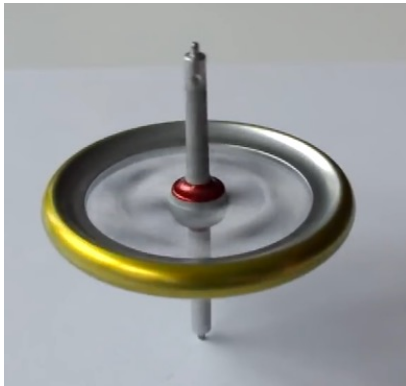


# Le truc vraiment le plus non-intuitif de la physique...



$$\frac{d}{dt} (m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$
$$\frac{d}{dt} (I \vec{\omega}) = \sum \vec{M}_i$$

Résumé des épisodes précédents :-)

Episode 1 : Décrire le mouvement

Episode 2 : Newton et la force de gravité

Episode 5 : Le frottement

Episode 6 : L'énergie c'est formidable !

Episode 9 : La mécanique des corps : **oooooupppsss : cela tourne !**

Episode 10 : Le truc plus non intuitif !

La cause :  
la force !

Résistance au  
mouvement = masse

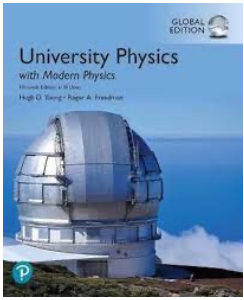
$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

La conséquence :  
l'accélération !



*Quelle est la voiture qui va accélérer le plus vite pour la même force motrice ?*

Linear  
Momentum



# Bilan de la quantité de mouvement

Résistance à la rotation  
= moment d'inertie

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

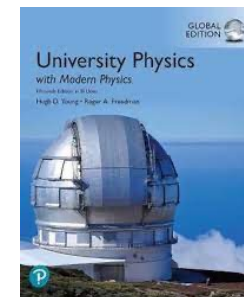
La cause :  
le moment de force !

La conséquence :  
l'accélération angulaire !

# Bilan du moment cinétique



*Que fait la danseuse  
pour tourner plus vite  
sur elle-même ?*



**Angular  
Momentum**

A quelle vitesse  
la voiture fera-t-elle  
un tonneau ?

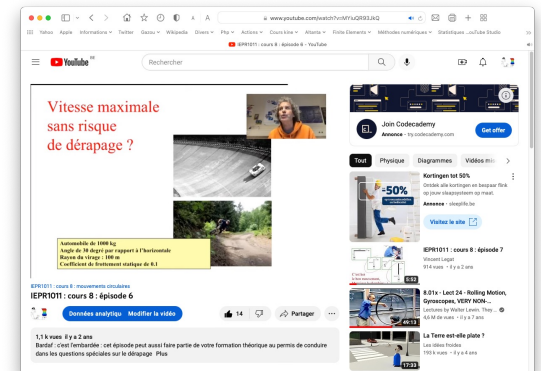


**Equilibre statique**

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

Tout d'abord...  
Est-ce que  
la voiture va dérapager ?



Trois équations !  
Trois inconnues !

Trois équations !  
Trois inconnues !

Calcul de la vitesse critique !  
C'est indépendant du coefficient de frottement !

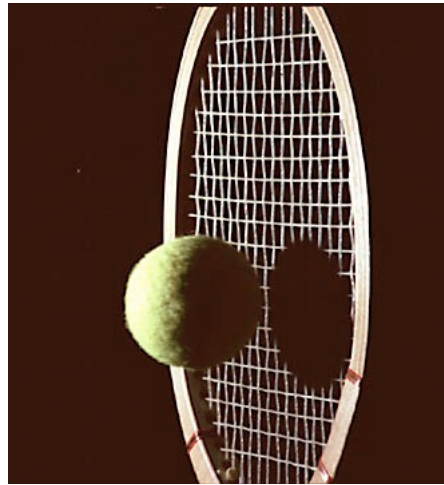




Concevoir une voiture  
qui ne fera pas trop vite un tonneau !



# Un corps, cela peut aussi être un paquet de corps !



**On peut appliquer la conservation de la quantité de mouvement ou de l'énergie pour l'ensemble du système.**

**C'est ce qu'on a fait pour analyser les chocs !**



# Un obus qui explose en deux parties...

**On peut déduire le mouvement d'un des morceaux à partir du mouvement de l'autre fragment !**

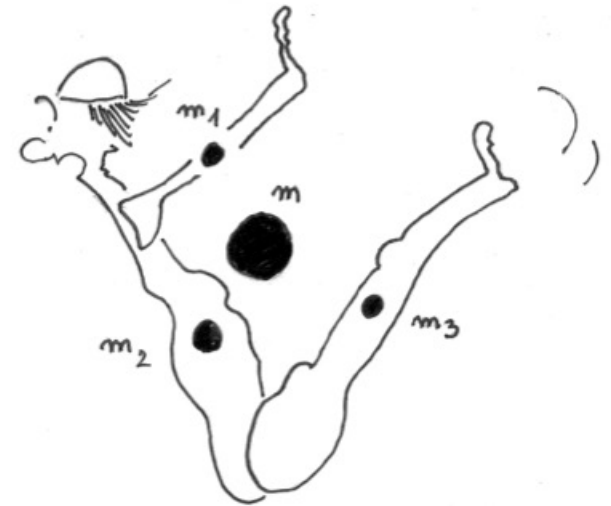
**Le centre de masse poursuit la trajectoire parabolique initiale...**



**... et la collision tout-à-fait inélastique entre deux voitures !**

Autopsie  
d'un accident

# La somme de moments de forces de gravité...



$$\sum m_i \vec{x}(t) = \sum m_i \vec{x}_i(t)$$

$$0 = \sum m_i (\vec{x}_i(t) - \vec{x}(t))$$

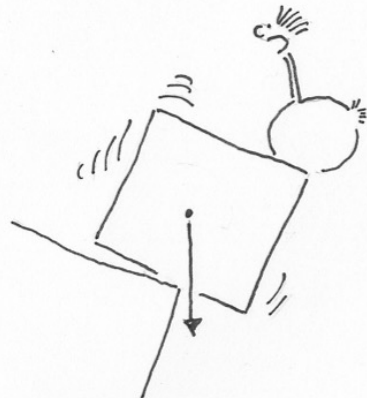
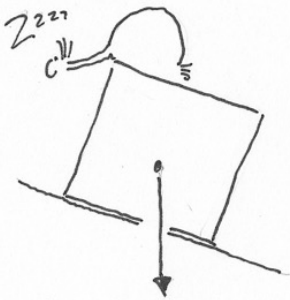
$$0 = \sum m_i \vec{g} \times \underbrace{(\vec{x}_i(t) - \vec{x}(t))}_{\vec{r}_i(t)}$$

... par rapport  
au centre de gravité  
est nulle

# La somme de moments de forces de gravité...

**Le centre de gravité est le point d'application  
de la résultante des forces de gravité !**

**La connaissance de la position du centre de gravité est  
indispensable pour déterminer la stabilité d'un objet !**



... par rapport  
au centre de gravité  
est nulle

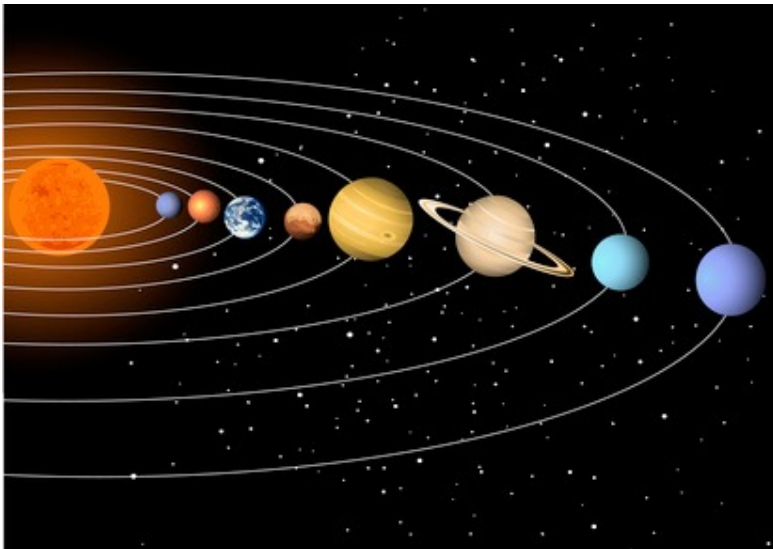
# Centre de gravité...

$$0 = \sum m_i \vec{g}_i \times (\vec{x}_i - \vec{x}_{\text{gravité}})$$

C'est différent uniquement si l'accélération de la gravité n'est pas constante !

Pour prédire le mouvement des planètes, c'est important !

Pour prédire le mouvement du corps humain, ce n'est vraiment pas bien important !



$$0 = \sum m_i (\vec{x}_i - \vec{x}_{\text{masse}})$$

... et centre  
de masse

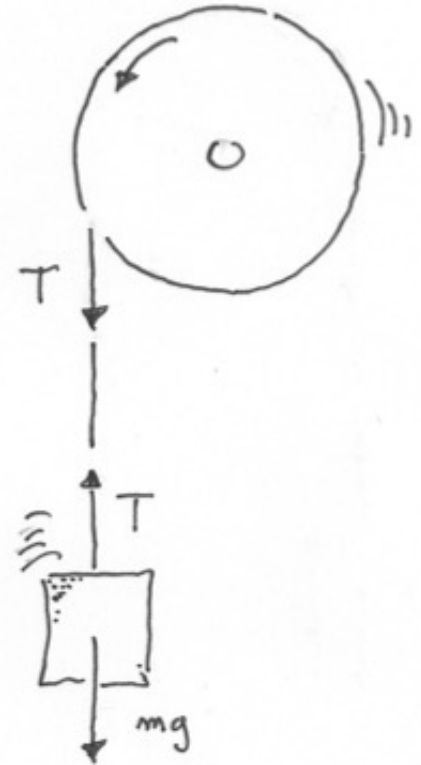
# On lâche un bloc attaché à une poulie

*Quelle est la vitesse angulaire de la poulie après 3 secondes ?  
Vitesse du bloc lorsqu'il est descendu de 1.6 mètre ?*

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$





Bloc qui tombe !

Calcul de l'accélération

Bloc qui tombe !

Calcul de la vitesse

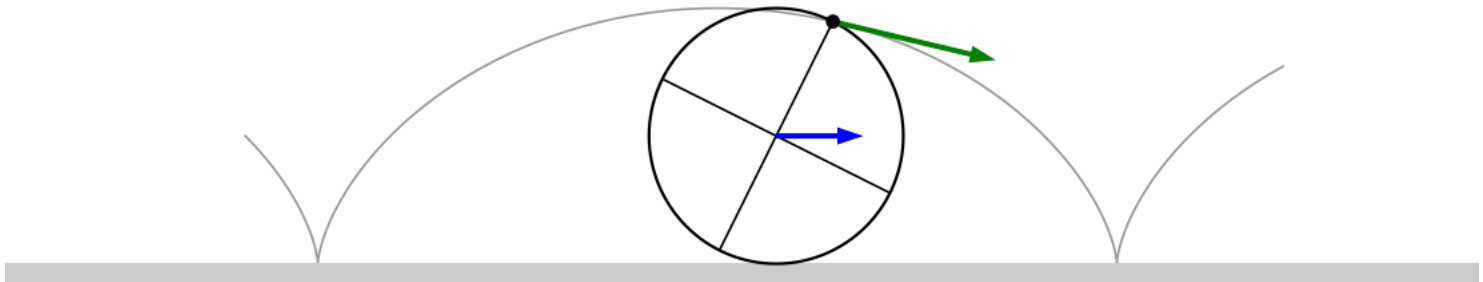
So easy !

