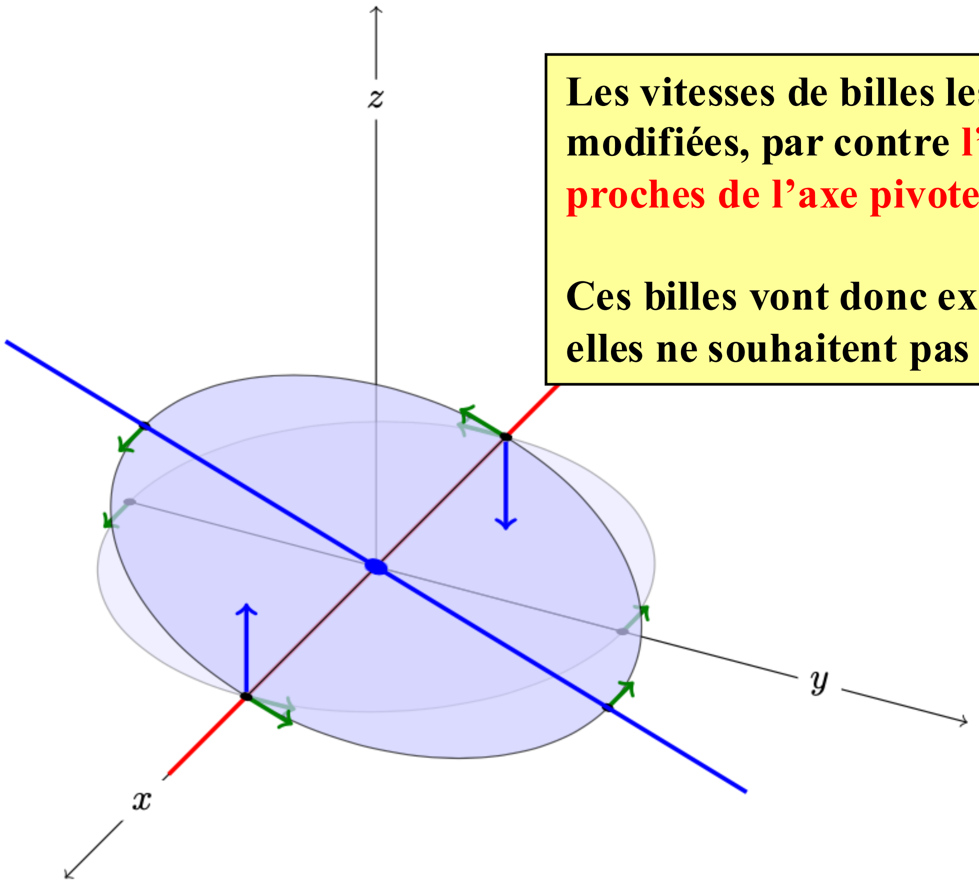
La force exercée par chaque bille est compensée par la force exercée par la bille diamétralement opposée.

Toutes les forces centrifuges s'annulent et l'axe ne bouge pas !



Que se passe-t-il lorsque nous faisons pivoter le plan le long de l'axe rouge ?

