Menu du jour ! La mécanique de Newton

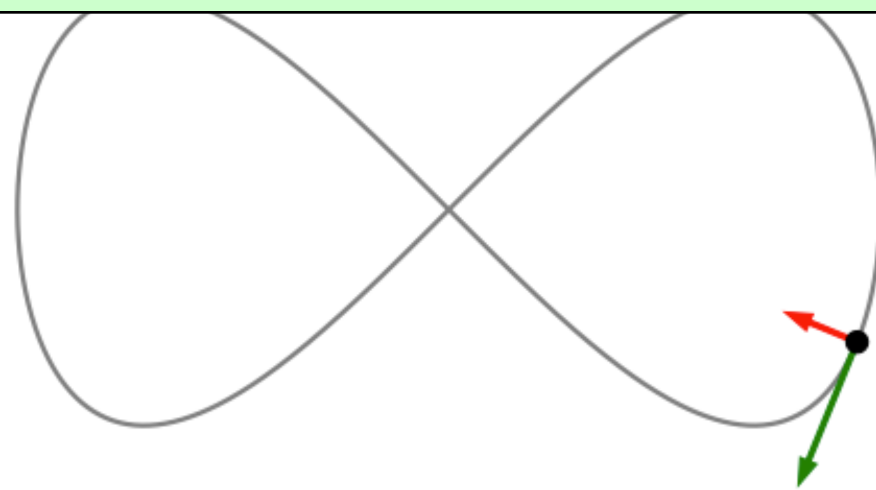
- **Une petite histoire d'ascenseur !**
- **Les 3 lois de Newton**
  Le principe fondamental de la mécanique
  … et ces deux corollaires.
- **Théorie de la gravitation universelle de Newton**
  … et les mouvements circulaires.
- **Les 3 lois de Kepler**
  … et la comète de Halley.
- **La mécanique des corps solides.**

La mécanique du point

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{v}}(t) \\
\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{a}}(t) \\
m\,\vec{\mathbf{a}}(t) &= \sum \vec{\mathbf{F}}(t)
\end{aligned}
$$

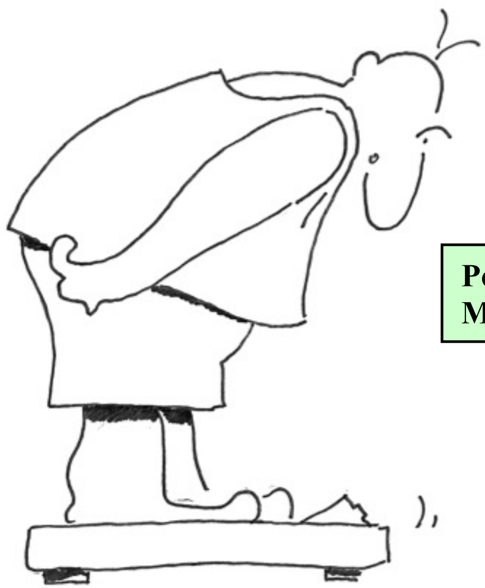
- **La position, la vitesse, l’accélération,
  les forces sont des vecteurs !
  Il faut donc bien maîtriser l’algèbre vectorielle !**

- **A l’exception du mouvement rectiligne à vitesse constante, tout autre type de mouvement présente une accélération centripète due au changement de direction et/ou de norme de la vitesse.**

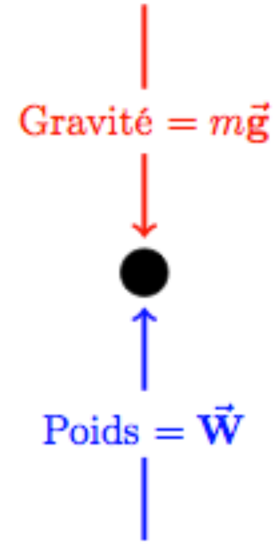


Comment peut-on réduire son poids ?

C'est quoi le poids apparent ?



Poids : W = 700 Newton
Masse : m = 70 kg



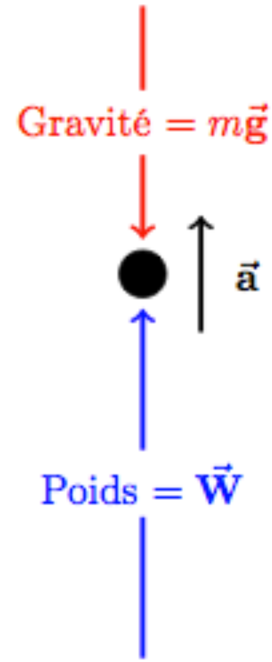
Vous êtes sur votre balance !
Comme vous êtes immobile, la balance vous pousse avec une force égale à la force de gravité !

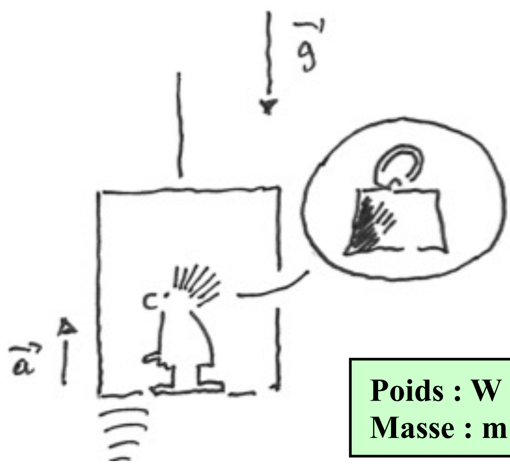
C'est cette force de la balance qui est mesurée comme votre poids apparent !

$$\cancel{m\,\vec{a}(t)} = \sum \vec{F}(t)$$

Désormais, ce que nous appelons le poids, c'est parfois aussi appelé le poids apparent !

Mettons la balance dans un ascenseur !





Poids : W = 1050 Newton
Masse : m = 70 kg

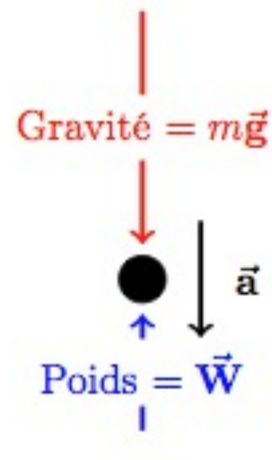
$$ma = W - mg$$

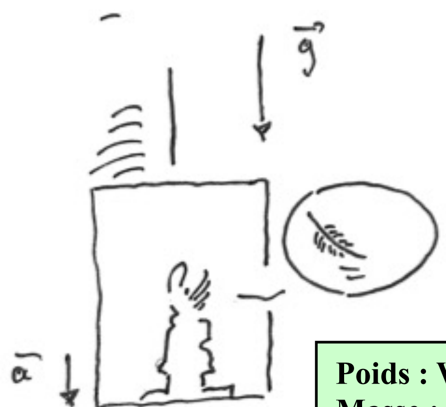
$$W = m(g + a)$$

Le poids observé sur la balance est augmenté de 50% !

Accélération vers le haut de l'ascenseur
$a = 5\ m/s^2$

Mettons la balance dans un ascenseur !





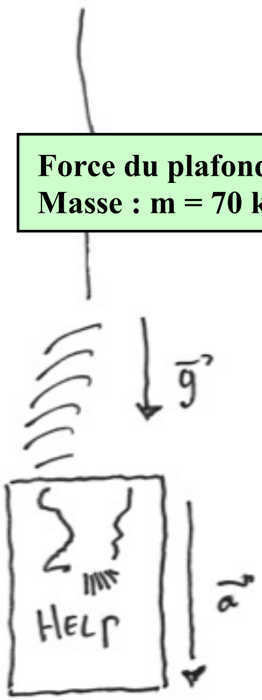
Poids : W = 350 Newton
Masse : m = 70 kg

$$-ma = W - mg$$
$$\downarrow$$
$$W = m(g-a)$$

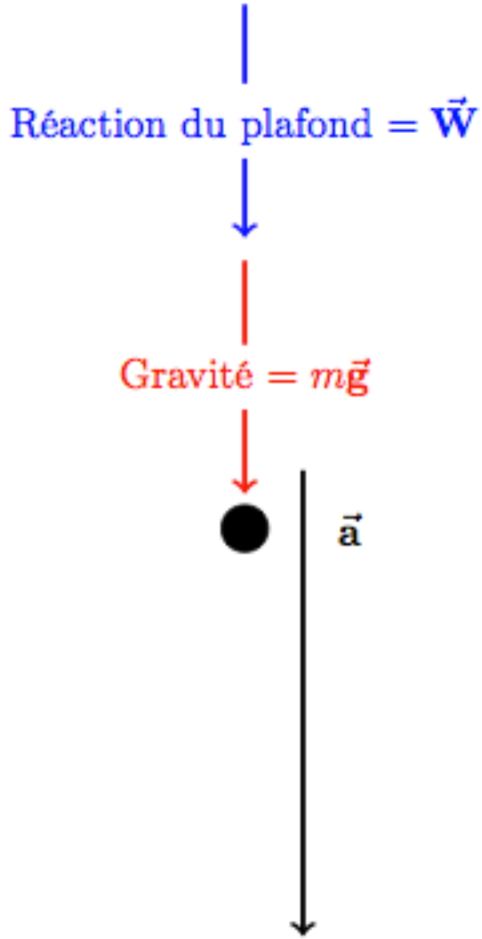
Le poids observé sur la balance est maintenant diminué de 50% !

Accélération vers le bas de l'ascenseur
$a = 5\ m/s^2$

Faut pas exagérer quand-même !



Force du plafond : W = 700 Newton
Masse : m = 70 kg



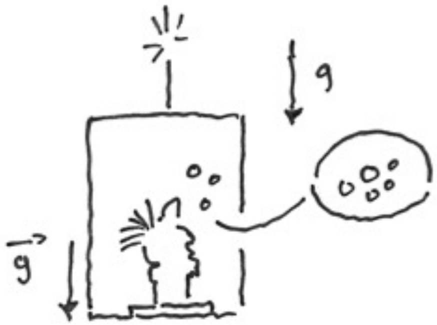
$$-ma = -W - mg$$

$$W = m(a-g)$$

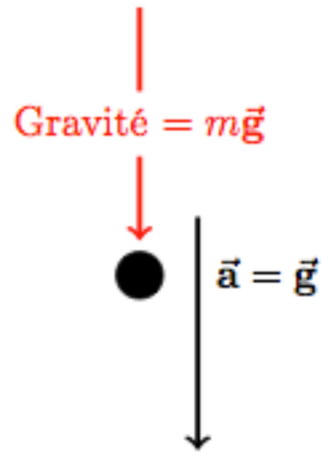
On est projeté sur le plafond de l'ascenseur et la balance aussi !

Accélération vers le bas de l'ascenseur
a = 20 m/s^2

En chute libre !



Pas de poids apparent : **W = 0 Newton** !
Masse : m = 70 kg



$$-mg = -W - mg$$

$$\downarrow$$

$$W = 0$$

Pas de poids en chute libre !
On flotte comme le capitaine !

Accélération vers le bas de l'ascenseur
a = 9.81 m/s^2

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{v}}(t) \\ \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{a}}(t) \end{aligned}}$$

$$m\,\vec{\mathbf{a}}(t) = \sum \vec{\mathbf{F}}(t)$$

La cinématique est la description mathématique des mouvements sans se soucier de leur origine !