L'approche énergétique !

# Faisons un peu de vélo...



**Comme la roue ne glisse pas, le point bas est très brièvement en contact avec la route.  
Ce point est au repos et la roue tourne autour ce point.**



# Le roulement : c'est combiner une translation et une rotation !

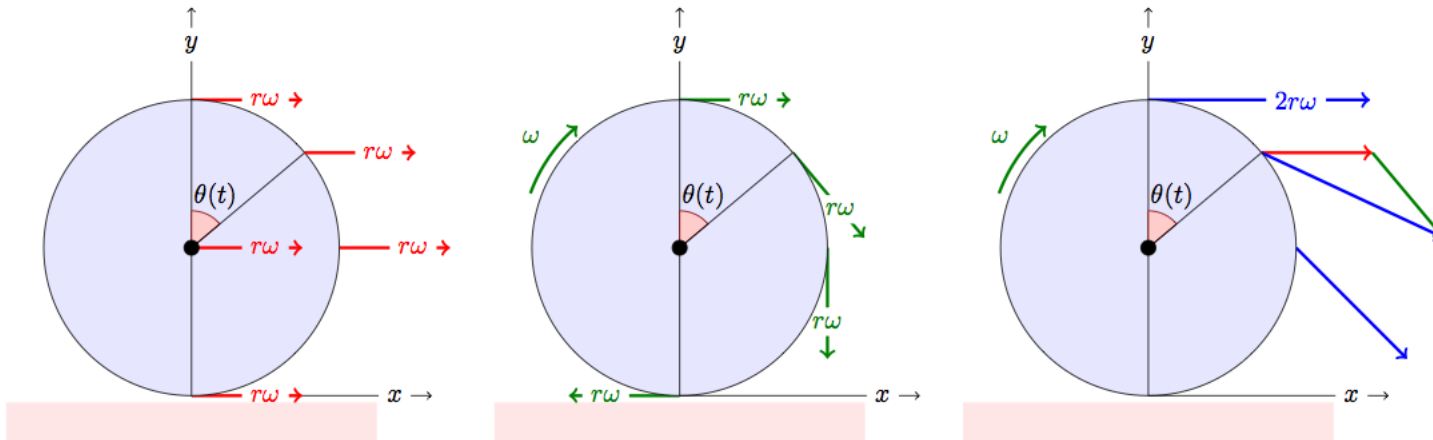


Rotation autour  
du centre

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_c + \vec{v}_t(t)$$

Translation  
du centre

# Le roulement, c'est une translation du centre avec une rotation autour du centre



$$\vec{v}(t) = \vec{v}_c + \vec{v}_t(t)$$

Translation  
du centre

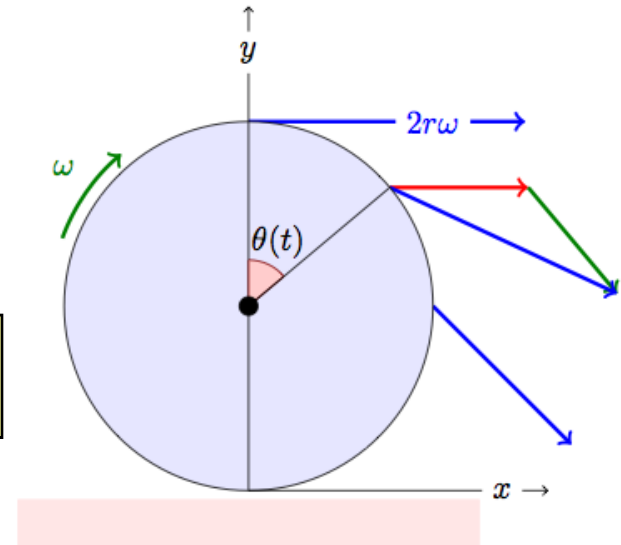
Rotation autour  
du centre

# Le roulement, c'est une translation du centre avec une rotation autour du centre

Le mouvement circulaire est dans le sens **horlogique**.  
La roue avance vers la droite.

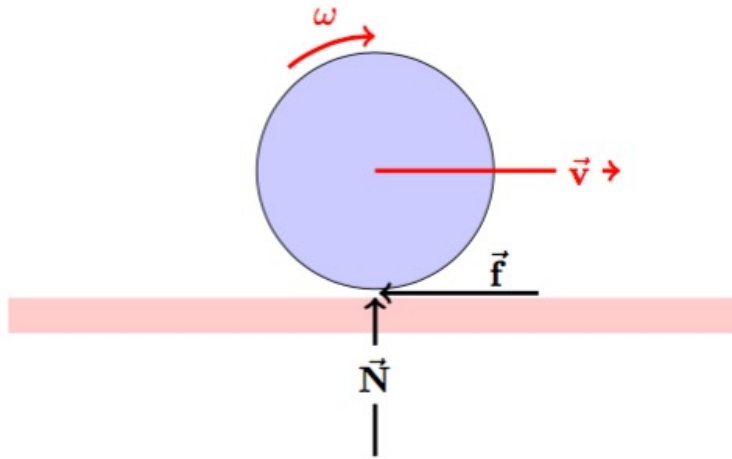
$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_c(t) \\ 0 \end{bmatrix} + r\omega(t) \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} a_c(t) \\ 0 \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ -\cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\alpha(t) \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Condition de roulement sans glissement

$$v = \omega r$$
$$a = \alpha r$$



*C'est l'inverse du glissement sans roulement ou dérapage incontrôlé !*

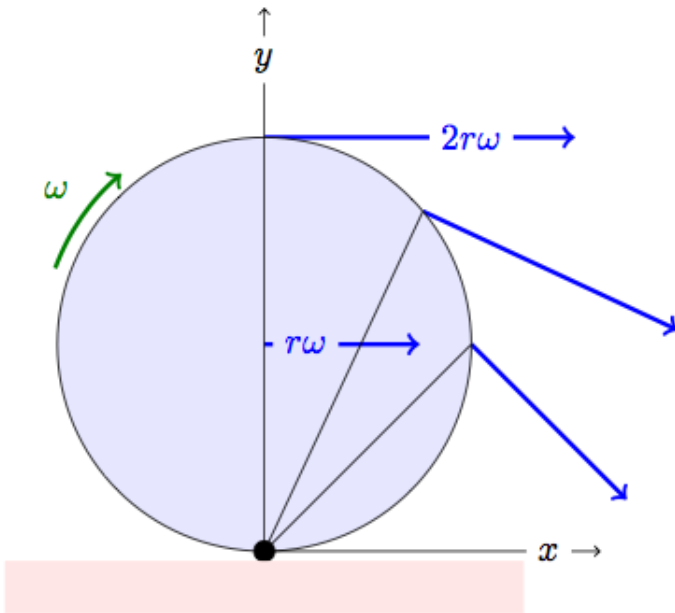
**Roulement  
sans glissement  
d'une roue !**





# La roue tourne autour du point de contact

En un tour de roue, le centre avance d'une distance  $2\pi R$



La norme de la vitesse du centre est égale à la norme de la vitesse tangentielle de rotation !

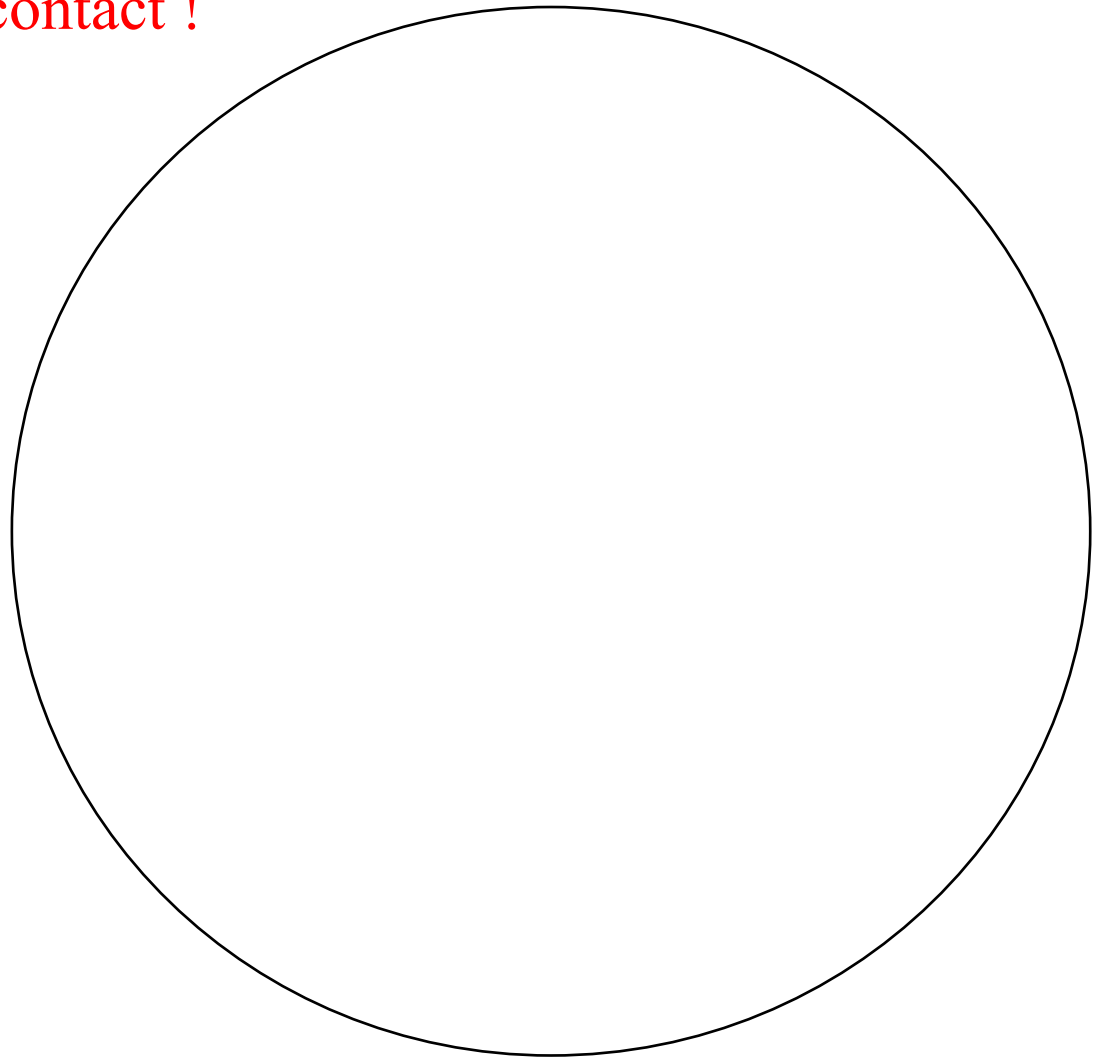
On en déduit la même relation pour les accélérations

Condition de roulement sans glissement

$$v = \omega R$$

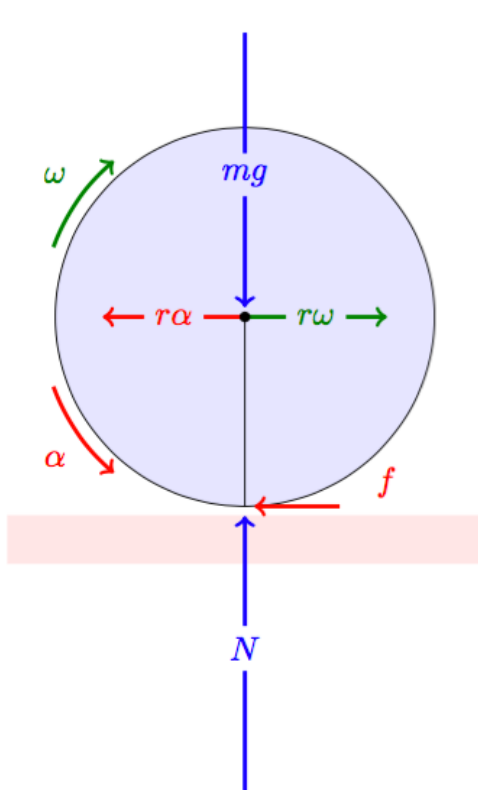
$$a = \alpha R$$

La roue tourne aussi  
autour du point de contact !  
Si, si, si !