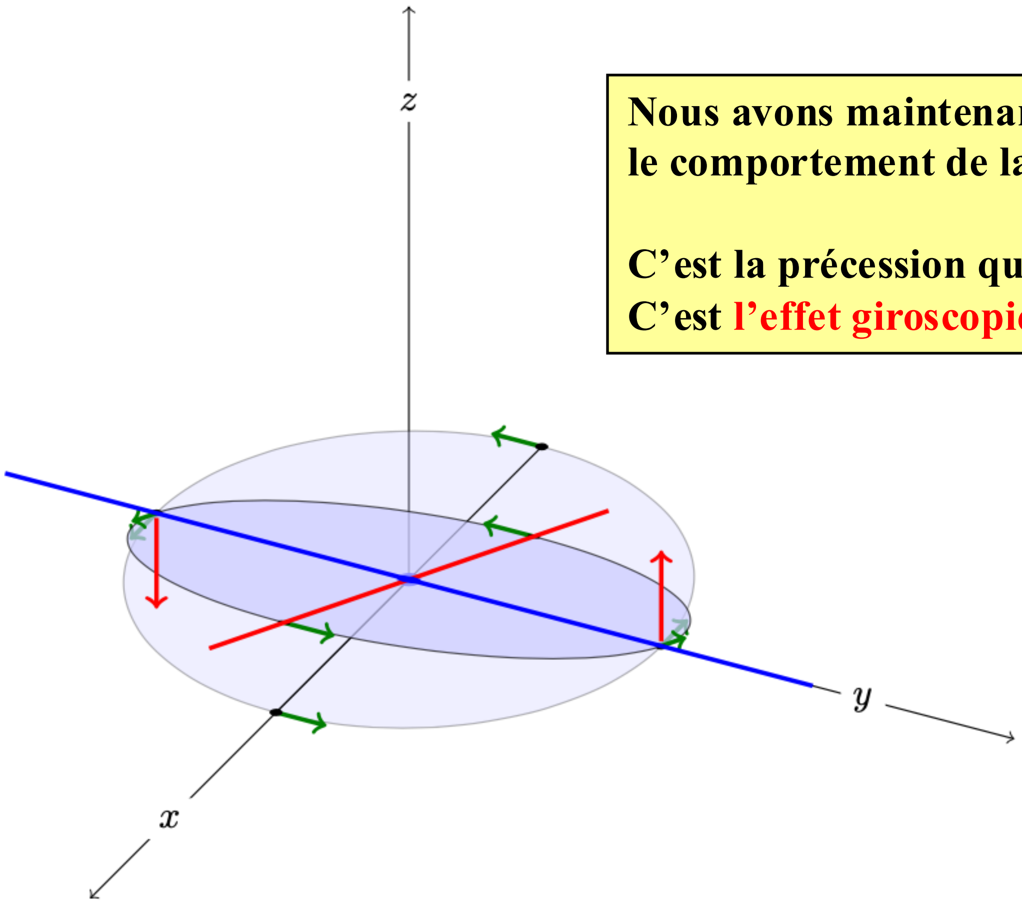
Appliquons
une tout petite perturbation
sur l'axe de notre toupie...



Les vitesses de billes les plus éloignées ne sont pas modifiées, par contre l'orientation des vitesses des billes proches de l'axe pivote comme la toupie !

Ces billes vont donc exercer une force sur la toupie car elles ne souhaitent pas changer de direction !

Les billes vont ainsi générer une rotation de précession...