Le mouvement est décrit par des vecteurs dont les composantes sont des fonctions du temps

Cinématique

Dynamique

La dynamique explique le mouvement des corps en faisant appel aux notions de forces et de masses.

Théorie de Newton :
Principae, 1687

Première loi de Newton

Dans un référentiel galiléen, tout corps conserve son état de repos ou son mouvement rectiligne uniforme si la résultante des forces extérieures agissant sur le corps est nulle.

Seconde loi de Newton

$$m\ \vec{\mathbf{a}}(t) \ = \ \sum \vec{\mathbf{F}}(t)$$

Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces agissant sur une particule de masse m produit une accélération de même orientation !
Le coefficient de proportionnalité est l'inverse de la masse.
La première loi de Newton n'est donc qu'un cas particulier de la seconde loi :-)

Troisième loi de Newton

$$\vec{\mathbf{F}}_{BA} \ = \ -\vec{\mathbf{F}}_{AB}$$

La force exercée par un objet B sur un objet A est égale en module et de sens opposé à la force exercée par l'objet A sur l'objet B.

Les 3 lois de Newton

Masse

Forces

$$m\,\vec{\mathbf{a}}(t) = \sum \vec{\mathbf{F}}(t)$$

Une mesure de la quantité de matière ? Ou plutôt une indication de la difficulté de faire varier la vitesse d'un corps en y appliquant une force.

scalaire

Les forces ne sont pas visibles, mais leurs effets le sont… Il y a des forces de contact et des forces à distances.

vecteurs !

Isaac Newton
Principae, 1687

A10 : est-ce un repère inertiel ?

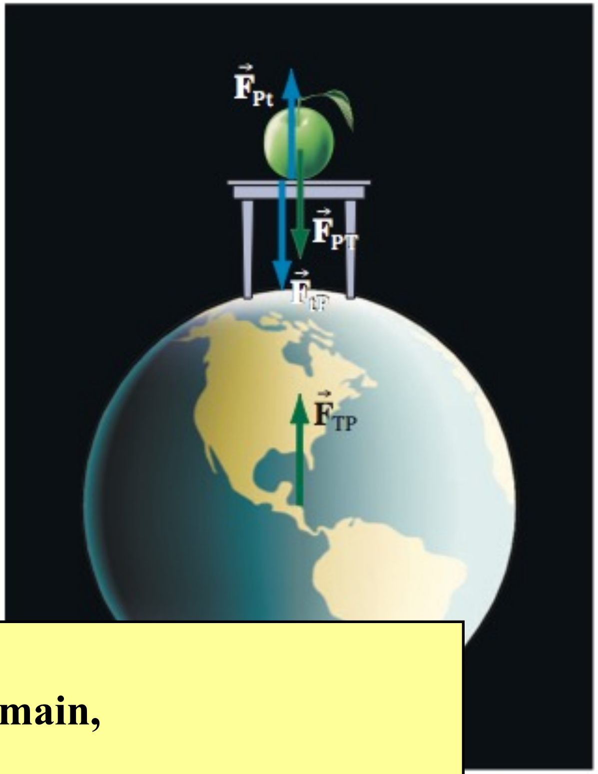
Principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

Ce principe est applicable uniquement à tout système de masse constante !
Même si ce système peut se composer de parties qui se séparent !

Et action, réaction ?

La mécanique de particules…



Pour analyser la stabilité d'un pont,
pour prédire le fonctionnement d'une machine ou du corps humain,
on va isoler les diverses composantes
en tirant profit de la troisième loi de Newton !

Il est maintenant possible de prédire le comportement de systèmes avec plusieurs corps qu'on va approximer comme des particules (ou points matériels).

Une particule est un corps de volume nul,
mais de masse finie...

C'est évidemment une fiction mathématique !
Mais cela permet d'utiliser le modèle mathématique très simple qu'est la mécanique du point.

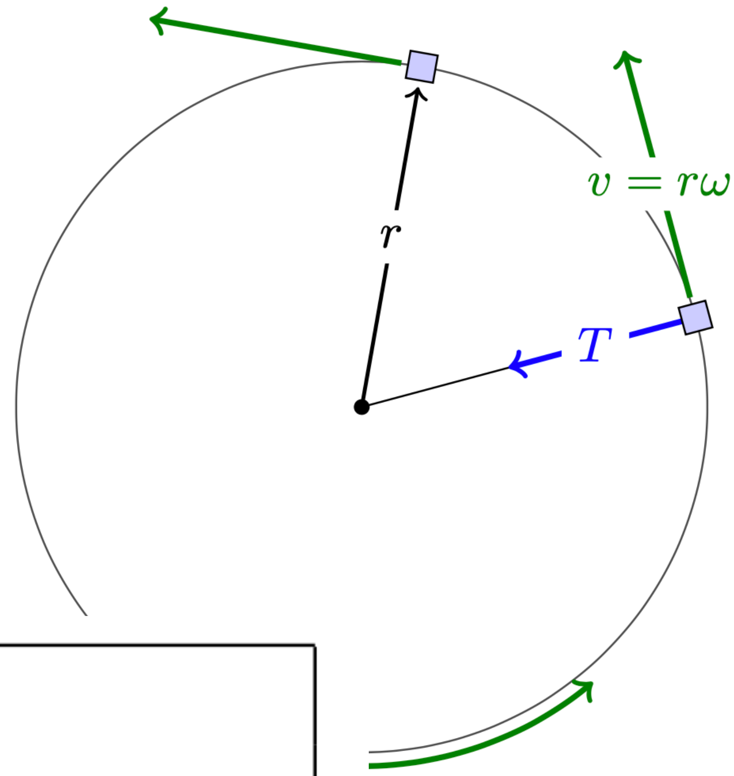
$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}} & = & \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}} \\
 & \uparrow & \\
\dfrac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{F}} \\
 & \downarrow & \\
\vec{\mathbf{r}}\times\dfrac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}
\end{array}
$$

Deux principes corollaires…

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}} \\
 & \uparrow & \\
\dfrac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{F}} \\
 & \downarrow & \\
\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}}\times m\vec{\mathbf{v}}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}
\end{array}
$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}$$

Bilan d’énergie



$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}$$

Bilan de moment cinétique

Les 3 lois de Newton !

$$\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) = \vec{\mathbf{v}}(t)$$

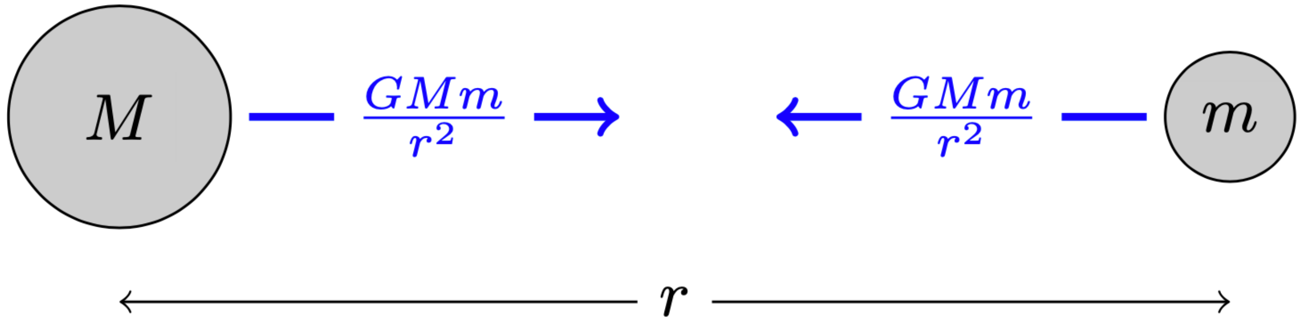
$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) = \vec{\mathbf{a}}(t)$$

$$m\,\vec{\mathbf{a}}(t) = \sum \vec{\mathbf{F}}(t)$$

- **Si la somme de forces sur un corps est nulle, tout corps reste au repos ou en mouvement à vitesse constante dans un repère inertiel !**

- **La seconde loi de Newton (F=ma) met en relation l'accélération, la masse et les forces dans un repère inertiel !**

- **La force exercée par un objet sur un autre est opposée à celle exercée par l'autre corps sur lui-même.
C'est le fameux principe : action-réaction :-)**

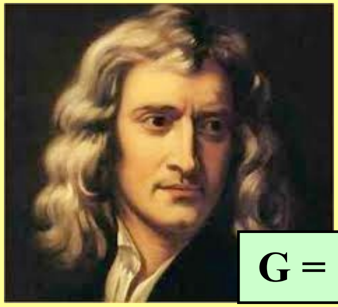


Théorie de la gravitation universelle

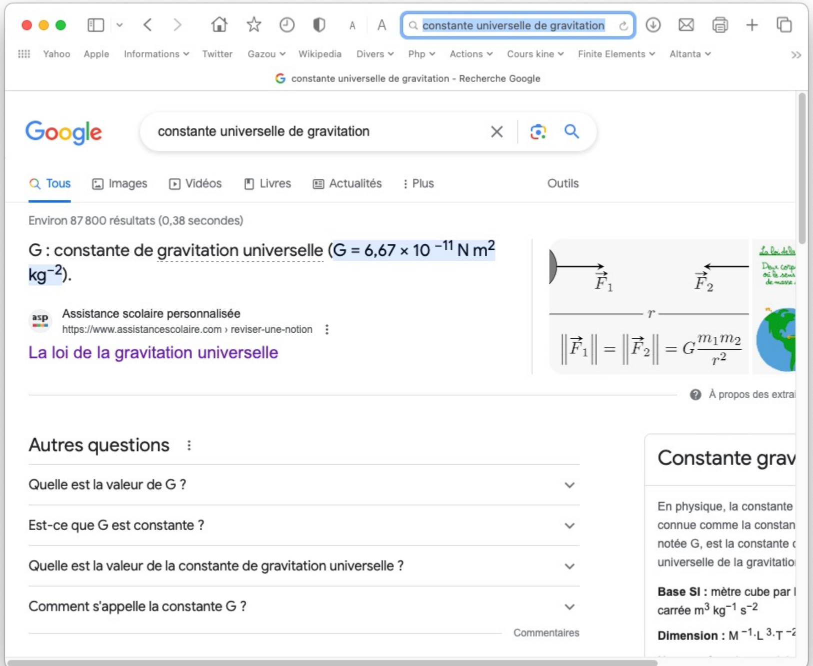
$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Il s'agissait ensuite d'imaginer une force qui permet d'expliquer le mouvement des planètes autour du soleil…

C'est ce qu'a fait Isaac en 1687.