# Une roue roule sans glisser...

## Le frottement devrait-il la ralentir ?



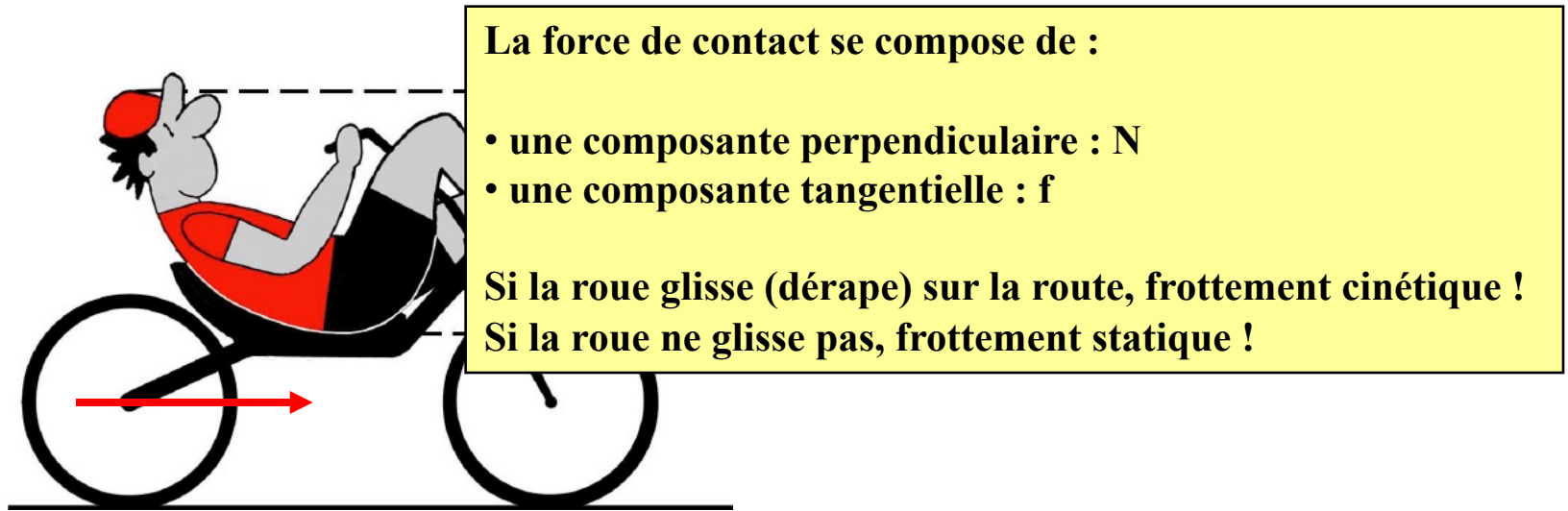
$$\begin{cases} a = r \alpha \\ ma = f \\ I \alpha = -r f \end{cases}$$

*Le frottement ralentit la progression de la roue mais a tendance à augmenter sa vitesse de rotation !*

*Ce modèle semble sérieusement déficient !*

*Les équations sont écrites par rapport aux normes des vecteurs tels que dessinés sur la figure !*

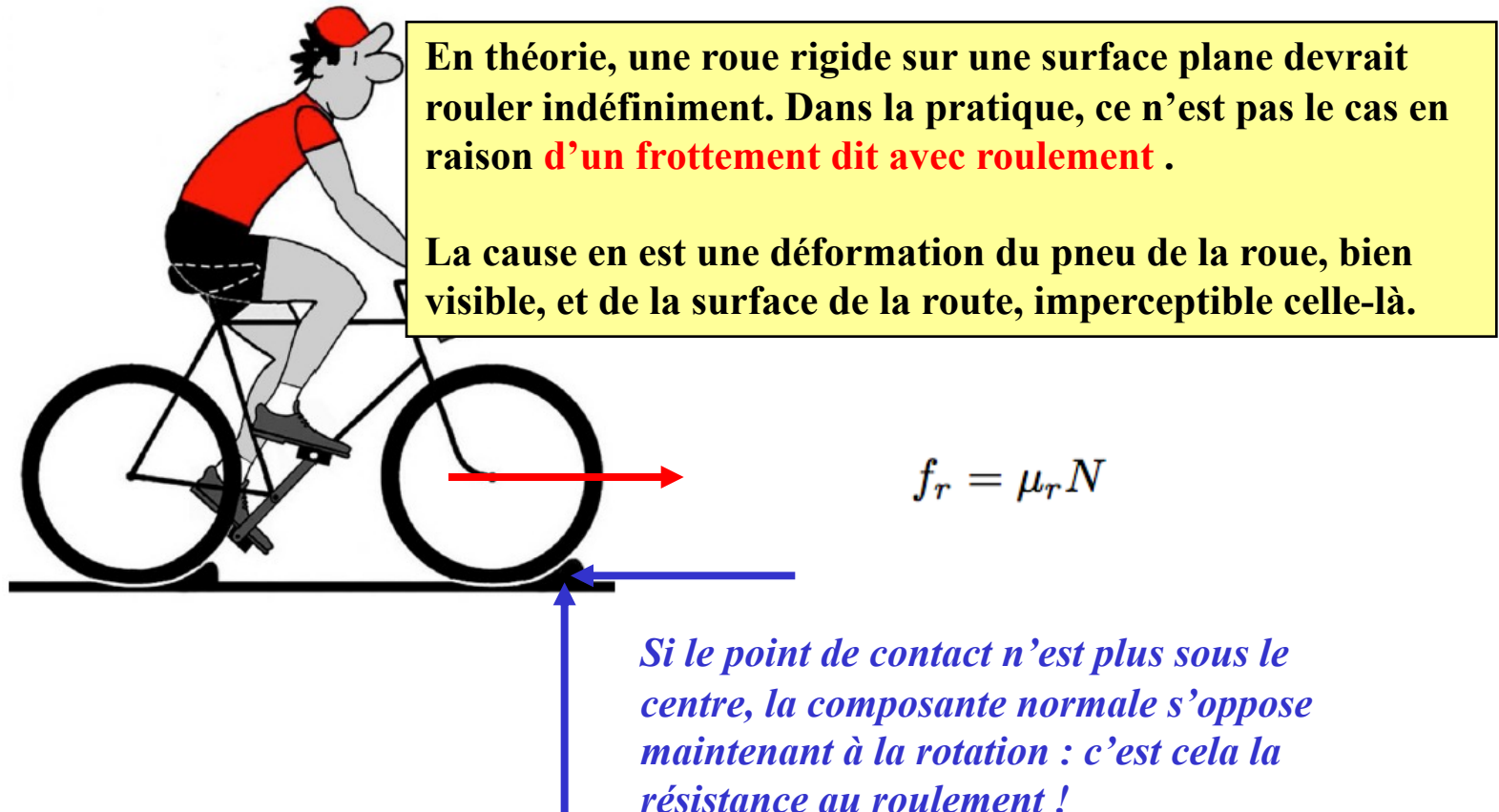
# Est-ce que le frottement roue-sol devrait ralentir notre cycliste ?



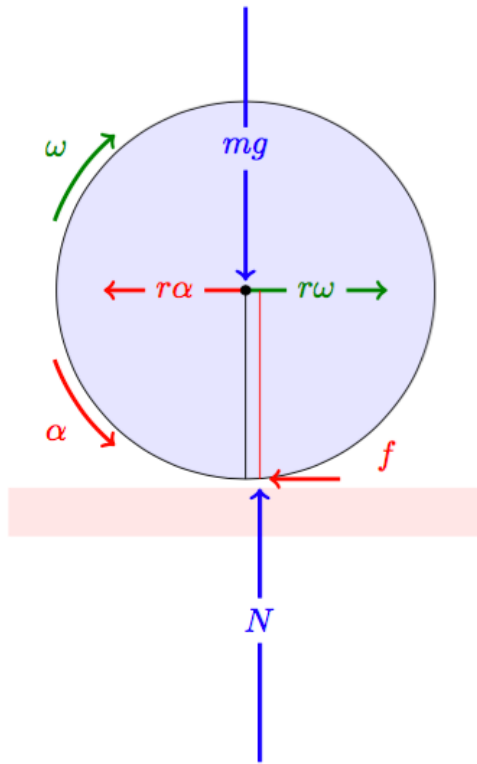
*Une roue roulant sur une route va finir par s'arrêter de rouler...*

*La force de frottement  $f$  ne peut pas expliquer cela, car son effet contribue simplement à faire tourner la roue de plus en plus vite !*

# En réalité, on est freiné par la résistance au roulement !



C'est la résistance  
au roulement qui ralentit  
une roue roulant sans glisser !