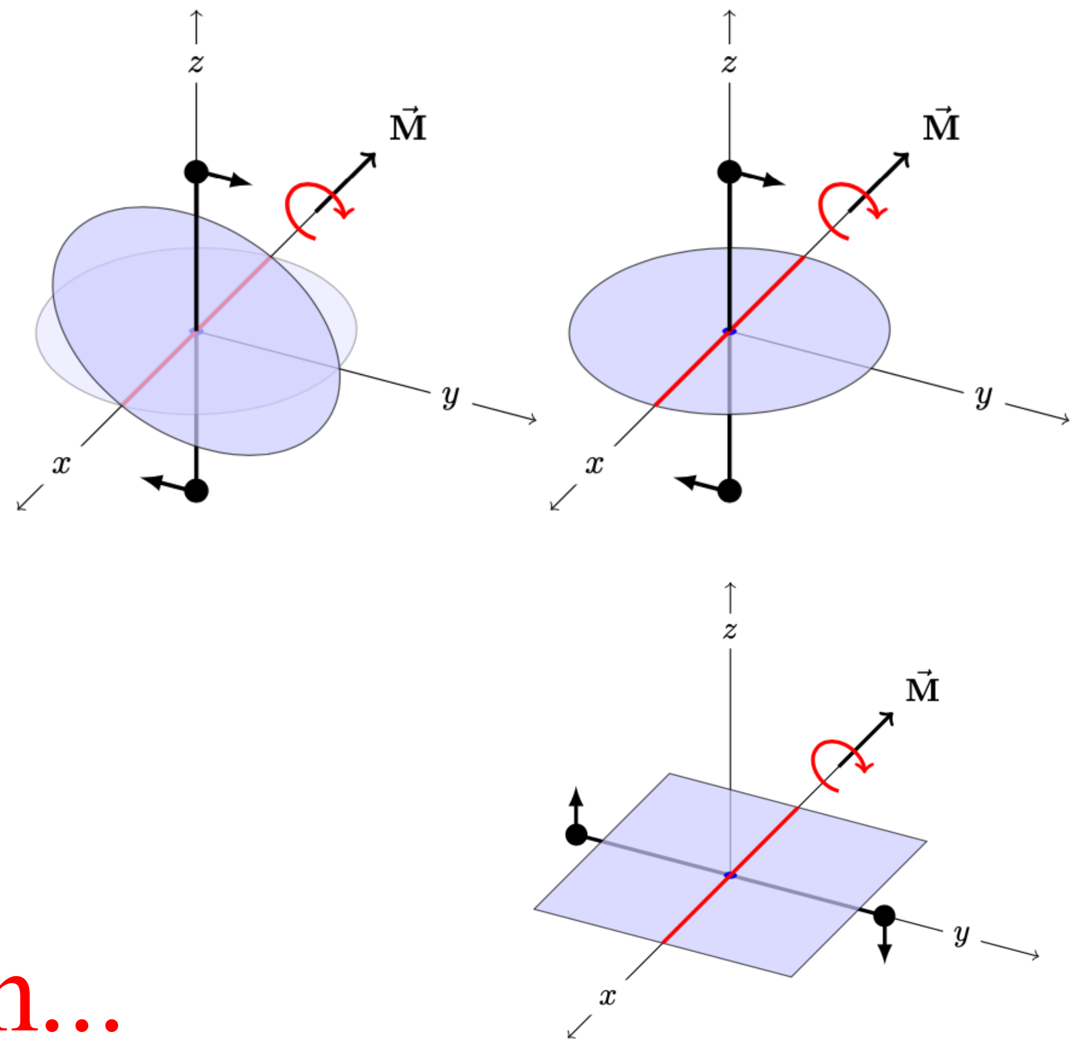


Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour expliquer le comportement de la toupie...

C'est la précession qui maintient la toupie en équilibre !
C'est l'effet giroscopique !

Et ce pivotement de précession va entraîner un pivotement qui va s'opposer au pivotement initial...

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\mathbf{I}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}\right) = \sum \vec{\mathbf{M}}}$$

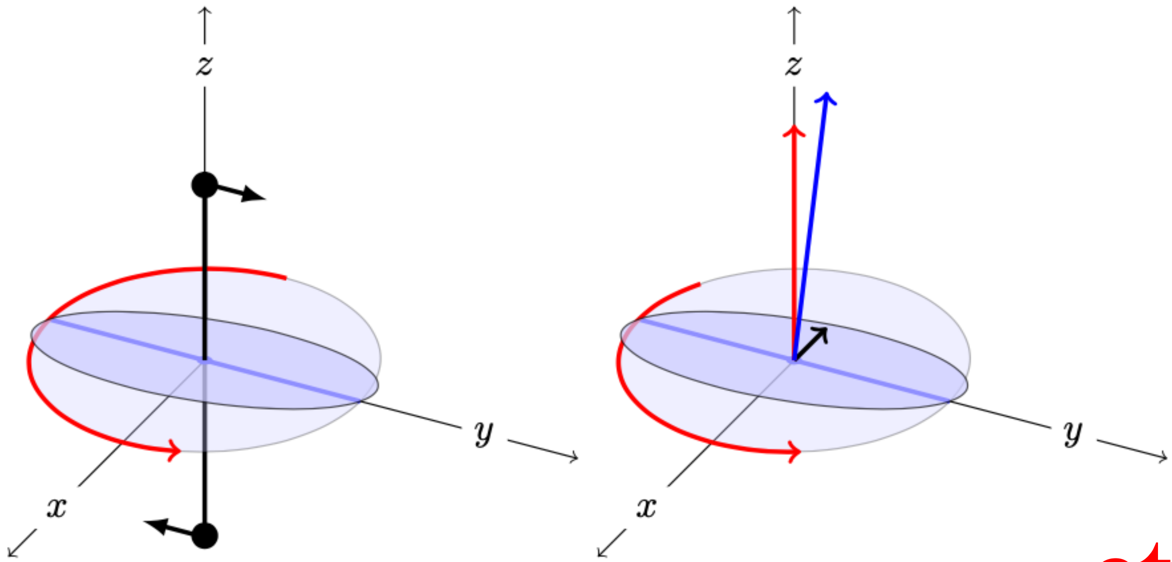


Pivoter
sans rotation...

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{I}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}\right) = \sum \vec{\mathbf{M}}$$