G = 6,67 10^{-11} N m^2/kg^2



$$F = \frac{G\, M_{terre}\, m}{R_{terre}^2} = mg$$

$\boxed{R_{terre} = 6371 \text{ km}}$

$\boxed{M_{terre} = 5{,}972\ 10^{24} \text{ kg}}$

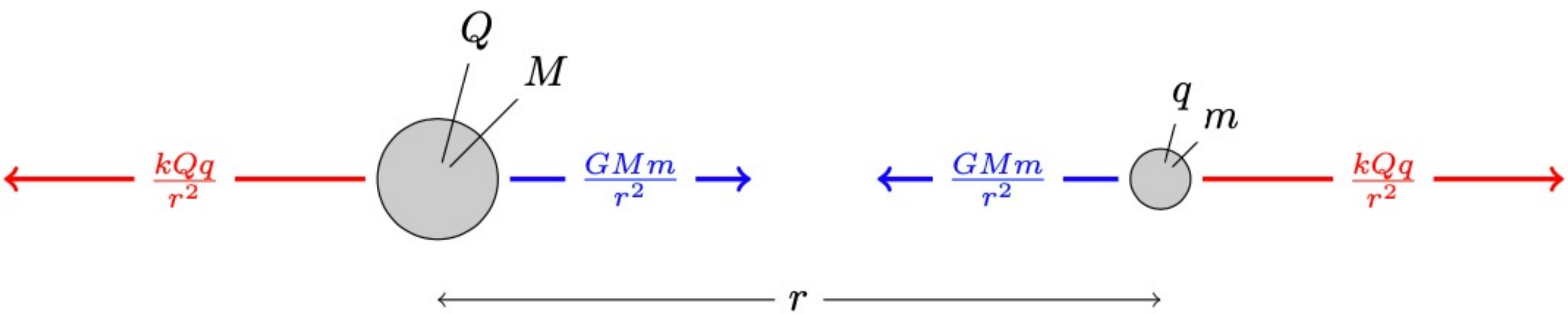
$\boxed{G = 6{,}67\ 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2}$

La force de gravité = mg

Un truc rigolo !

La force de Coulomb…

$$F = \frac{kQq}{r^2}$$

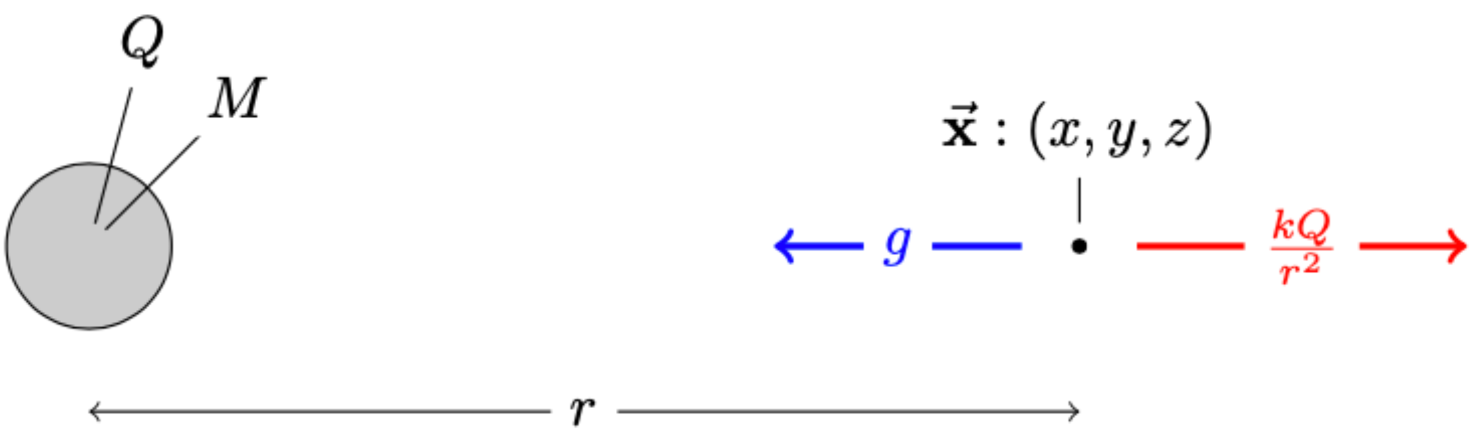


$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

… et la force de gravité

Le champ électrique…

$$\boxed{E = \frac{kQ}{r^2}}$$

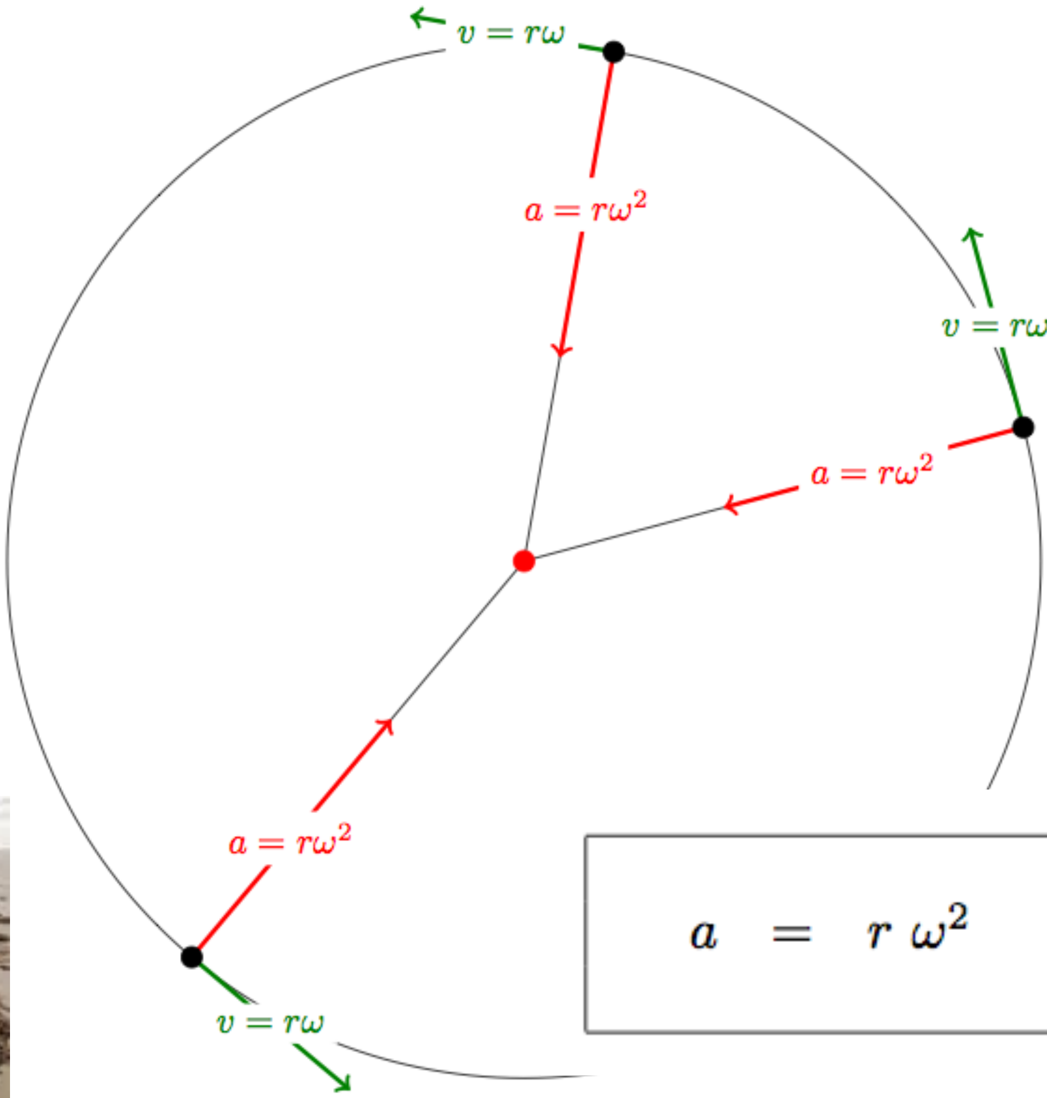


$$\boxed{E = \underbrace{\frac{GM}{r^2}}_{g}}$$

… et le champ gravitationnel

Mouvement circulaire uniforme

$$v = r\,\omega$$

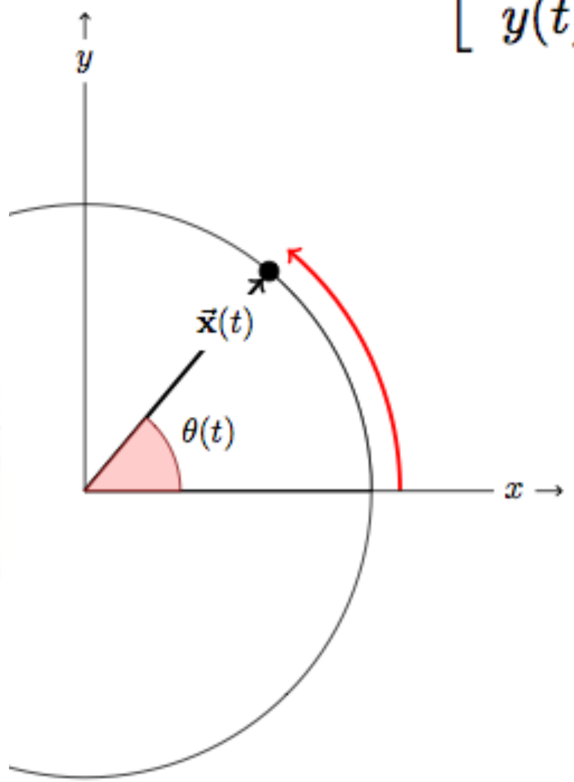


$$a = r\,\omega^2$$

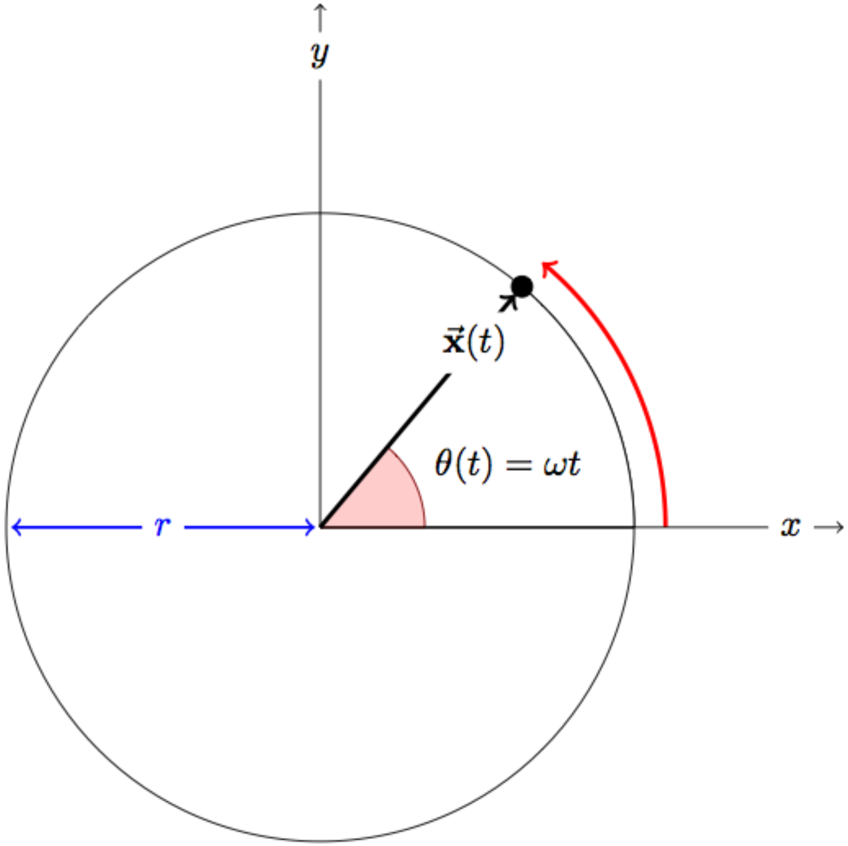
Vitesse angulaire constante : ω
Vitesse tangentielle
Accélération centripète