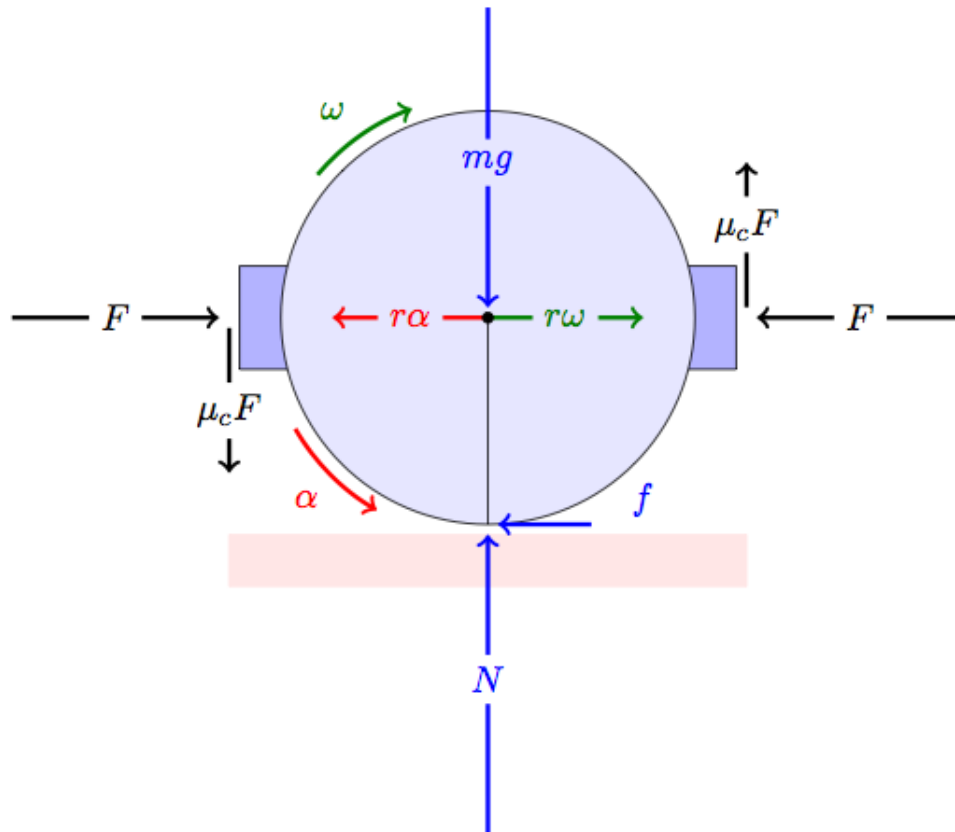


$$\begin{cases} a = r \alpha \\ ma = f \\ I\alpha = \epsilon N - r f \end{cases}$$

*Mais les surfaces ne sont pas parfaitement rigides et vont subir une déformation !*

*L'effet combiné de  $f$  et de  $N$  correspond au frottement par roulement et aux pertes d'énergie dues à la déformation de la roue.*

# Freinons !

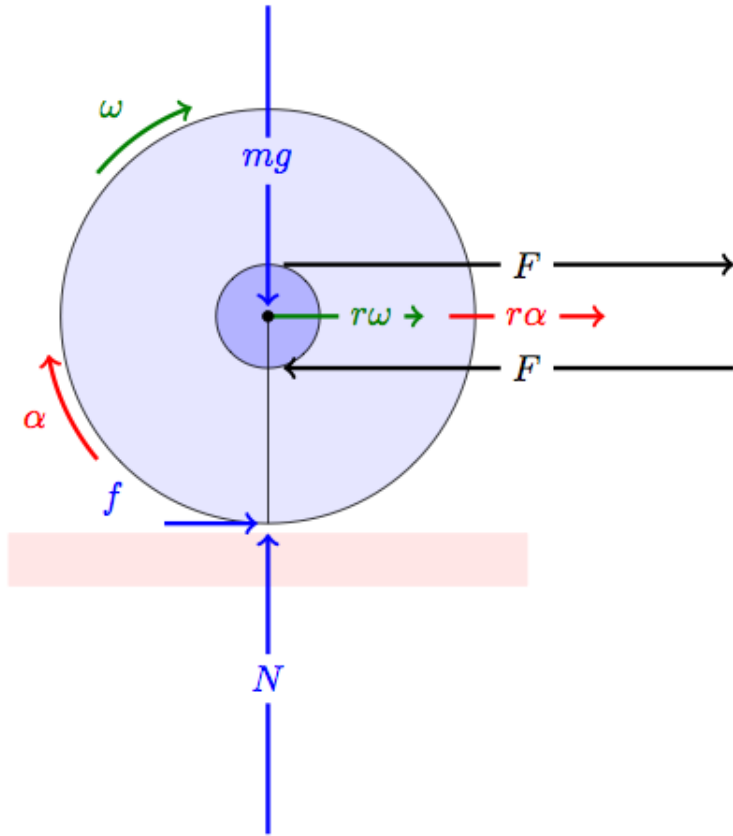


$$\begin{cases} ma = f \\ I\alpha = 2\mu_c r F - r f \end{cases}$$

*Le freinage optimal est obtenu lorsque la roue est juste sur le point de glisser.*

*Si on freine trop brutalement, la roue se bloque et glisse sur la route !*

# Accélérons !



$$\begin{cases} ma = f \\ I\alpha = 2r_e F - r f \end{cases}$$

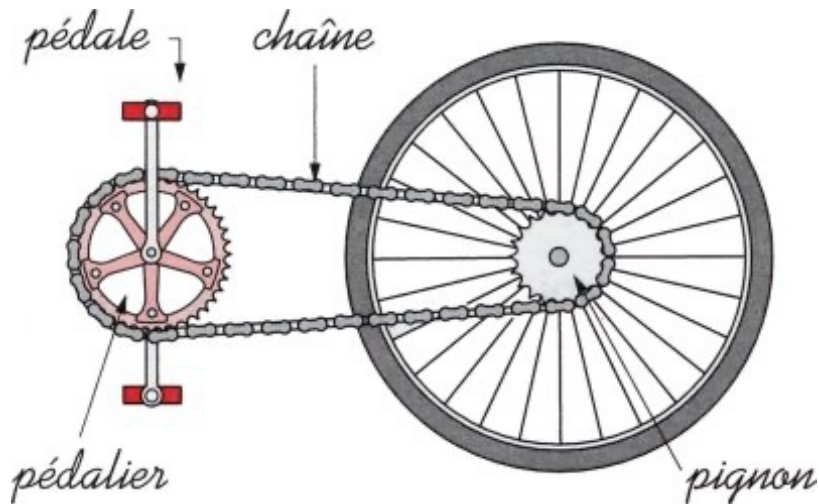
*Comme la partie inférieure de la roue pousse sur la route vers l'arrière, la force de frottement est dirigée vers l'avant !*



# Transmission du mouvement de rotation

$$\underbrace{\omega_p r_p}_{v_p} = \underbrace{\omega_e r_e}_{v_e}$$

$$v = \omega r = \omega_p r = \omega_e \frac{r r_e}{r_p}$$



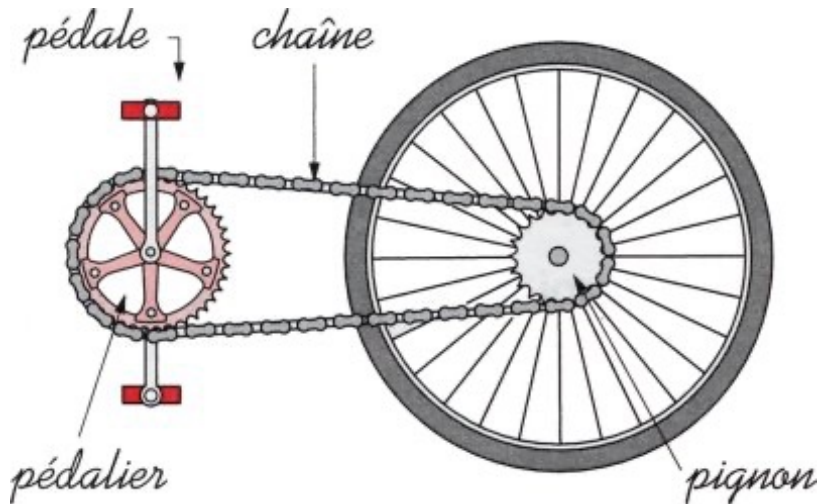
# Exemple

Un tour de pédalier par seconde

Rayon du pédalier = 10 cm

Rayon du dérailleur = 5 cm

Rayon de la roue = 35 cm



$$\underbrace{\omega_p r_p}_{v_p} = \underbrace{\omega_e r_e}_{v_e}$$

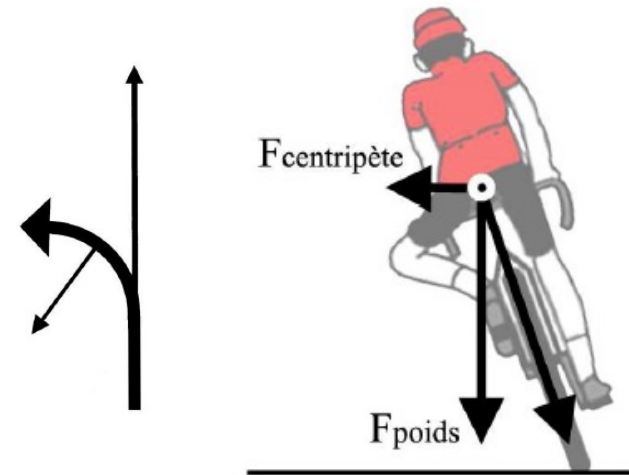
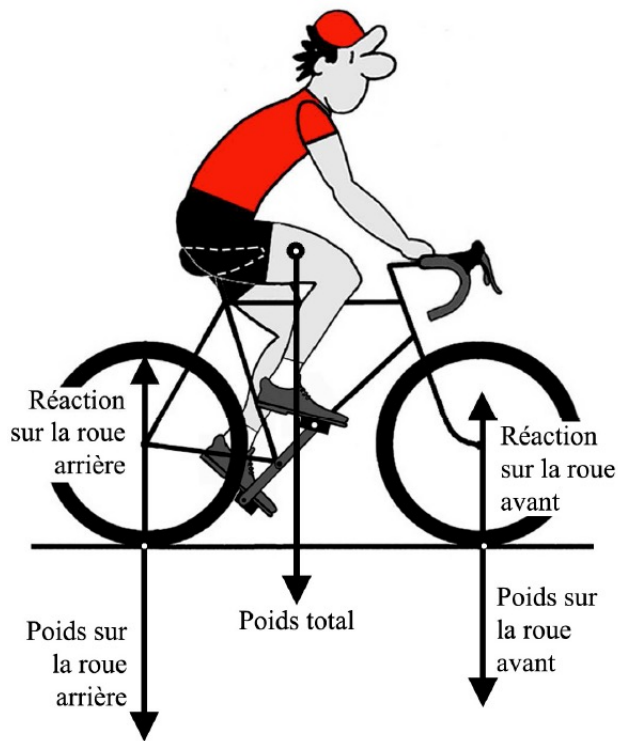
$$v = \omega r = \omega_p r = \omega_e \frac{r r_e}{r_p}$$

*Vitesse du vélo ?*

*Avec un engrenage avec deux fois moins de dents, quelle sera la vitesse ?*

*Comment conserver la même vitesse ?*

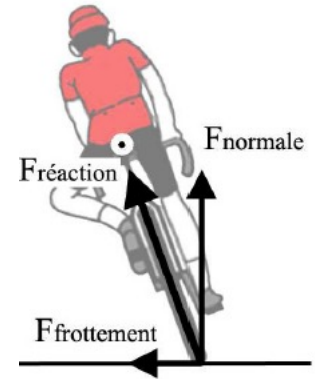
# Comment le cycliste peut se diriger avec précision ?



