Le théorème de Gauss !

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

Résumé des épisodes précédents :-)

Episode 1 : Décrire le mouvement
Episode 2 : Newton et la force de gravité
Episode 3 : Coulomb et la force de l'électricité

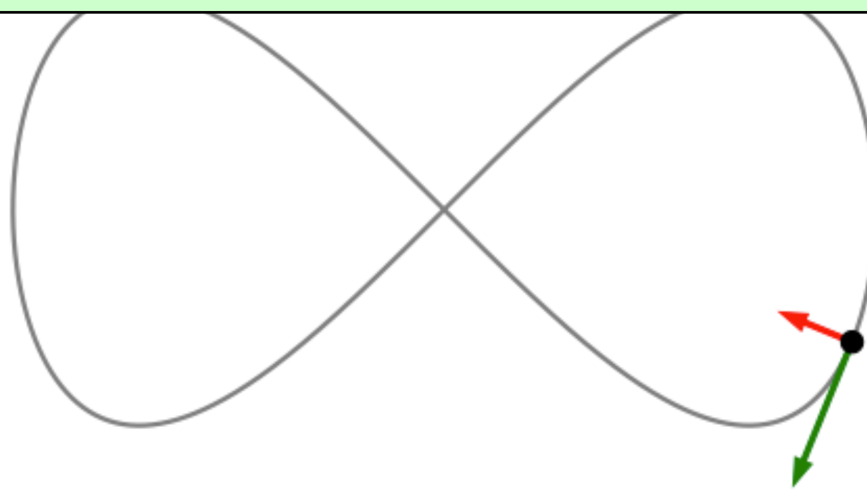
La mécanique du point

$$\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) = \vec{\mathbf{v}}(t)$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) = \vec{\mathbf{a}}(t)$$

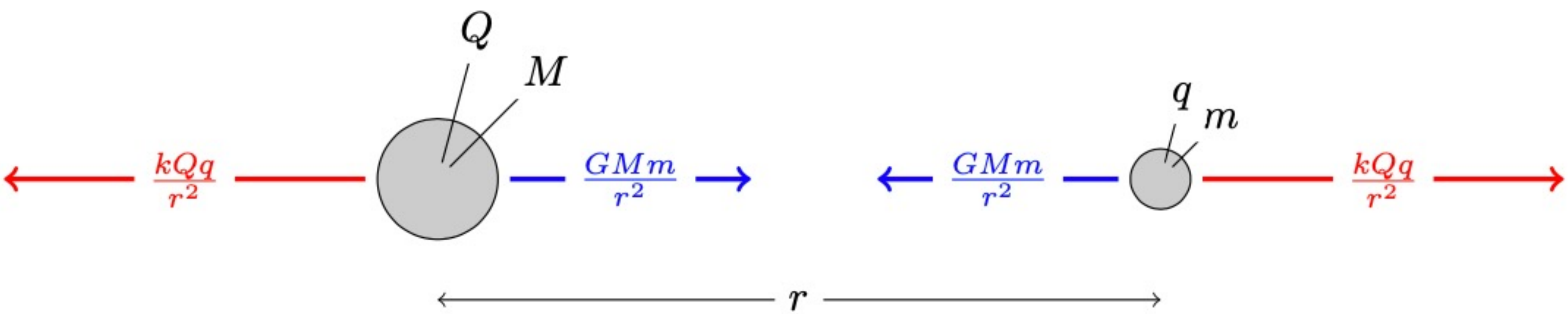
$$m\,\vec{\mathbf{a}}(t) = \sum \vec{\mathbf{F}}(t)$$

- **La position, la vitesse, l'accélération, les forces sont des vecteurs ! Il faut donc bien maîtriser l'algèbre vectorielle !**
- **A l'exception du mouvement rectiligne à vitesse constante, tout autre type de mouvement présente une accélération centripète due au changement de direction et/ou de norme de la vitesse.**