Le mouvement circulaire est harmonique

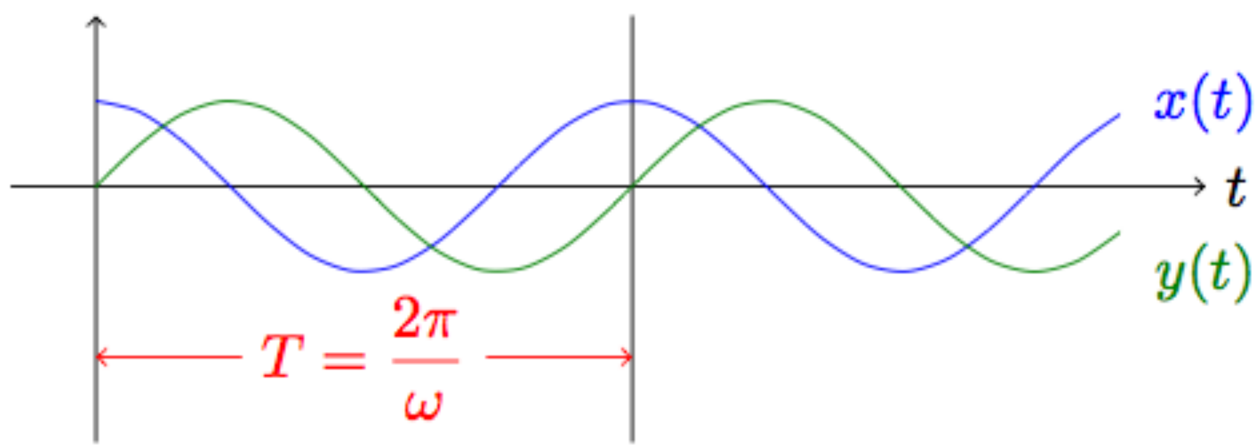
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

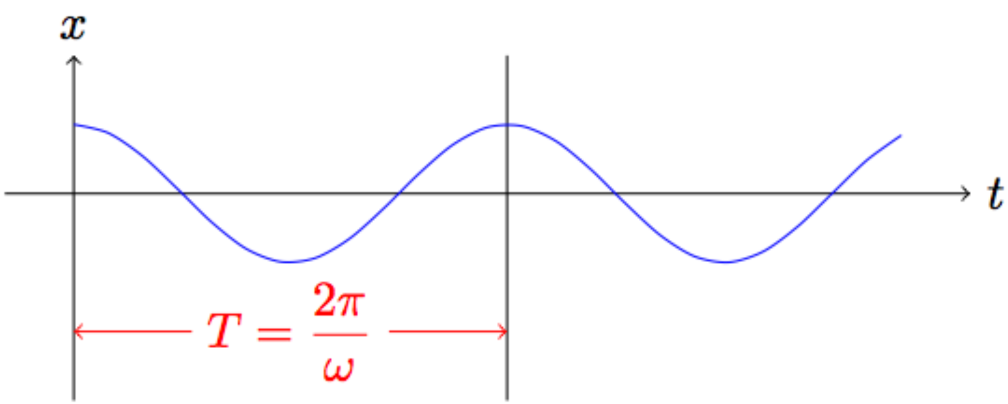


Le retour du cos et du sin



$$
\begin{aligned}
x(t) &= r\,\cos\left(\omega\, t\right)\\
y(t) &= r\,\sin\left(\omega\, t\right)
\end{aligned}
$$





$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}}$$

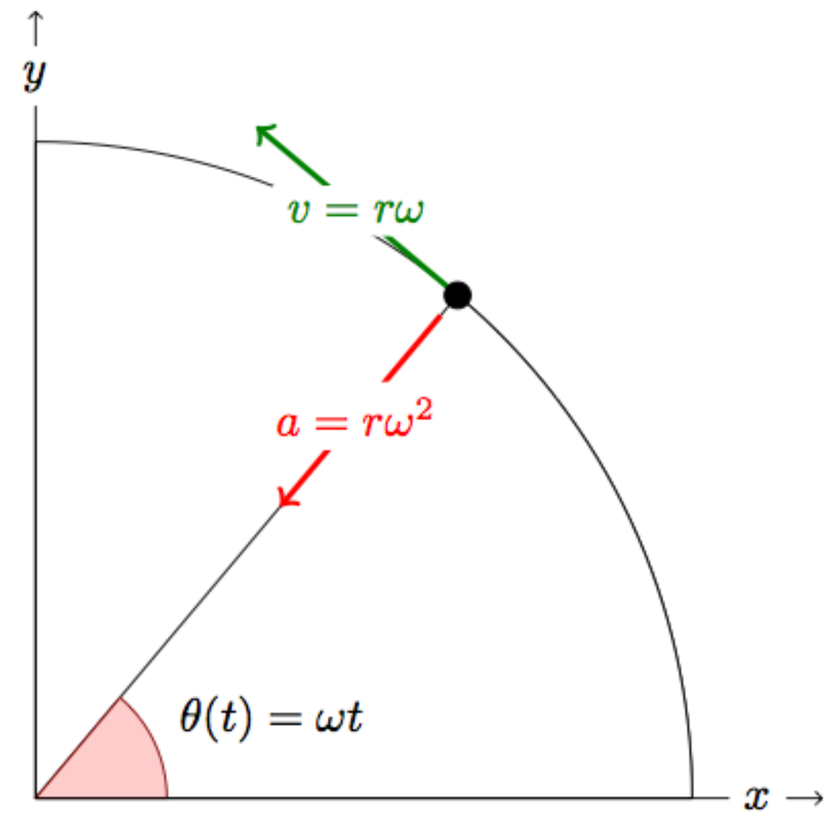
$$\boxed{v = r\,\omega}$$

Période : T

Fréquence : f

Vitessse angulaire : ω

Accélération centripète



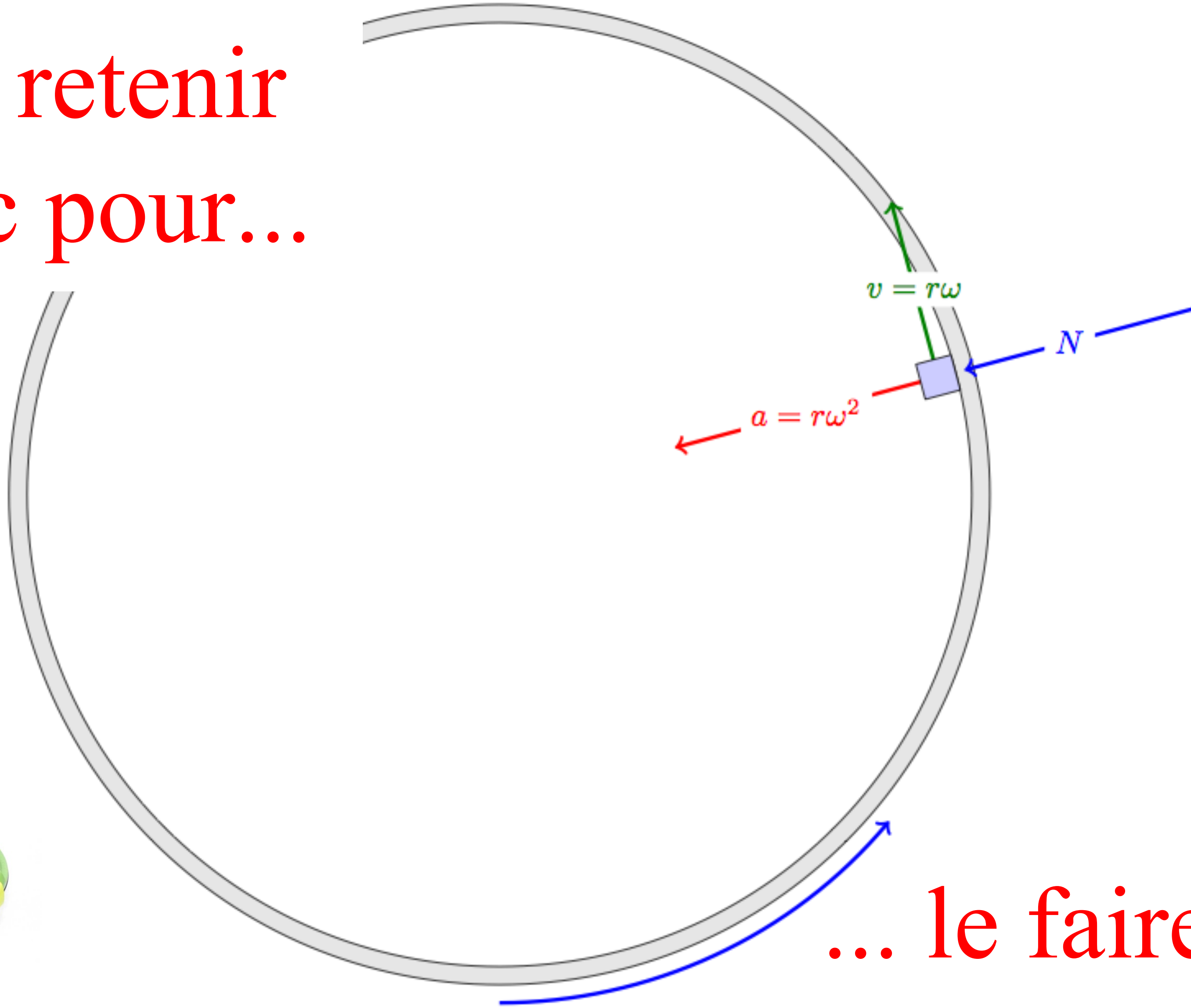
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\omega^2 \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