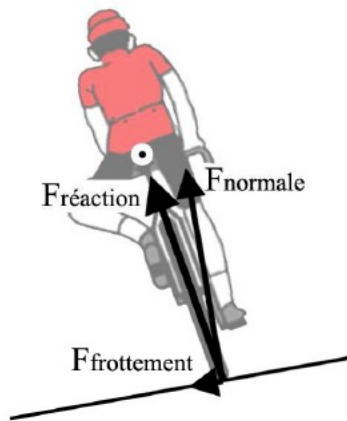
*Pour prendre un virage, il faut produire une force centripète pour obtenir une accélération centripète.*

*En vélo, on obtient cela en portant le centre de gravité du côté vers lequel on veut aller, en se penchant donc vers l'intérieur du virage.*

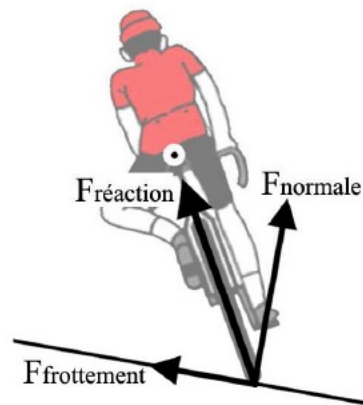
# C'est grâce au frottement qu'il est possible de tourner !



*Si la route est en dévers,  
le frottement est augmenté.  
Le risque de dérapage grandit !*



*La force de frottement diminue  
si le virage est relevé.  
De tels virages sont  
plus faciles à négocier.*

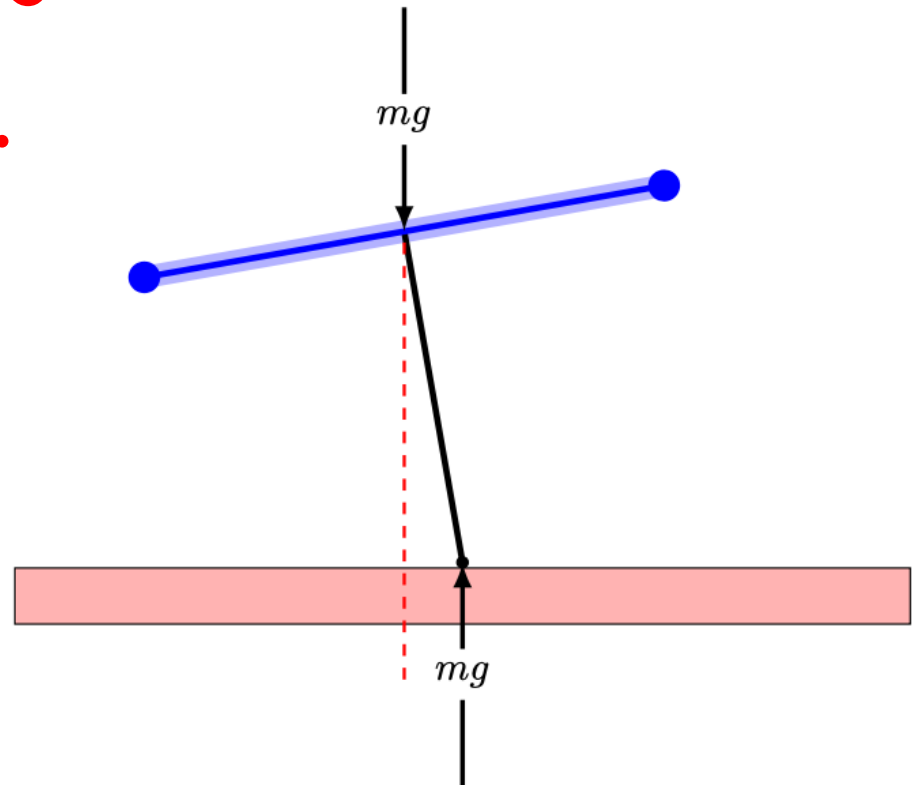


# Le truc vraiment le plus non-intuitif de la physique...



$$\frac{d}{dt} (m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$
$$\frac{d}{dt} (\mathbf{I} \vec{\omega}) = \sum \vec{M}_i$$

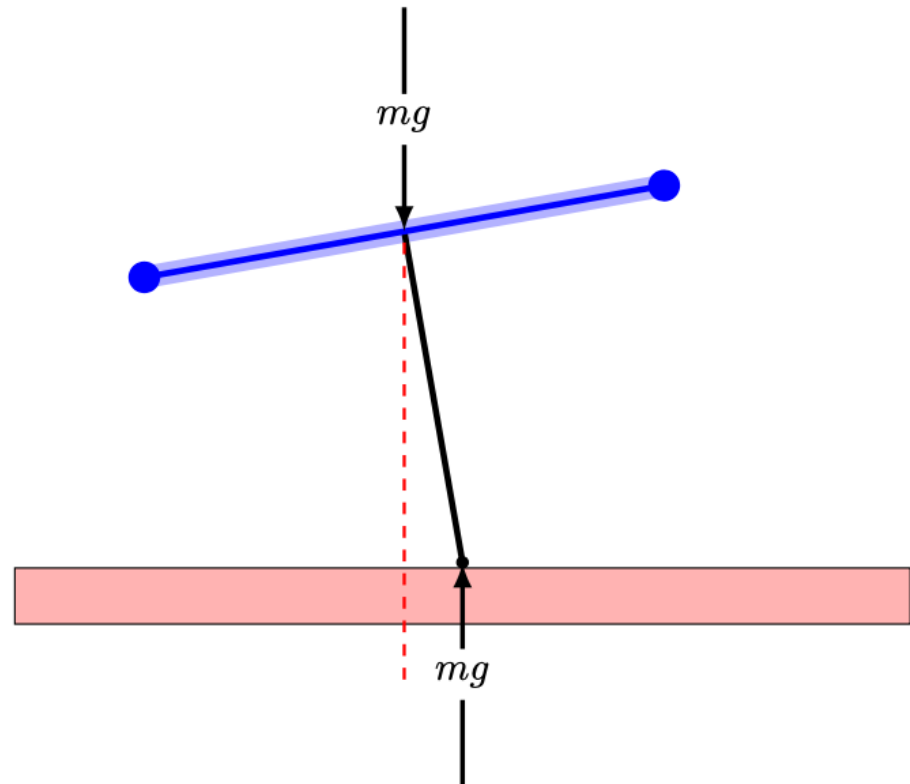
# Quand la toupie ne tourne pas...



Pour que la toupie ne tombe pas, il faut que la verticale passant par le centre de gravité passe aussi par le point d'appui sur la table. Et comme cette surface est si petite que la moindre perturbation décale la verticale...

C'est un **équilibre instable** !

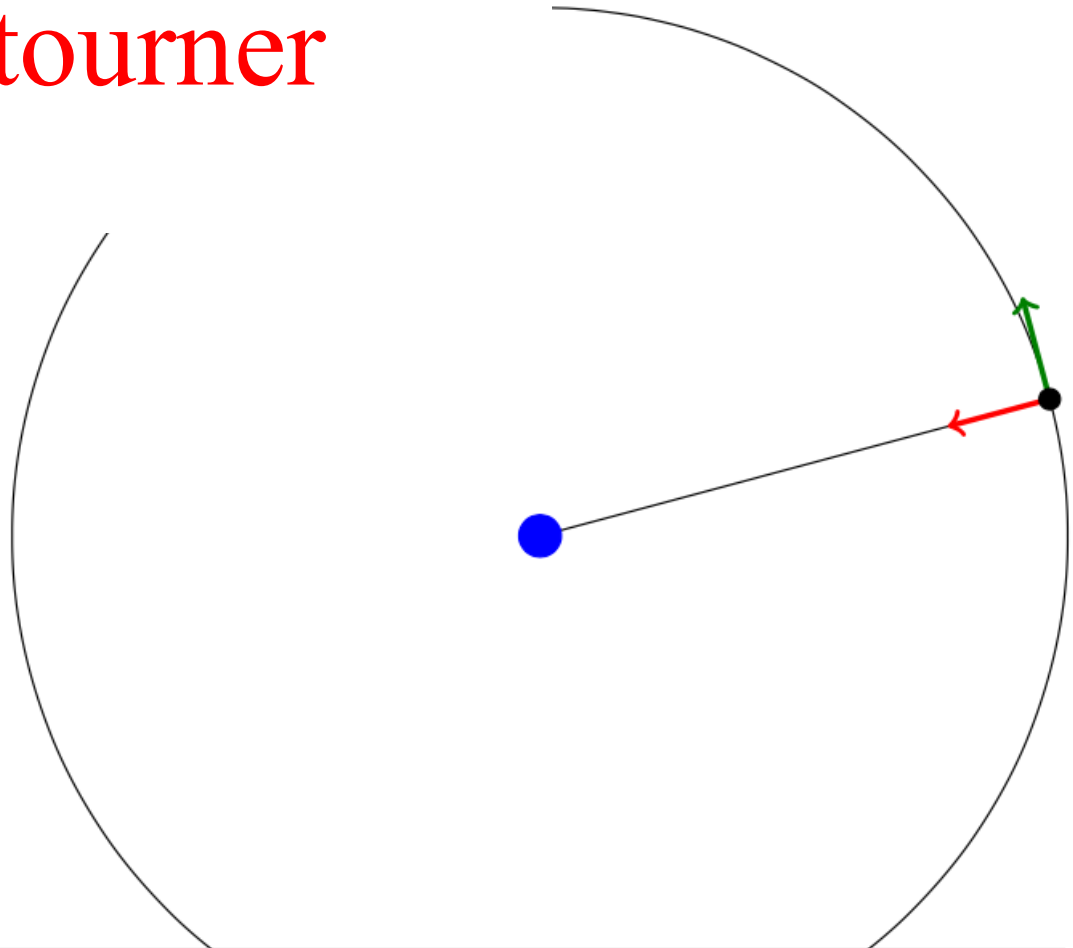
Mais  
quand  
la toupie  
tourne...



Lorsque la toupie est en rotation et bien que le centre de gravité n'est pas au dessus du point d'appui, elle ne tombe pas...

Il y a donc une **force qui l'empêche de basculer !**  
Mais d'où vient cette force ?