La force de Coulomb…

$$\boxed{F = \frac{kQq}{r^2}}$$

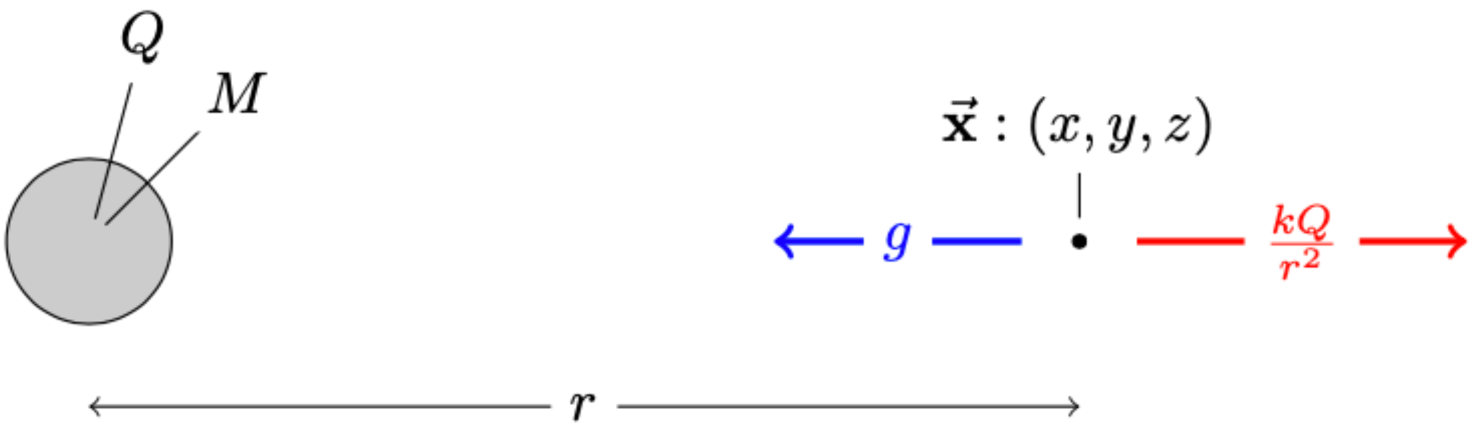


$$\boxed{F = \frac{GMm}{r^2}}$$

… et la force de gravité

Le champ électrique…

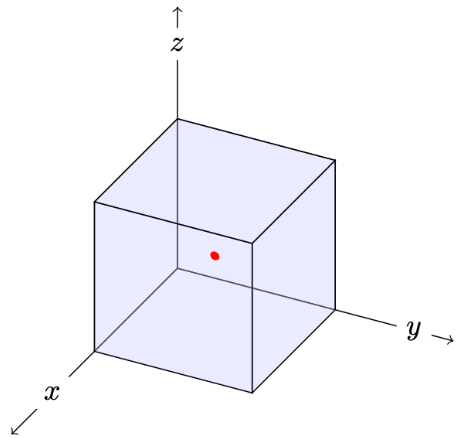
$$\boxed{E = \frac{kQ}{r^2}}$$



$$\boxed{E = \underbrace{\frac{GM}{r^2}}_{g}}$$

… et le champ gravitationnel

Trois champs électriques particuliers !

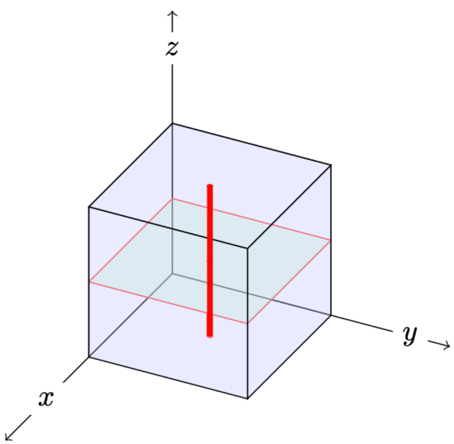


3D

[C]

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}$$

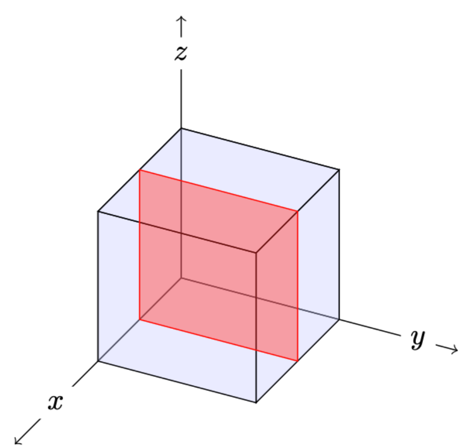
[N/C]



$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{\lambda}{r}$$

[C/m]

2D



[C/m²]