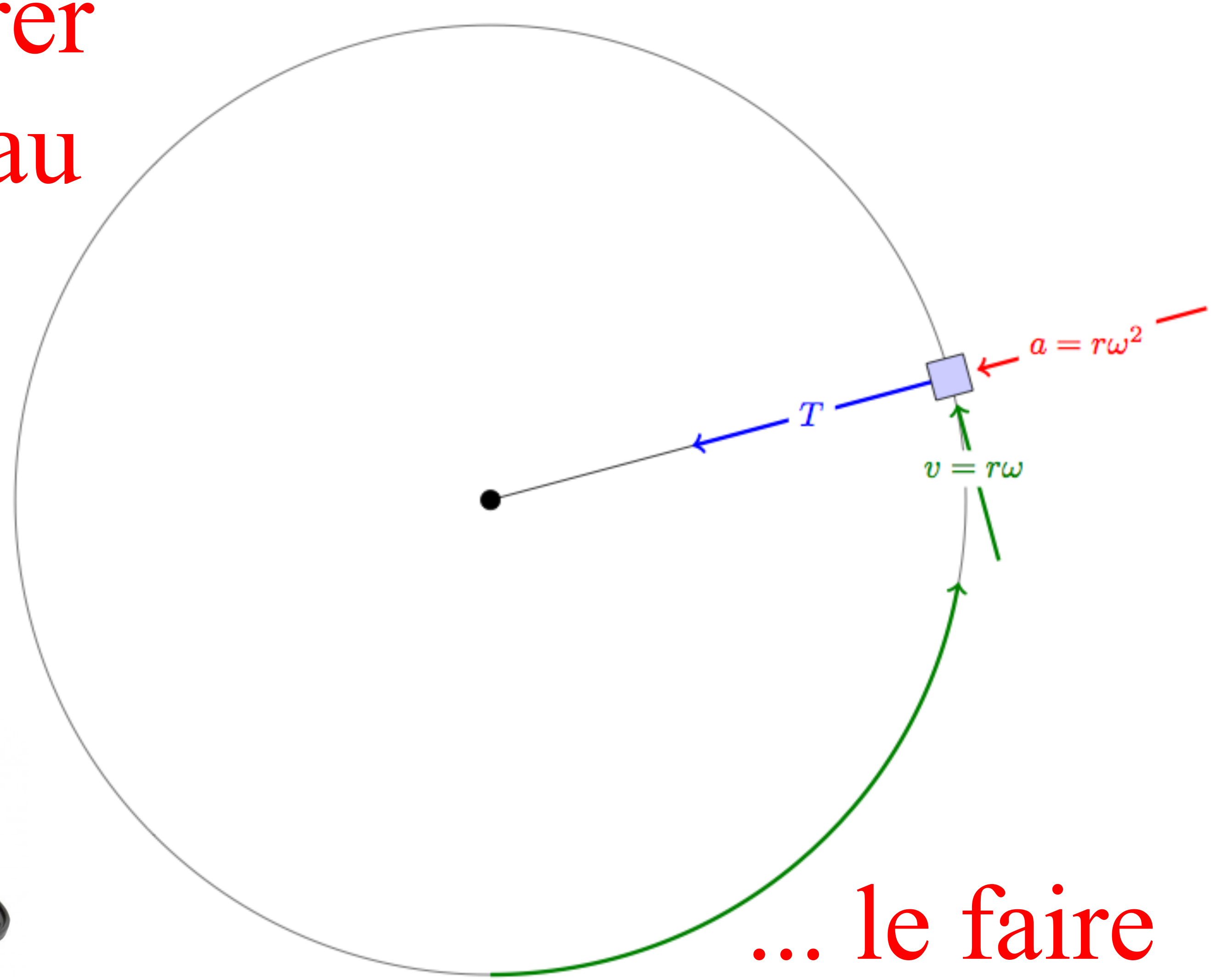
Vitesse tangentielle

Il faut retenir le bloc pour...



... le faire tourner !

Il faut tirer sur le seau pour...

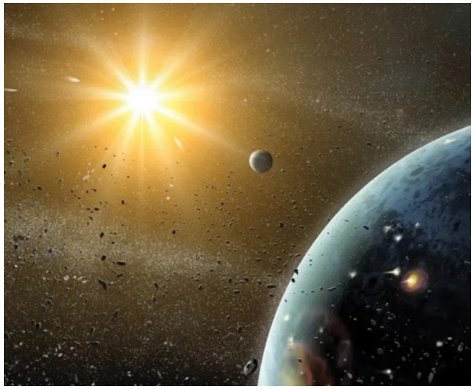


... le faire tourner !

Expérience
périlleuse
du seau d’eau !

Période
de rotation
du seau !

Calculons
la période de rotation
de la Terre !



Terre
1 tour/jour
$R = 1.5\ 10^{10}$ m

$$f = 3.17\ 10^{-8} \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 3.15\ 10^{7} \text{ s} = 365 \text{ jours}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1.99\ 10^{-7} \text{ rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 29797 \text{ m/s}$$

$$a = r\,\omega^2 = 0.0059 \text{ m/s}^2$$

L'accélération centripète est toute petite !
C'est cinq fois moins important que celle due à la rotation de la Terre !

Aspirateur
600 tours/minute
R = 10 cm

$$f = 10 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.1 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 62.8 \text{ rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 6.28 \text{ m/s}$$

$$a = r\,\omega^2 = 394.4 \text{ m/s}^2$$

C'est quarante fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur très élevée !

Machine à laver
3600 tours/minute
R = 15 cm

$$f = 60 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.017 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 377 \text{ rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 56.5 \text{ m/s}$$

$$a = r\,\omega^2 = 21318 \text{ m/s}^2$$

C'est deux mille fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur vraiment très très élevée !

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}}\times m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}$$

- **Dans un mouvement circulaire, l'accélération a toujours une composante centripète. Les variations de la vitesse angulaire génèrent une composante tangentielle.**

- **Seules les forces dont le moment n'est pas nul par rapport au centre de rotation permettent de modifier la vitesse angulaire d'un mouvement circulaire.**

- **Les forces modifient la quantité de mouvement**
  Les moments modifient le moment cinétique

Les lois de Kepler

Loi des orbites

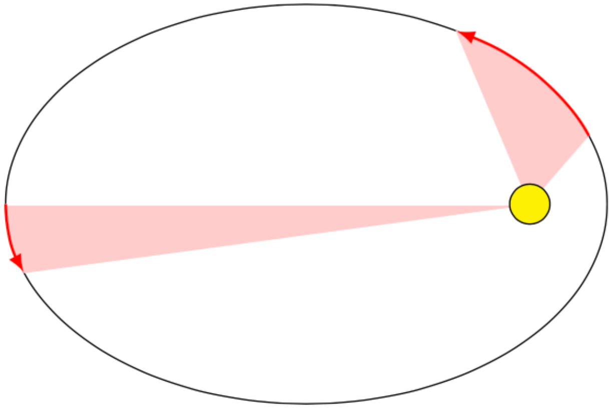
Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil est l'un des foyers.

Loi des aires

Des aires égales sont balayées en des temps égaux.

Loi des périodes

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$



Johannes Kepler
Astronomia nova, 1609

2061

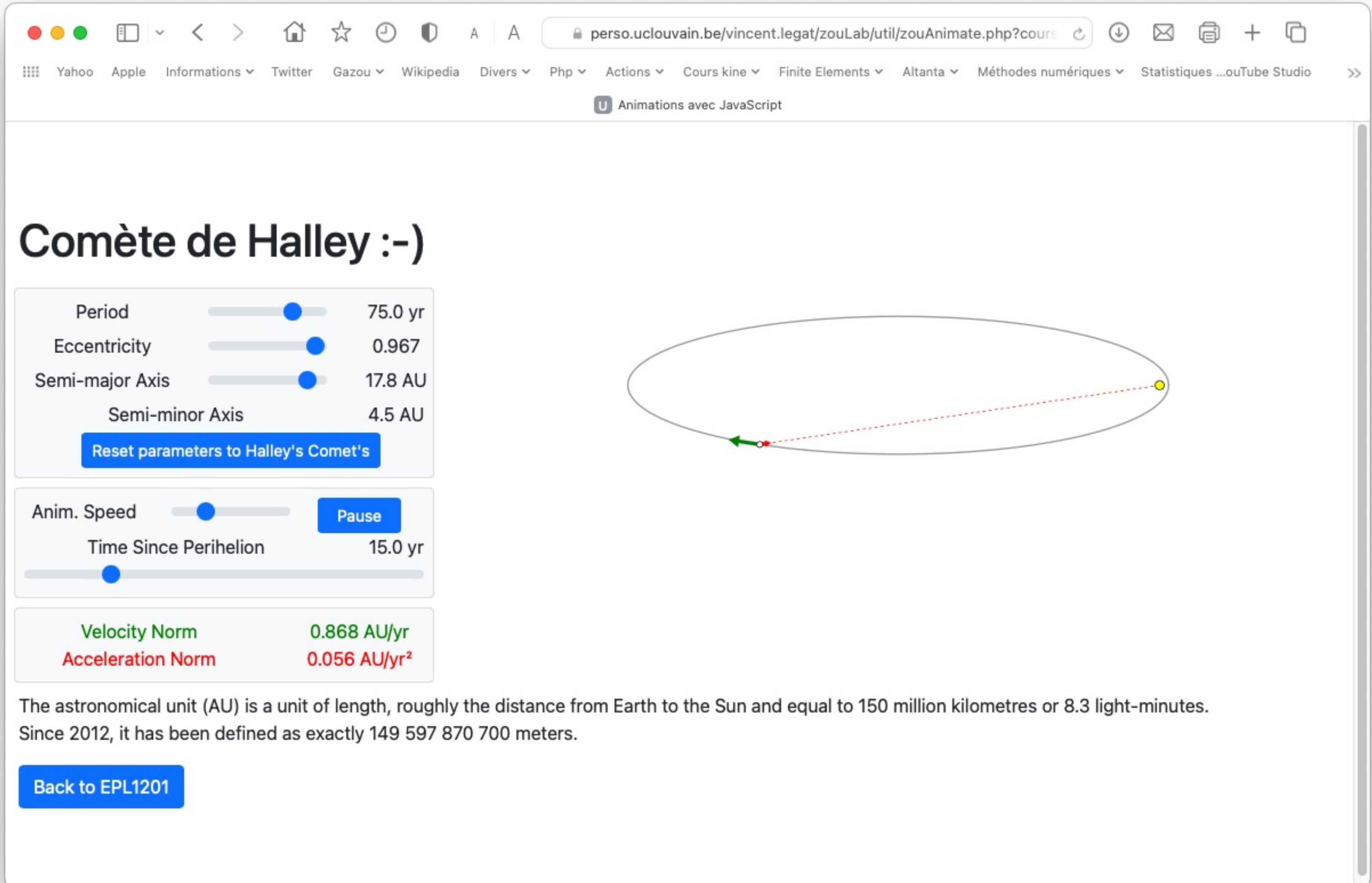
1986

Passage peu spectaculaire de la comète, à l'opposé du Soleil.
La sonde Giotto, l'approche de près.
La navette Challenger s'envole pour l'observer avec une enseignante pour donner des cours en direct.
La navette explose pendant le décollage et tue tout l'équipage.