# Pour faire tourner une bille...

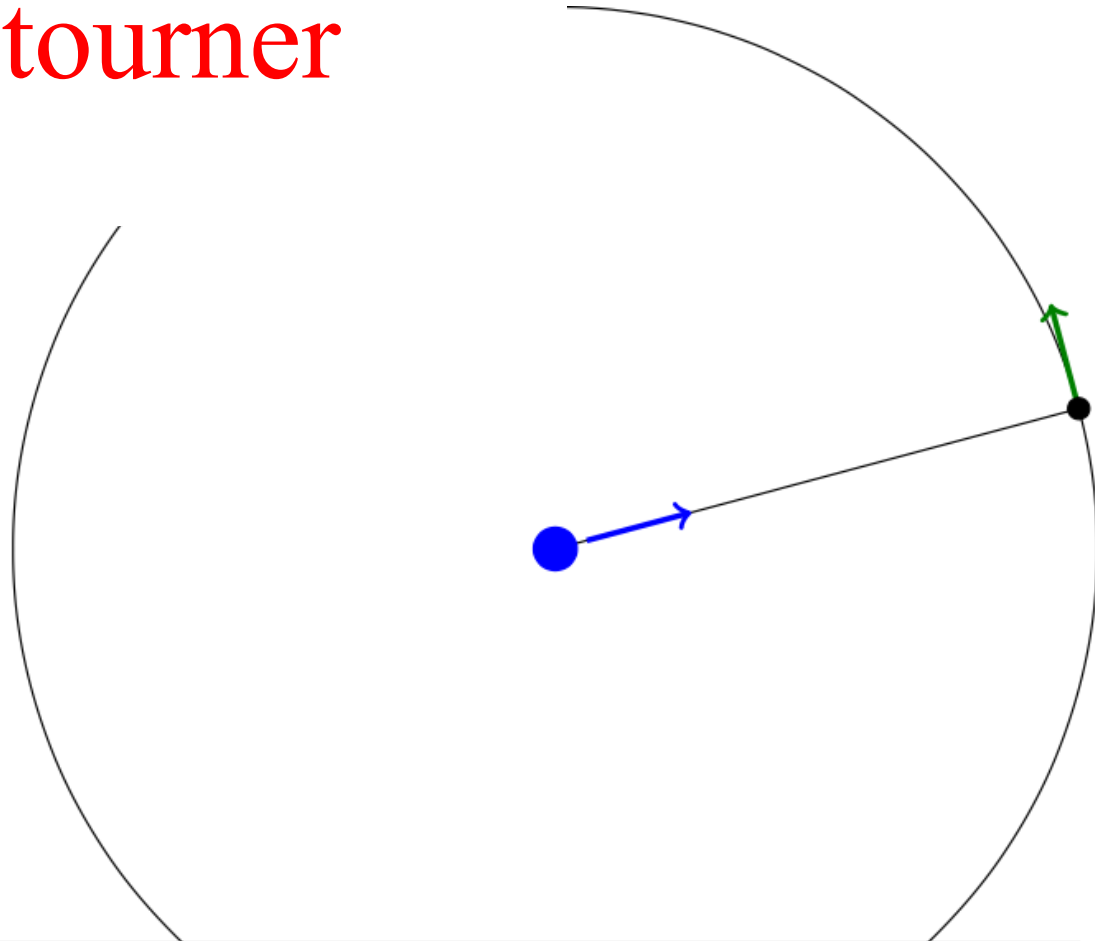


Depuis Galilée, nous savons qu'en l'absence de force, une bille suit une trajectoire en ligne droite à vitesse constante...

Et donc pour faire tourner une bille,  
il faut **appliquer une force centripète sur la bille.**



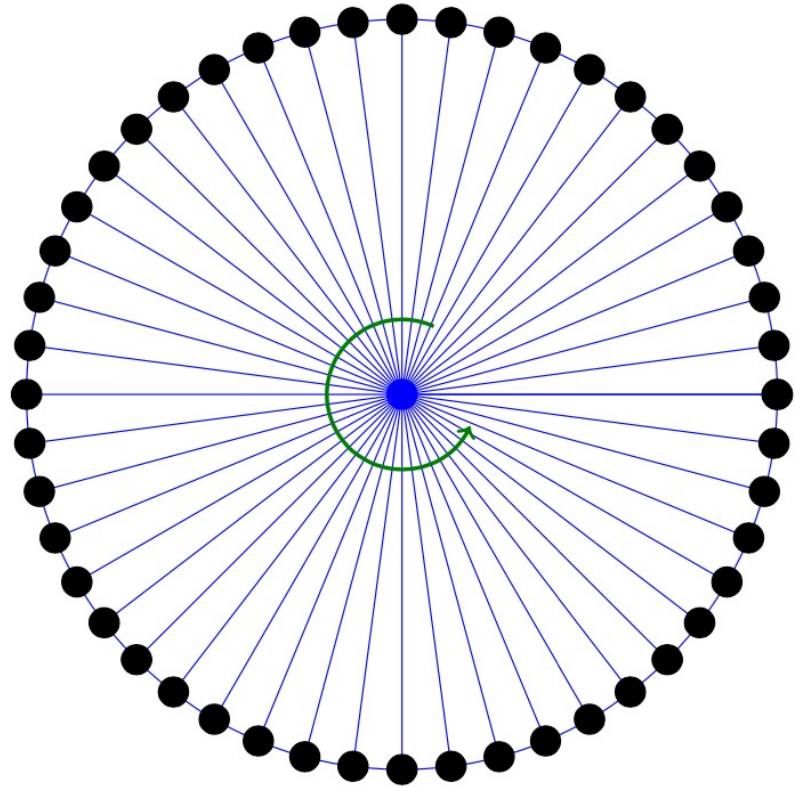
# Pour faire tourner une bille...



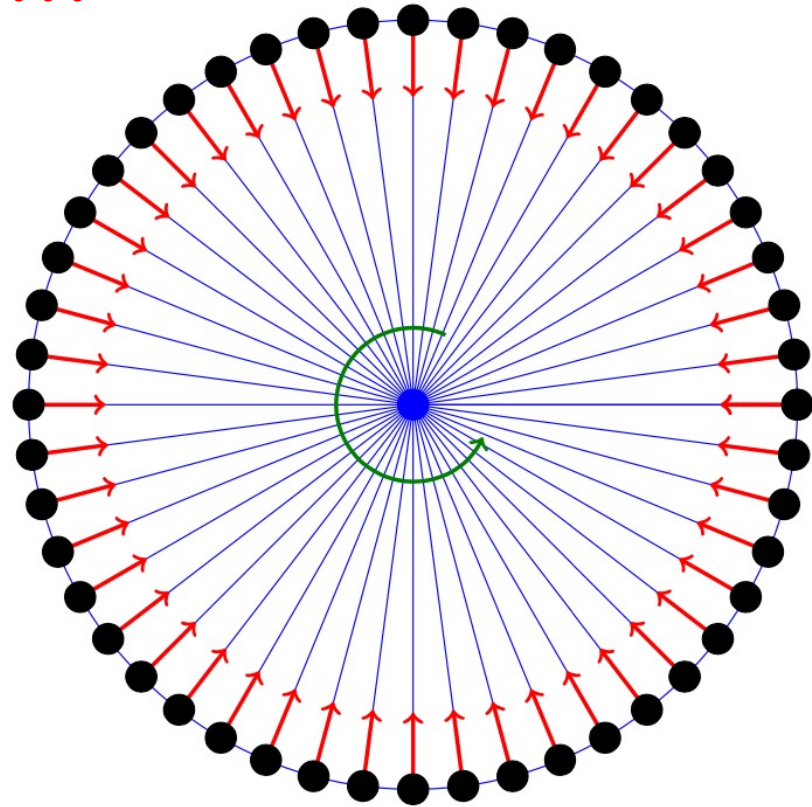
Depuis Galilée, nous savons qu'en l'absence de force, une bille suit une trajectoire en ligne droite à vitesse constante...

Par contre en vertu du principe d'action et de réaction, la bille **applique une force centrifuge sur l'axe de rotation.**

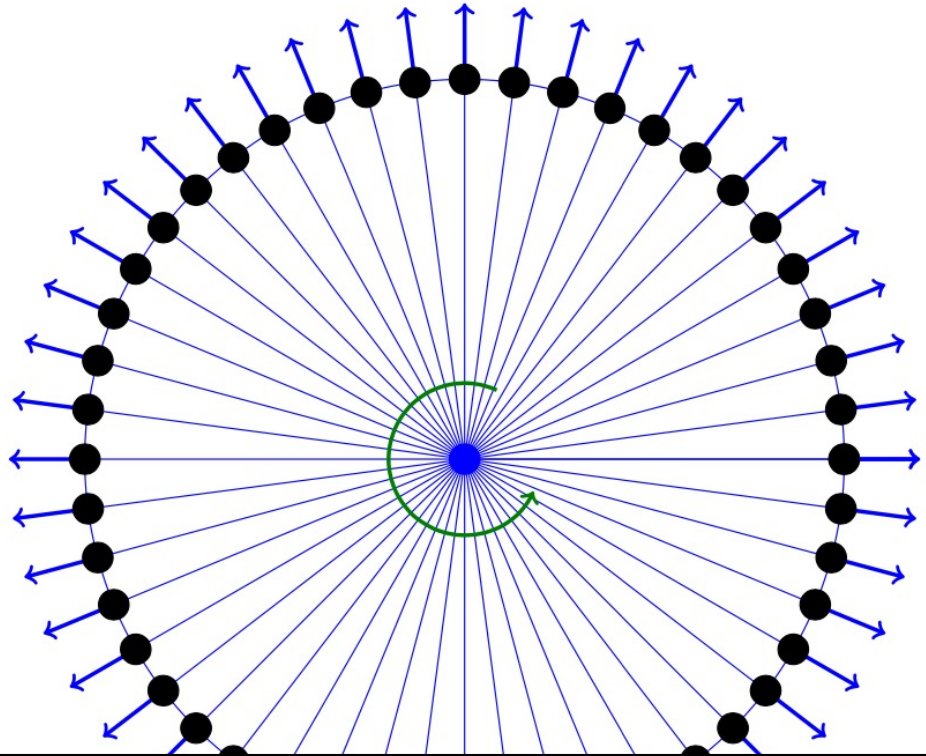
# Modélisons notre toupie comme un manège de petites billes...



La toupie exerce  
une force centripète  
sur chaque bille...



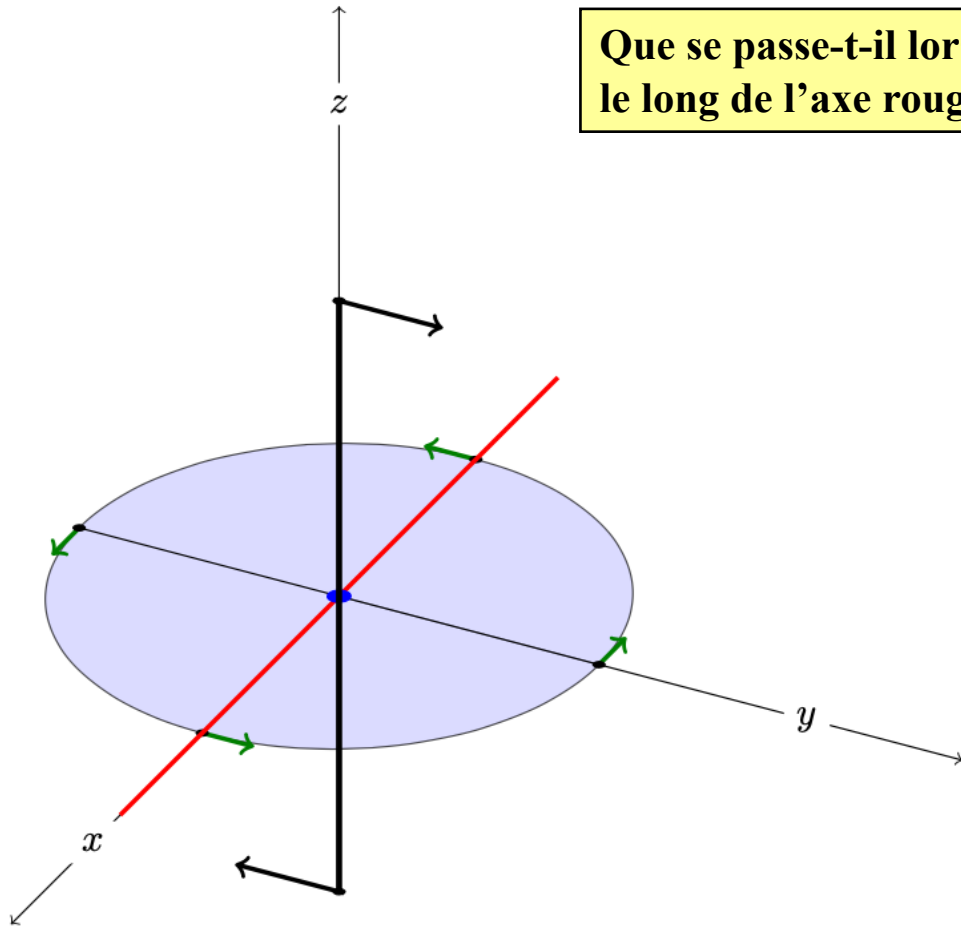
# Chaque bille exerce une force centrifuge sur la toupie...