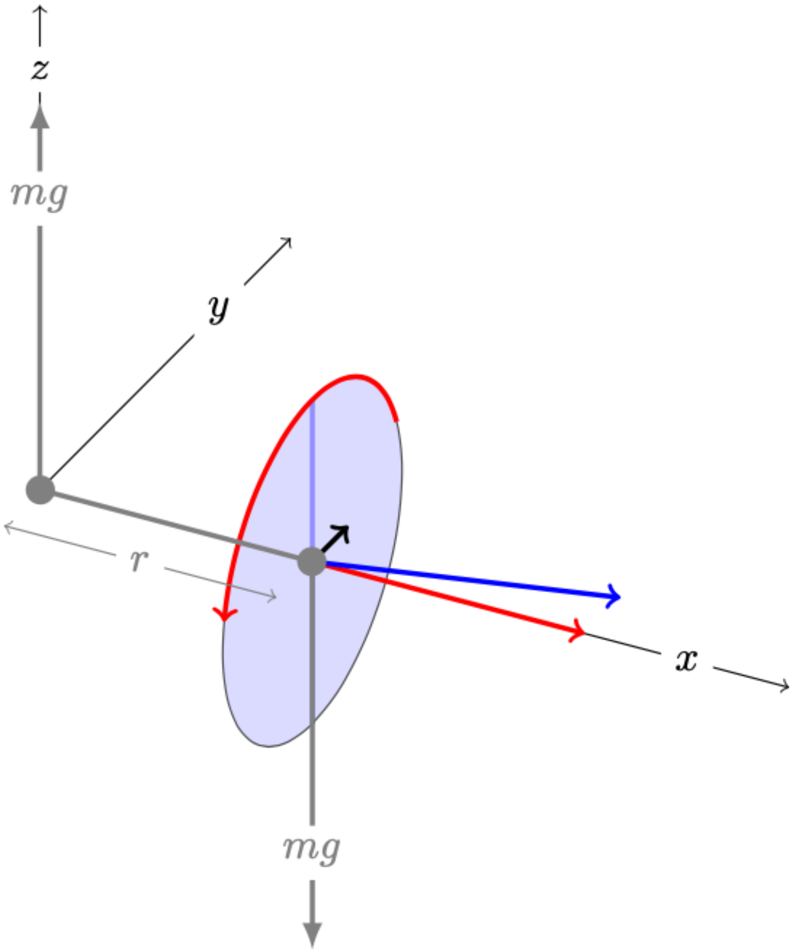
On observe maintenant que représenter un mouvement circulaire par un vecteur orienté le long de l'axe de rotation va permettre de réaliser des calculs tridimensionnels avec une efficacité diabolique !

C'est ce que fera Paul Fisette dans le prochain cours !



... et pivoter avec rotation

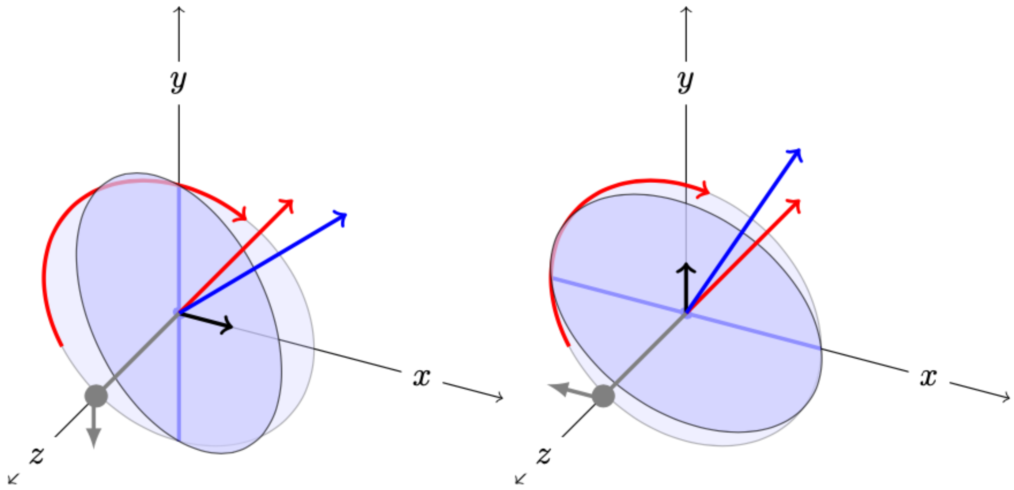
Gyroscope



$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{I}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}\right) = \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{g}}$$