1910

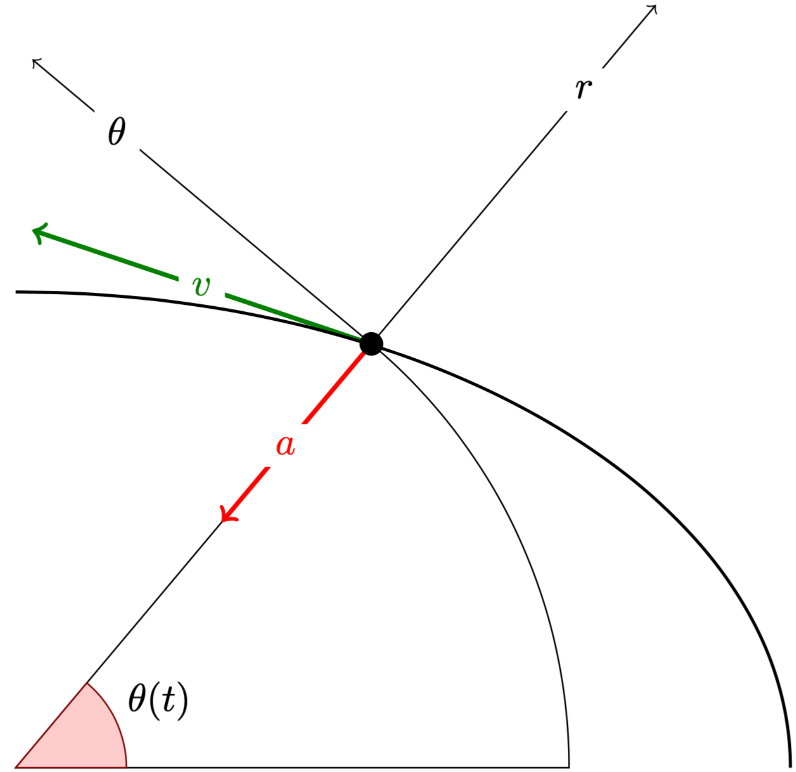
Jne du Petit Parisien, Supplément littéraire illustré du 15 mai 1910 - source : RetroNews-BnF

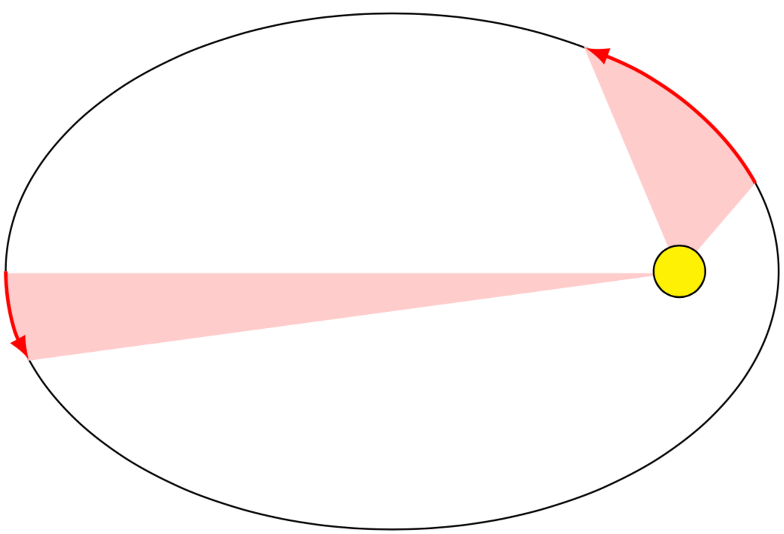
La comète de Halley



Kepler et Halley

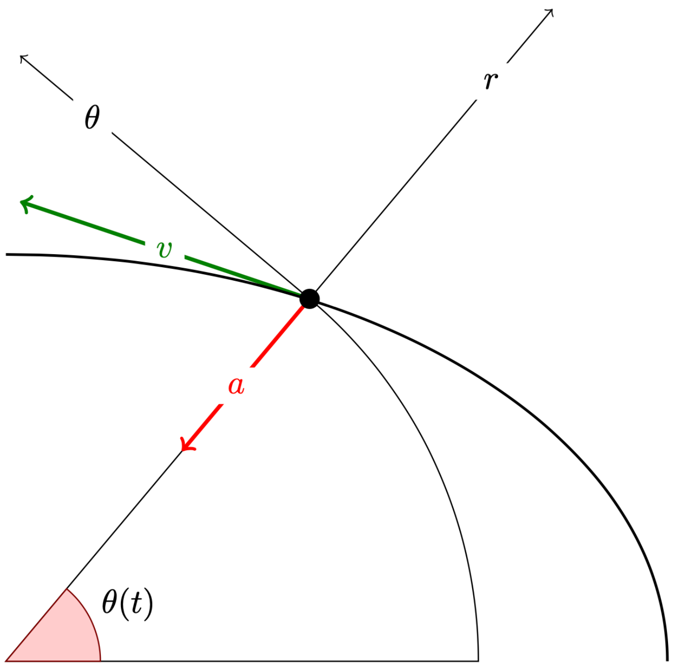
Démontrons
la seconde loi de Kepler





$$\vec{\mathbf{x}}(t) = r(t) \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Calculons l'accélération



$$\vec{\mathbf{x}}(t) = r(t) \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = r' \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + r\ \theta' \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \left(r'' - r\theta'\theta'\right) \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{e}}_r} + \left(2r'\theta' + r\theta''\right) \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{e}}_\theta}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \left(r'' - r\theta'\theta'\right) \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{e}}_r} + \left(2r'\theta' + r\theta''\right) \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{e}}_\theta}$$

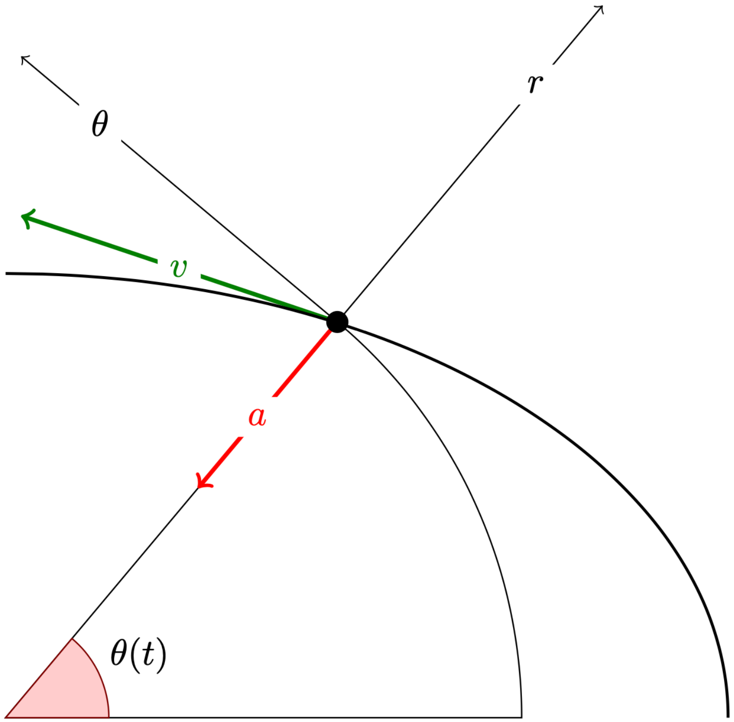
$$2r'\theta' + \theta'' r = 0$$

$$2{\color{red}r}r'\theta' + \theta''{\color{red}r^2} = 0$$

$$\downarrow$$

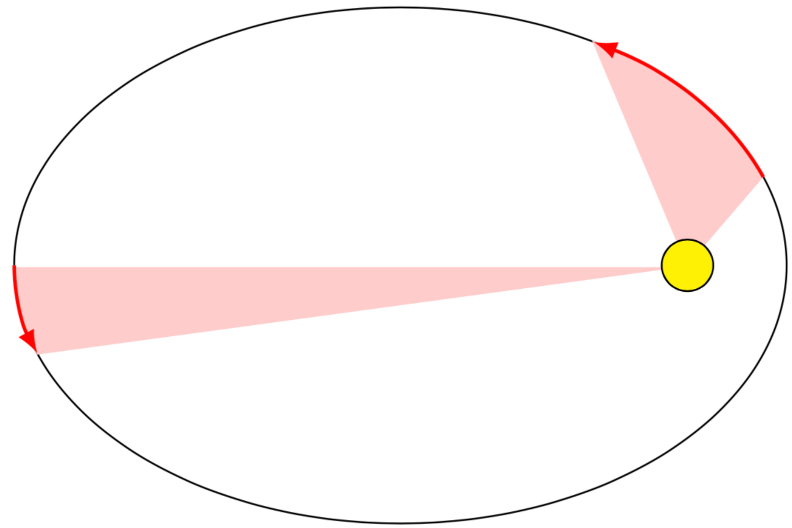
$$\left(r^2\theta'\right)' = 0$$

$$r^2\theta' = k$$

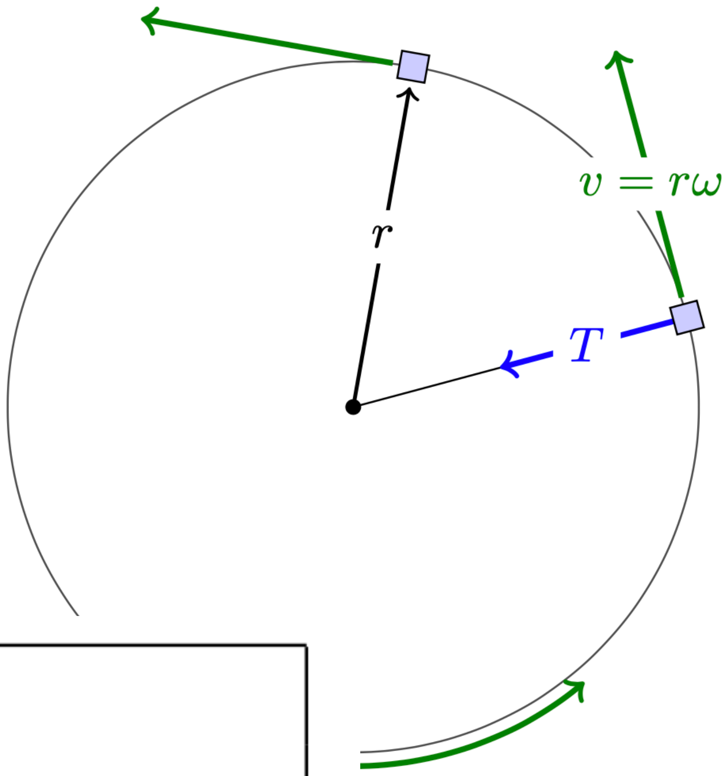


Il n'y a qu'une accélération radiale,
car la gravité est une force centrale !

Et calculons l'aire balayée sur un laps de temps !



$$
\begin{aligned}
A &= \tfrac{1}{2}\sum_i r^2(\theta_i)\Delta\theta \\
&= \tfrac{1}{2}\int_t^{t+\Delta t} \underbrace{r^2(t)\theta'(t)}_{k}\ dx \\
&= \tfrac{1}{2}\ k\ \Delta t \qquad \square
\end{aligned}
$$

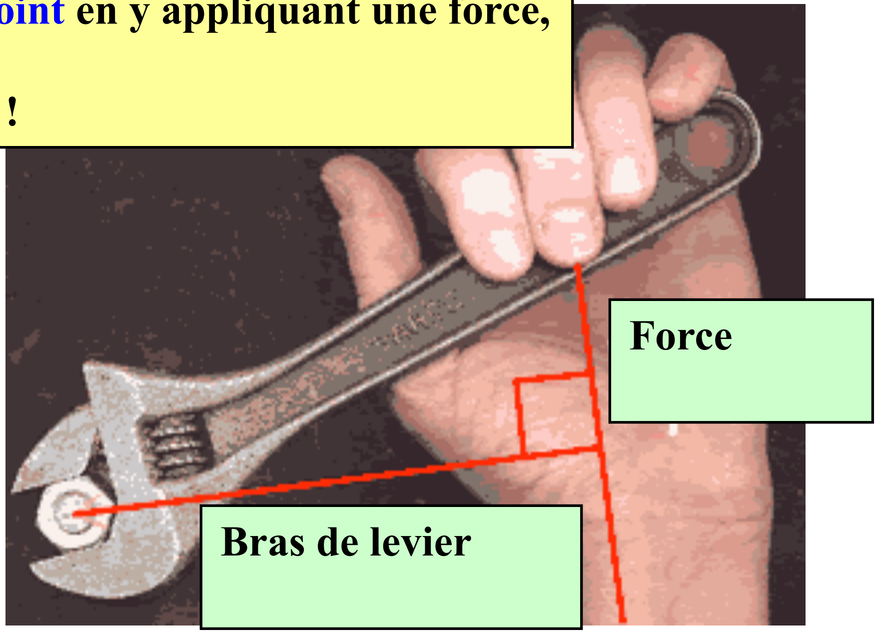


$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}}\right) \quad = \quad \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}$$

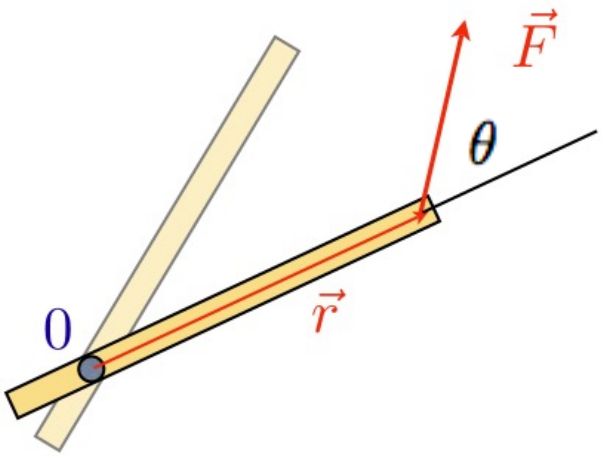
Bilan de moment cinétique

Ce qui fait tourner la clé, c’est le moment !