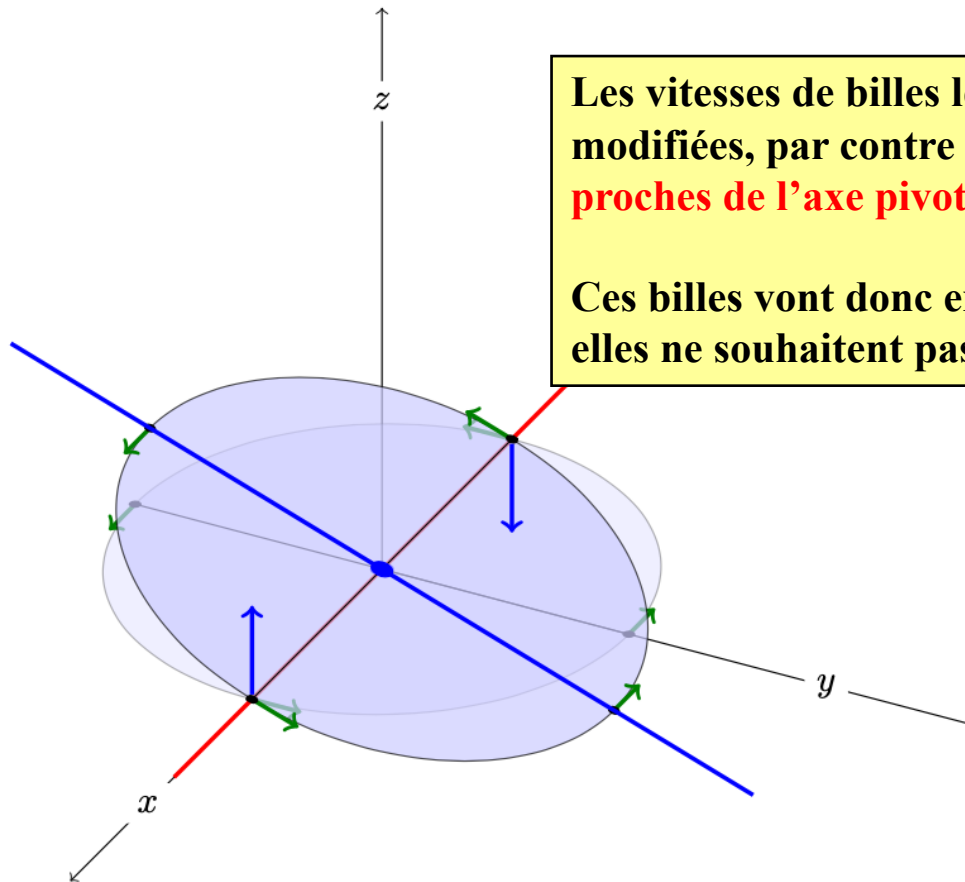
**La force exercée par chaque bille est compensée  
par la force exercée par la bille diamétralement opposée.**

**Toutes les forces centrifuges s'annulent et l'axe ne bouge pas !**

Que se passe-t-il lorsque nous faisons pivoter le plan le long de l'axe rouge ?



Appliquons  
une tout petite perturbation  
sur l'axe de notre toupie...



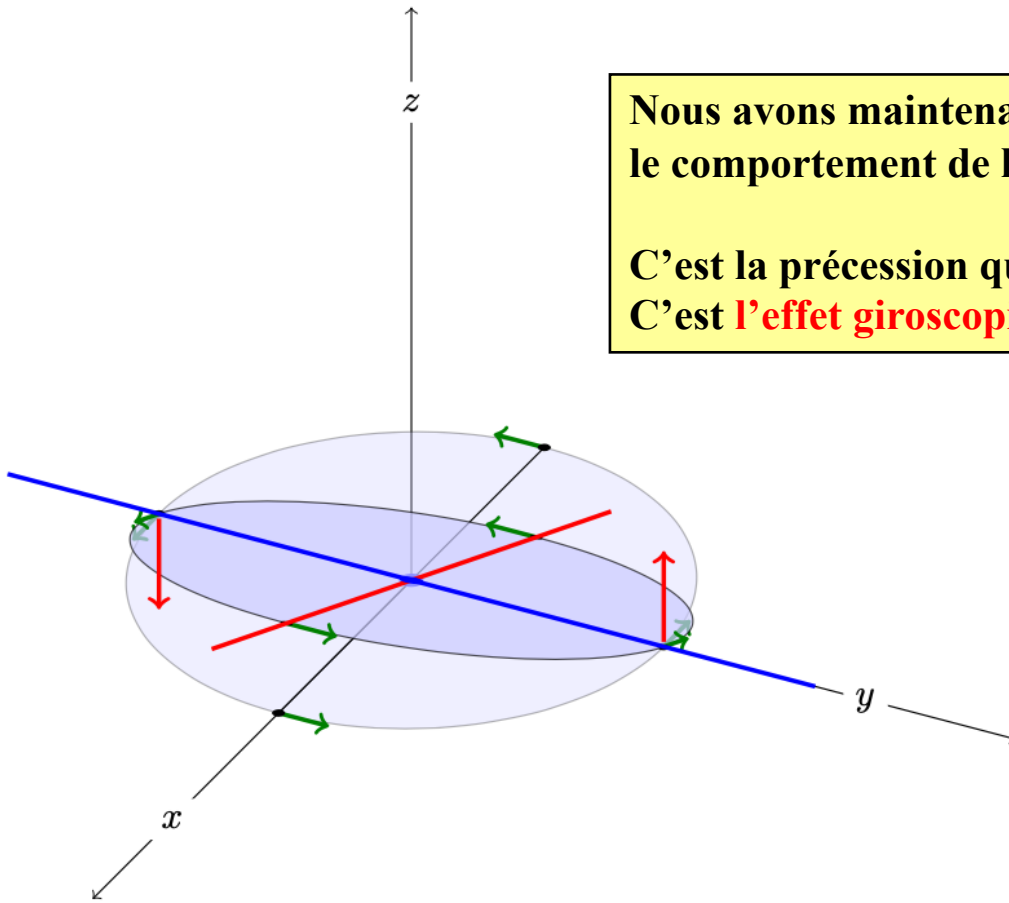
Les vitesses de billes les plus éloignées ne sont pas modifiées, par contre l'orientation des vitesses des billes proches de l'axe pivote comme la toupie !

Ces billes vont donc exercer une force sur la toupie car elles ne souhaitent pas changer de direction !

Les billes vont ainsi générer une rotation de précession...

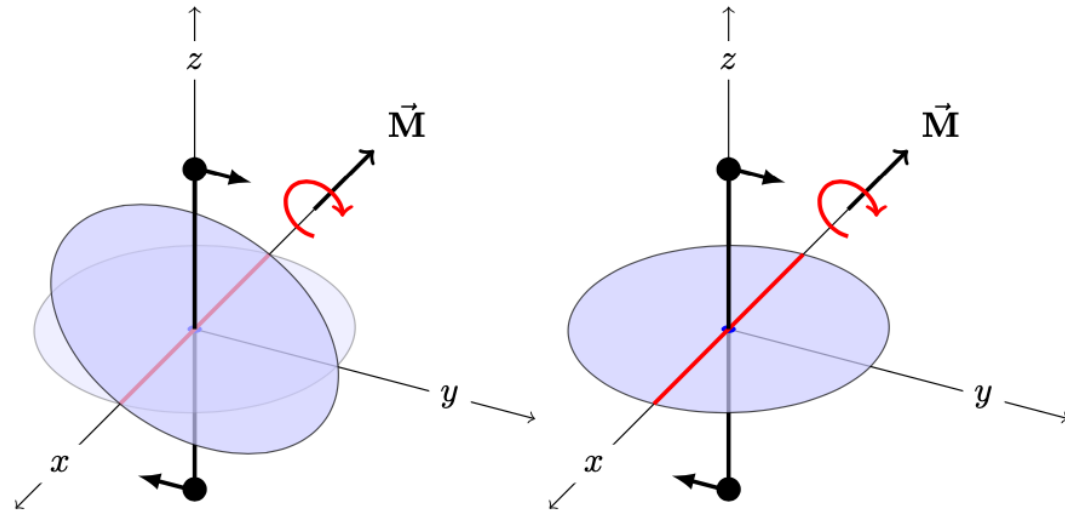
Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour expliquer le comportement de la toupie...

C'est la précession qui maintient la toupie en équilibre !  
C'est **l'effet giroscopique** !

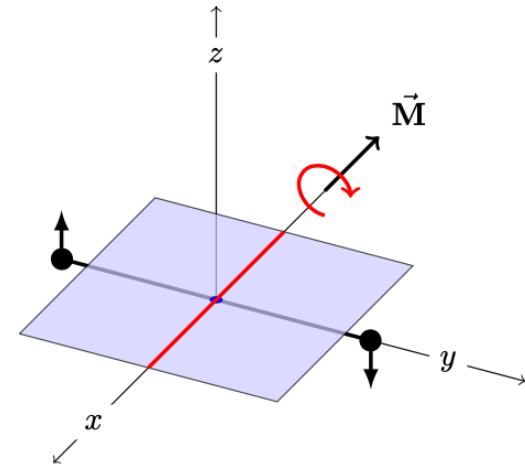


Et ce pivotement de **précession** va entraîner un pivotement qui va s'opposer au pivotement initial...

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I} \vec{\omega}) = \sum \vec{M}$$



Pivoter  
sans rotation...