$$\omega_{pr} = \frac{mgr}{I\omega}$$

Technique de pilotage en moto
le contre-braquage

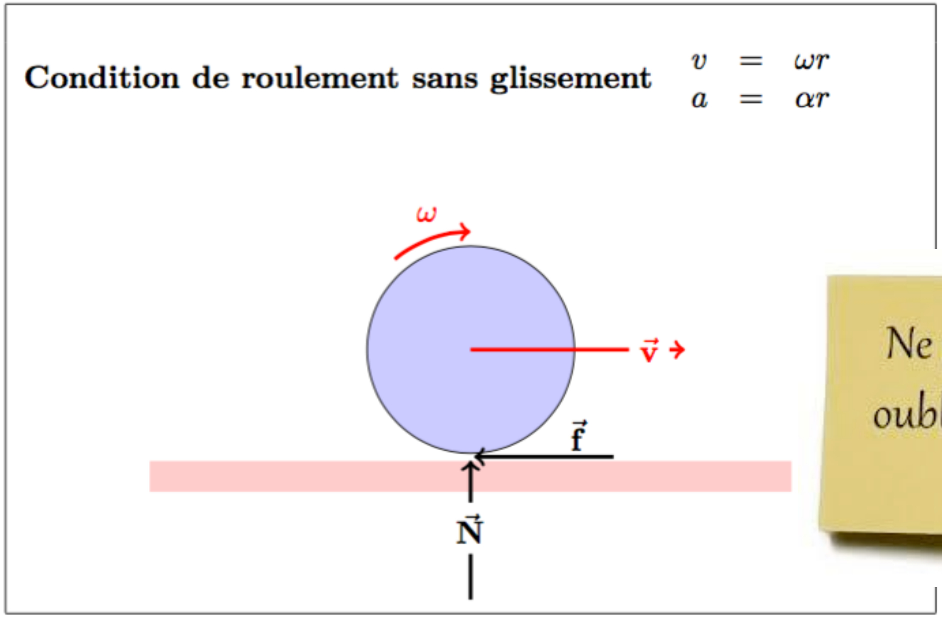


À moto, l'idée est la même : pousser le guidon dans la direction opposée au virage pour donner à la moto une inclinaison qui la pousse vers la bonne trajectoire.

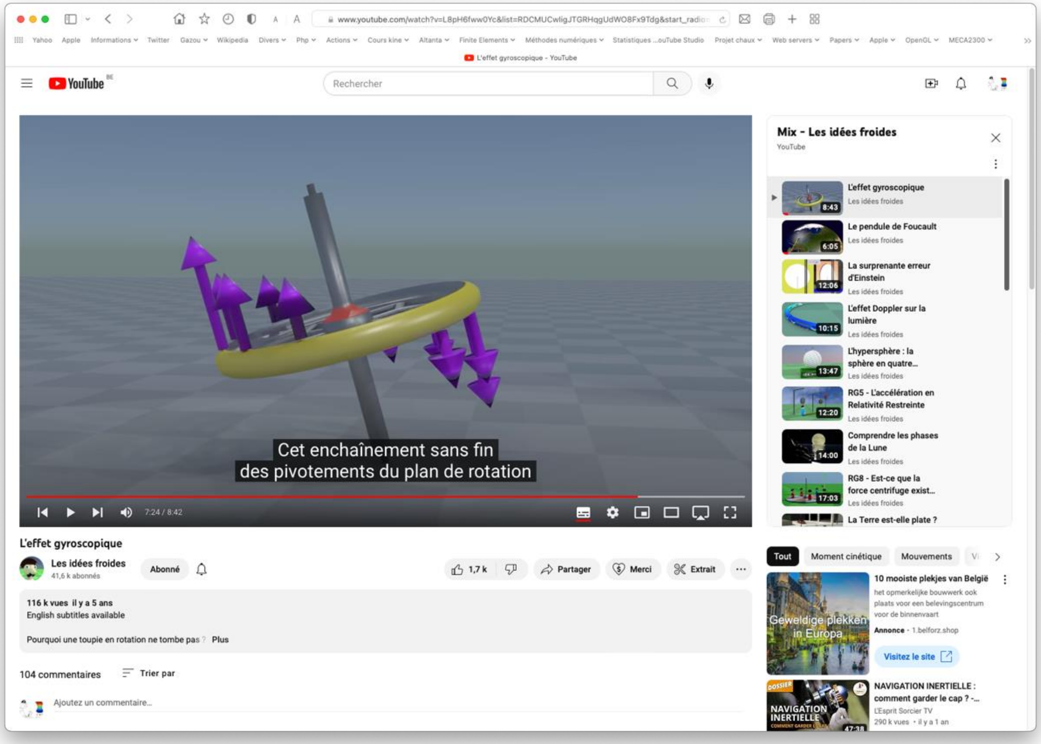
Ce truc de pilote s'explique tout simplement par l'exploitation d'une loi physique, la précession gyroscopique.

- Le frottement joue un rôle essentiel dans le roulement sans glissement d'une roue. Il y a roulement sans glissement lorsque la norme de la vitesse du centre est égale à celle de la vitesse de rotation tangentielle.

- La déformation du pneu est modélisée par le frottement de roulement.



Crédits :-)



https://www.youtube.com/watch?v=L8pH6fww0Yc

https://www.youtube.com/watch?v=XPUuF_dECVI&t=769s