Supposons que l’on fixe une barre en un point et
que l’on souhaite la faire tourner autour de ce point en y appliquant une force,
l’accélération angulaire sera proportionnelle
au moment de cette force par rapport à ce point !



Et c'est quoi le moment d'une force par rapport à un point ?



Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

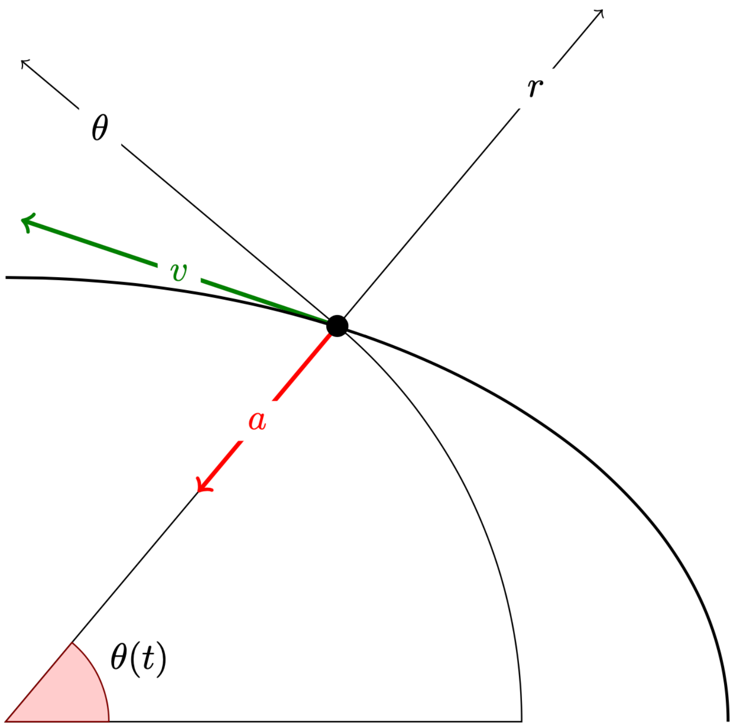
$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\, r_\perp = F_\perp\, r = F r \sin(\theta)$$

Direction du moment = axe de rotation
Norme de moment = vitesse de rotation
Signe du moment = sens de la rotation suivant la fameuse règle de la main droite !

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \left(r'' - r\theta'\theta'\right) \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{e}}_r} + \left(2r'\theta' + r\theta''\right) \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{e}}_\theta}$$

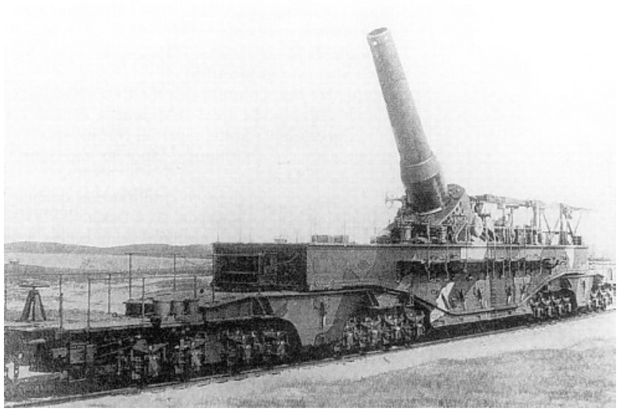
$$\begin{aligned} 2r'\theta' + \theta''r &= 0 \\ 2{\color{red}r}r'\theta' + \theta''{\color{red}r^2} &= 0 \\ &\downarrow \\ \left(r^2\theta'\right)' &= 0 \\ r^2\theta' &= k \end{aligned}$$

Le physicien dira que le moment cinétique de la comète est constant !



Il n'y a qu'une accélération radiale, car la gravité est une force centrale !

La mécanique d’un point...



$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

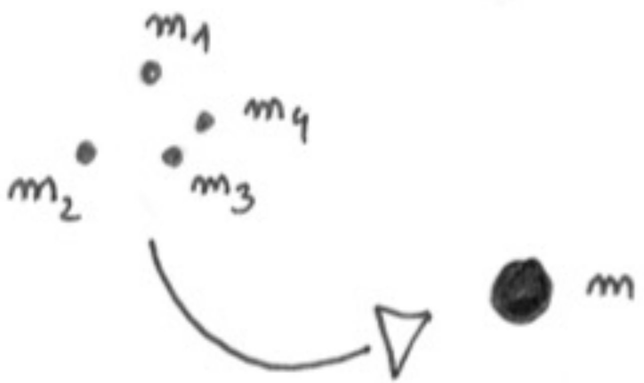
Les deux équations fondamentales !

Bilan de la quantité de mouvement
Bilan de l’énergie cinétique

Dans beaucoup d’applications, on peut se restreindre à l’analyse du mouvement du centre de masse et réduire le corps à un simple point où on a concentré toute la masse !

Ce que nous avons fait jusqu’à présent !
Mais, un skieur, une auto, un bloc, ce n’est pas un point !

C'est quoi un point ?



On remplace une série de particules,
par une grosse particule virtuelle
de masse équivalente !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

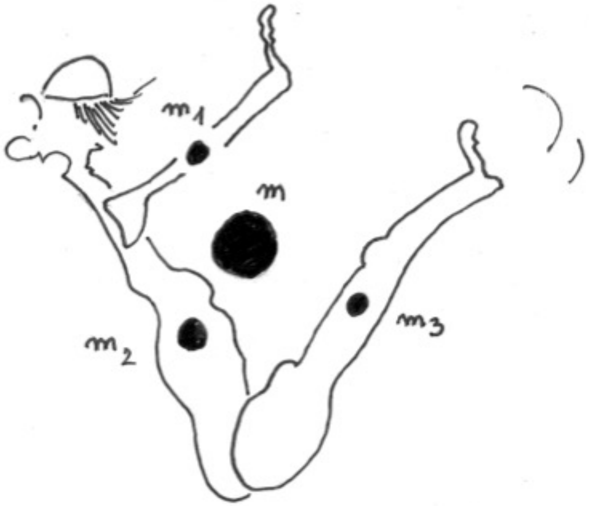
C'est quoi un point ?

Tant que le bloc ne tourne pas,
la mécanique du point est suffisante
pour résoudre pas mal de problèmes !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

C'est quoi un corps ?

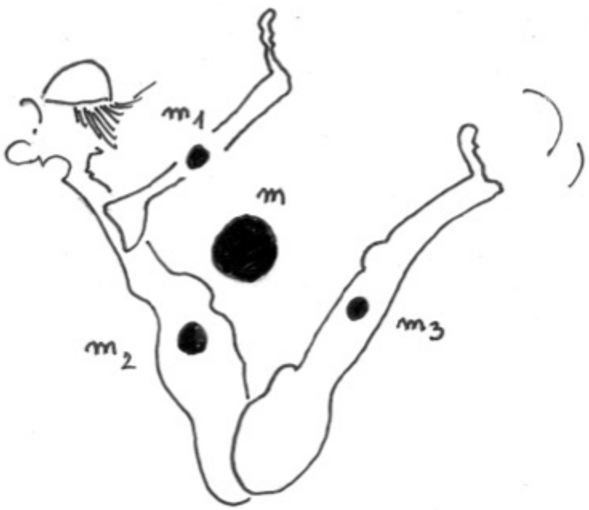


Mais lorsque notre athlète fait des pirouettes, il faut avoir un modèle mécanique plus compliqué !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

Le centre de masse...



La position d'une particule plus grande doit compter davantage !

Tronc-tête : 58% de la masse corporelle
Jambes : 32% de la masse corporelle
Bras : 10 % de la masse corporelle

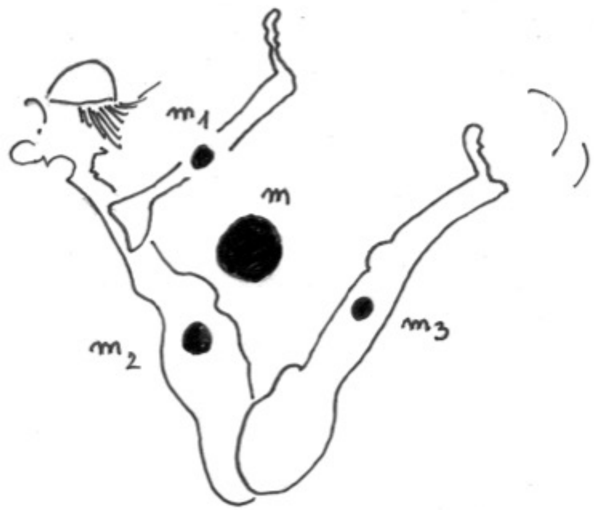
$$m = \sum m_i$$

$$m\,\vec{\mathbf{x}} = \sum \left(m_i\,\vec{\mathbf{x}}_i \right)$$

... est la position moyenne pondérée des positions

La vitesse du centre de masse...

La position d'une particule plus grande doit compter davantage !

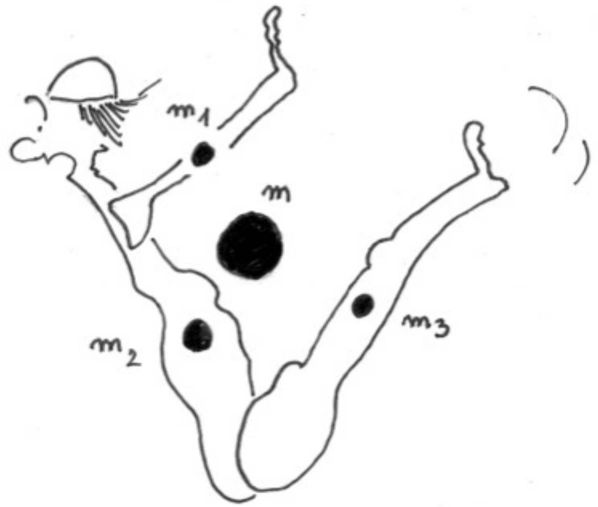


$$m = \sum m_i$$

$$m\,\vec{\mathbf{x}} = \sum \left(m_i\,\vec{\mathbf{x}}_i\right)$$

$$m\,\vec{\mathbf{v}} = \sum \left(m_i\,\vec{\mathbf{v}}_i\right)$$

... est aussi obtenue comme la moyenne pondérée des vitesses



Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\,\vec{\mathbf{x}} = \sum \left(m_i\,\vec{\mathbf{x}}_i \right)$$

$$m\,\vec{\mathbf{v}} = \sum \left(m_i\,\vec{\mathbf{v}}_i \right)$$

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 \neq \sum \left(\frac{1}{2}\,m_i\,v_i^2 \right)$$

$$\vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}} \neq \sum \left(\vec{\mathbf{r}}_i \times m\vec{\mathbf{v}}_i \right)$$

Pour l'énergie
et le moment cinétique,
c'est plus compliqué....