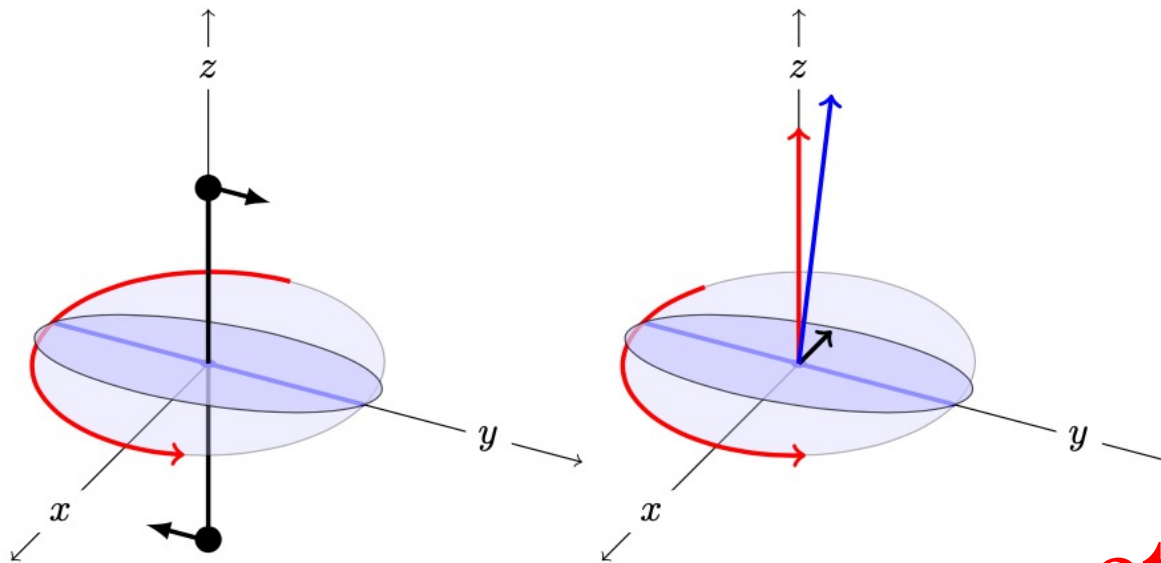




$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I} \vec{\omega}) = \sum \vec{M}$$

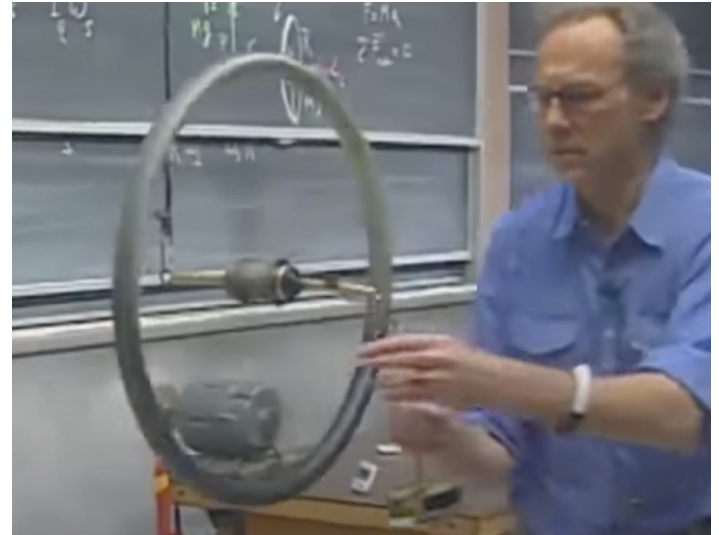
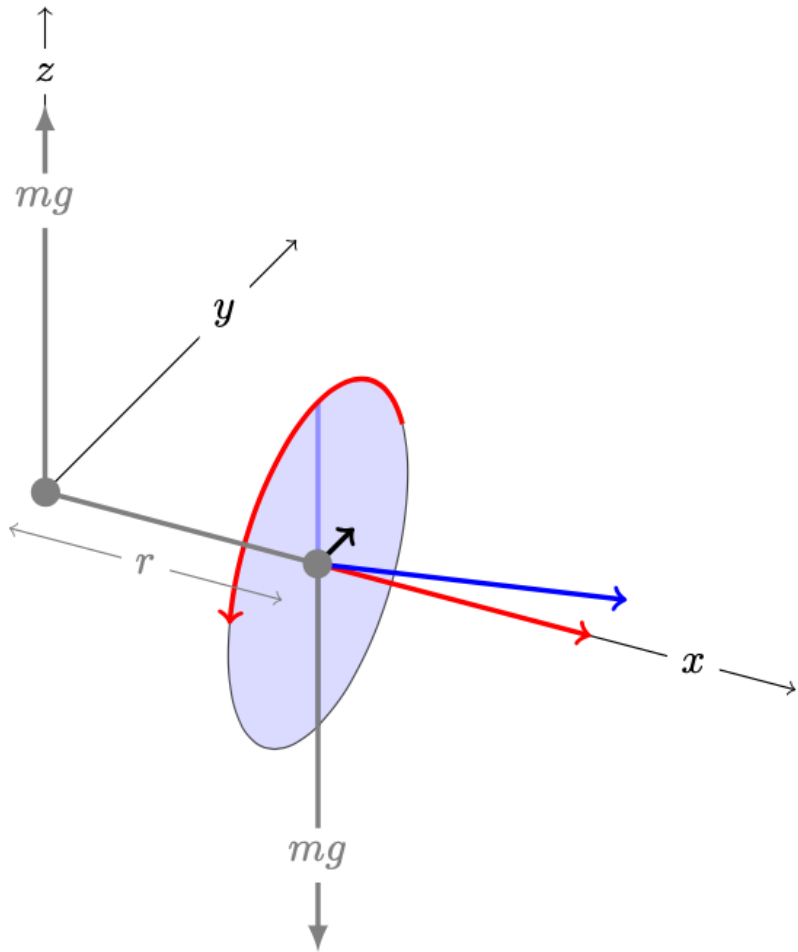
On observe maintenant que représenter un mouvement circulaire par un vecteur orienté le long de l'axe de rotation va permettre de réaliser des calculs tridimensionnels avec une **efficacité diabolique** !

C'est ce que fera Paul Fiset dans le prochain cours !



... et pivoter  
avec rotation

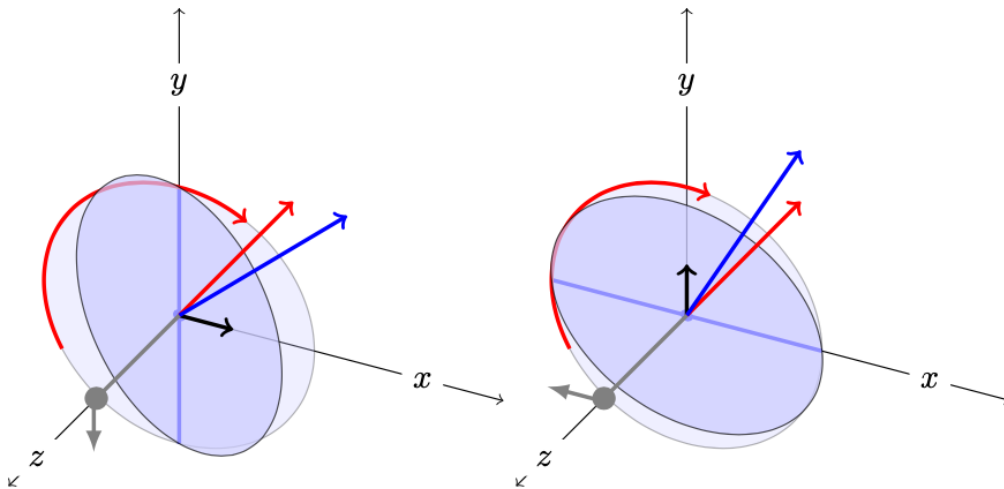
# Gyroscope



$$\frac{d}{dt} (\mathbf{I} \vec{\omega}) = \vec{r} \times m\vec{g}$$

$$\omega_{pr} = \frac{mgr}{I\omega}$$

# Technique de pilotage en moto le contre-braquage



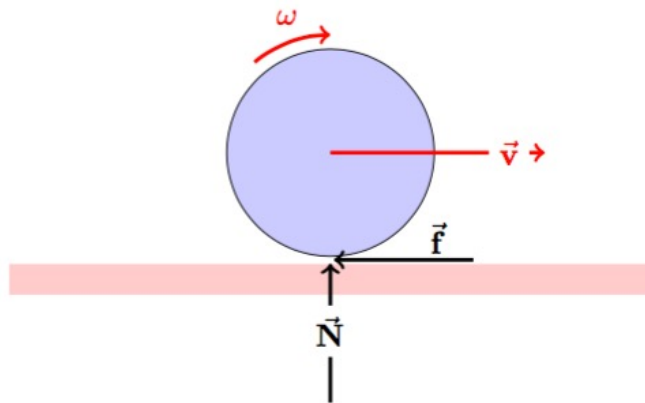
À moto, l'idée est la même : pousser le guidon dans la direction opposée au virage pour donner à la moto une inclinaison qui la pousse vers la bonne trajectoire.

Ce truc de pilote s'explique tout simplement par l'exploitation d'une loi physique, la **précession gyroscopique**.

- Le frottement joue un rôle essentiel dans le roulement sans glissement d'une roue. Il y a **roulement sans glissement** lorsque la norme de la vitesse du centre est égale à celle de la vitesse de rotation tangentielle.
- La déformation du pneu est modélisée par le frottement de roulement.

Condition de roulement sans glissement

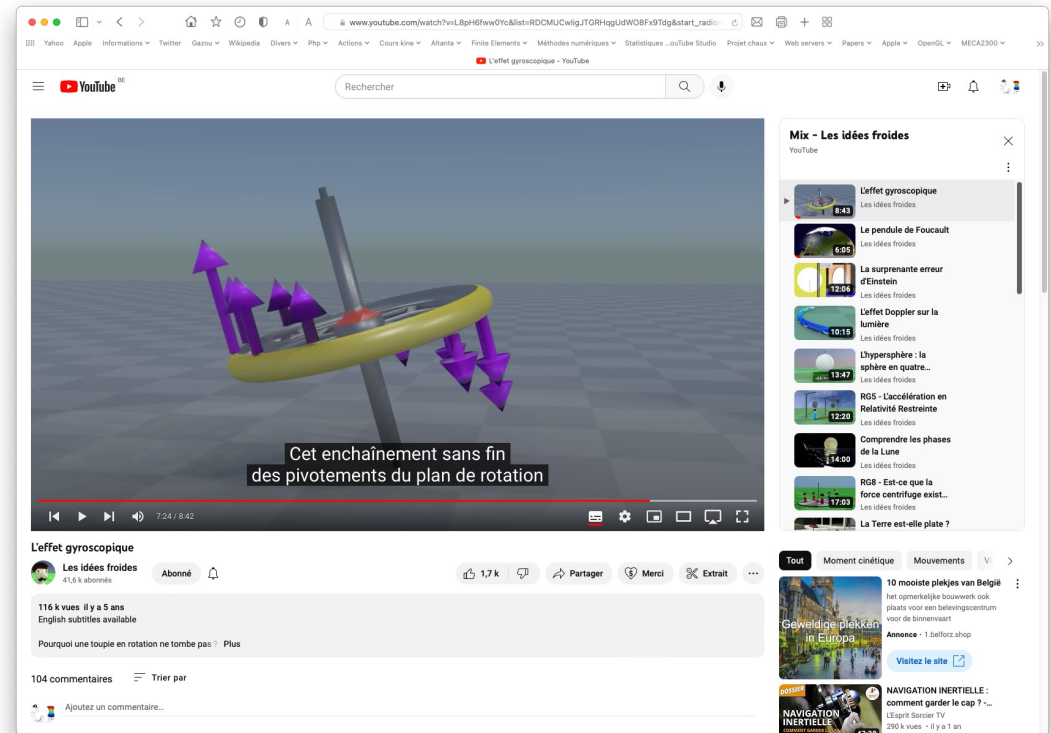
$$v = \omega r$$
$$a = \alpha r$$



Ne pas oublier !



# Crédits :-)



<https://www.youtube.com/watch?v=L8pH6fww0Yc>

[https://www.youtube.com/watch?v=XPUuF\\_dECVI&t=769s](https://www.youtube.com/watch?v=XPUuF_dECVI&t=769s)