La mécanique d'un corps...

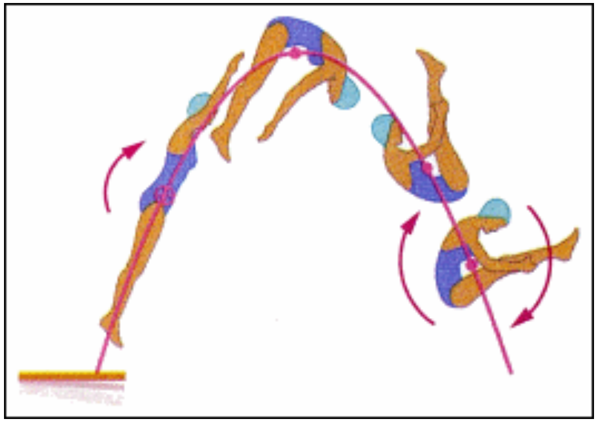
Les trois équations fondamentales !

Bilan de la quantité de mouvement
Bilan de l'énergie cinétique
Bilan du moment cinétique

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$



$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\begin{array}{l}\text{Forces}\\ \sum \vec{\mathbf{F}}\end{array}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right)\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\,dt$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[m\ \vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\ \vec{\mathbf{v}}\right]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\ (t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\begin{array}{l}\sum \vec{\mathbf{F}}\ \Delta t\\ \text{Impulsions}\end{array}}$$

Bilan
de la quantité
de mouvement

Puissance des forces

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right)\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_b - \left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot(\vec{\mathbf{x}}_b - \vec{\mathbf{x}}_a)$$

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}$$

Travail des forces

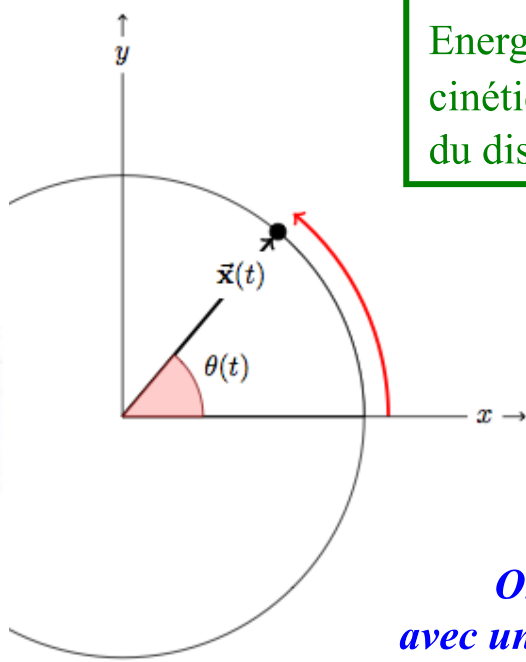
Bilan d'énergie cinétique

Et l'énergie cinétique de rotation d'un disque ?

$$\boxed{\sum \frac{1}{2} m_i\, v_i^2} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum m_i\, r_i^2\right)}_{I} \omega^2$$

Energie cinétique du disque

Moment d'inertie du corps



Et le centre de masse ne bouge pas !

On peut donc avoir une énergie cinétique avec un centre de masse totalement immobile !

Moments des forces

$$\vec{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right)\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\,dt$$

En supposant que les moments sont constants.

$$\left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_a = \sum(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\,(t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\sum(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\,\Delta t}$$

Impulsions angulaires

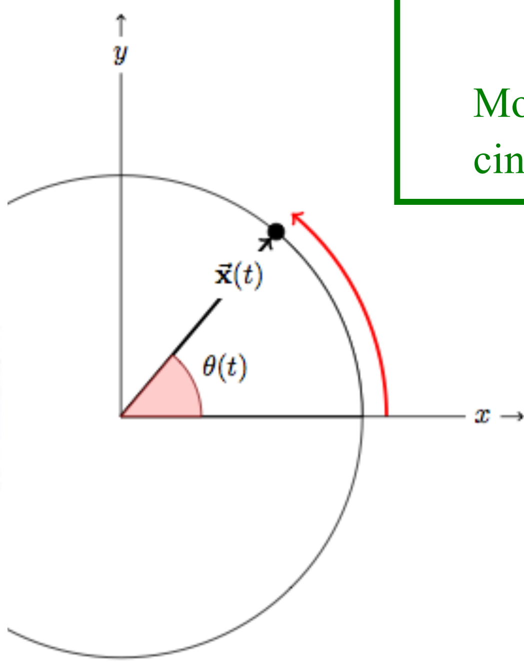
Bilan de moment cinétique

Et le moment cinétique de rotation d'un disque ?

$$\boxed{\sum r_i\; m_i\; v_i} \;=\; \underbrace{\left(\sum m_i\; r_i^2\right)}_{I}\,\omega$$

Moment cinétique

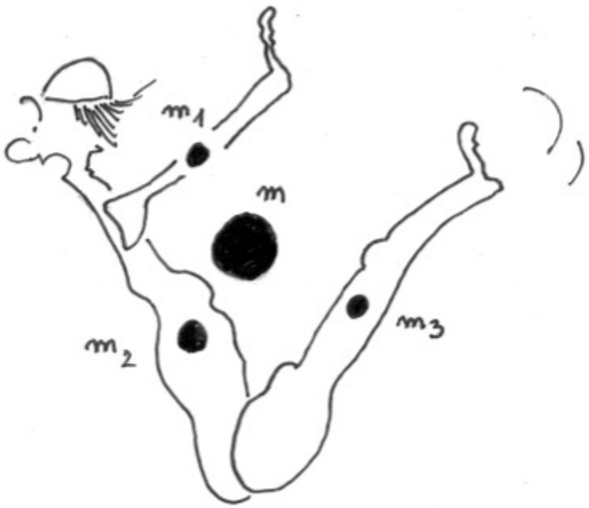
Moment d'inertie du corps



Et le centre de masse ne bouge pas !

Pas de quantité de mouvement !
Mais un moment cinétique non nul car le disque tourne !

En résumé :



$$m = \sum m_i$$

$$m\,\vec{\mathbf{x}} = \sum \left(m_i\,\vec{\mathbf{x}}_i \right)$$

$$m\,\vec{\mathbf{v}} = \sum \left(m_i\,\vec{\mathbf{v}}_i \right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}} \right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2} m\,v^2 + \tfrac{1}{2} I\,\omega^2 \right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega \right) = \sum M_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}} \right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\,m\,\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \right) = \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}} \times m\,\vec{\mathbf{v}} \right) = \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

- **Le moment est le produit du bras de levier par la force.**
- **L'énergie cinétique d'un corps est la somme de l'énergie du mouvement du centre de masse et de l'énergie de la rotation du corps autour de ce point.**
- **Pour la rotation d'un corps autour de son centre de masse, les moments de force, le moment cinétique et le moment d'inertie du corps sont l'équivalent des forces, de la quantité de mouvement et de la masse pour le mouvement de ce point !**
- **Un corps est à l'équilibre si la somme des forces et des moments est nulle : c'est l'équilibre statique.**

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

Ne pas oublier !

- La masse mesure la résistance d'un corps à une accélération causée par une force.
- Le moment d'inertie mesure la résistance d'un corps à une accélération angulaire causée par un moment de force.

$$\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

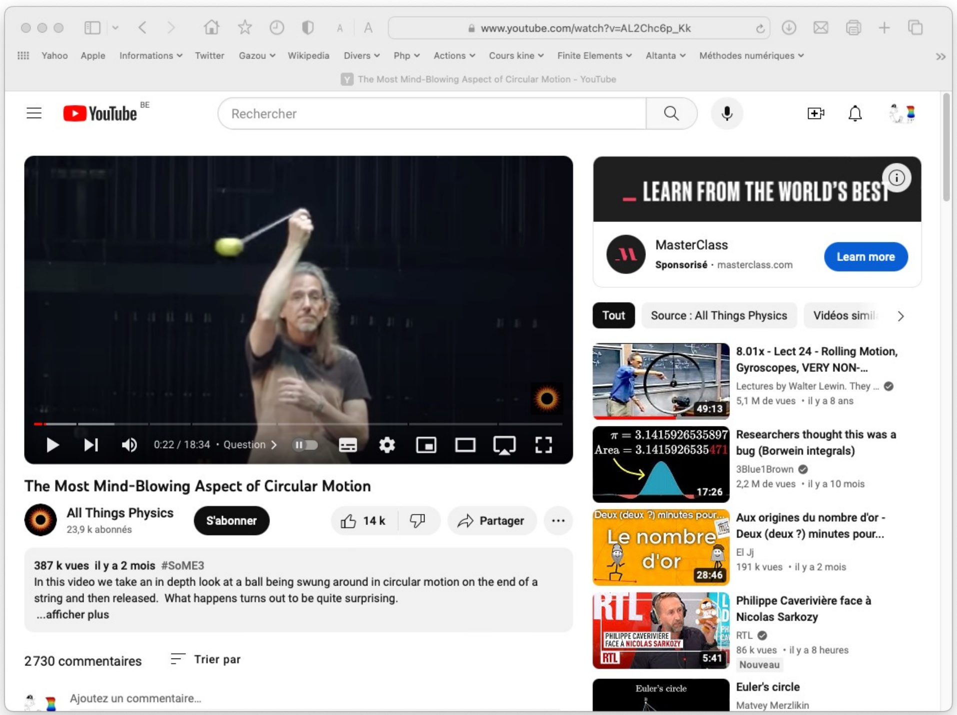
$$\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) = \sum M_i$$

Ce 3 octobre :-)

Une intro par...
Maxime Lambrecht
(@Philoxime)
philosophie & éthique
UCLouvain - ERG
Un débat par...
Ignace Adant
économie & circularité
UCLouvain
Laurence Guiot
ingénierie & industrie
GSK
Bernard Feltz
philosophie des sciences
UCLouvain
Stéphane Crozat
ingénierie & éthique
UTC
Animé par...
Arnaud Ruyssen
journalisme
RTBF
UNE CONFÉRENCE TRANSDISCIPLINAIRE
Technologie & Transition :
Quelle place pour l'innovation ?
Faut-il être techno-critique ou techno-optimiste au 21e siècle ?
QUAND ?
Le 03 octobre 2023
19h-21h Conférence
21h-22h Drink
OÙ?
Auditoire A.10
Hall des Sciences
Place des Sciences
POUR QUI ?
Ouvert à tou·te·s
INGÉS EN TRANSITION
icteam
MMC
epl
UCLouvain

Pour en savoir un peu plus :-)



https://youtu.be/AL2Chc6p_Kk