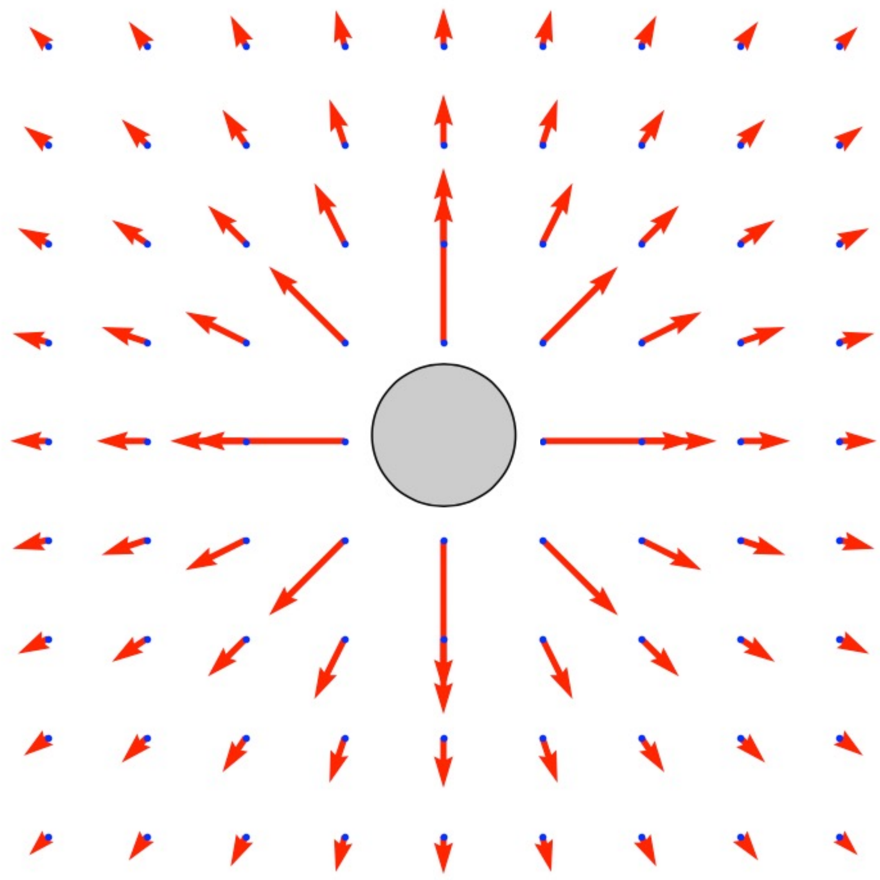
1D

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0}\,\sigma$$

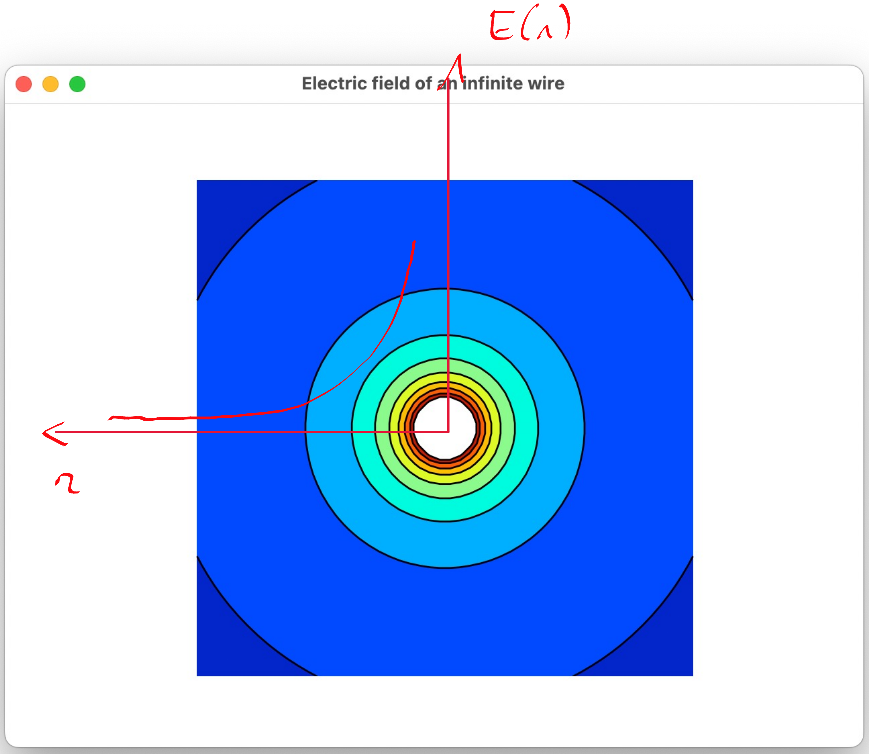
Un cable infini chargé perpendiculaire au plan

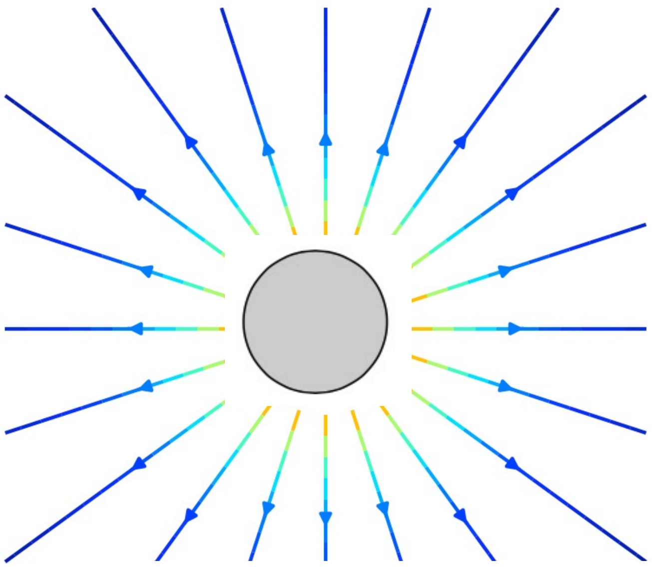
En 2D, c'est plus facile !

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$



Lignes du champ …



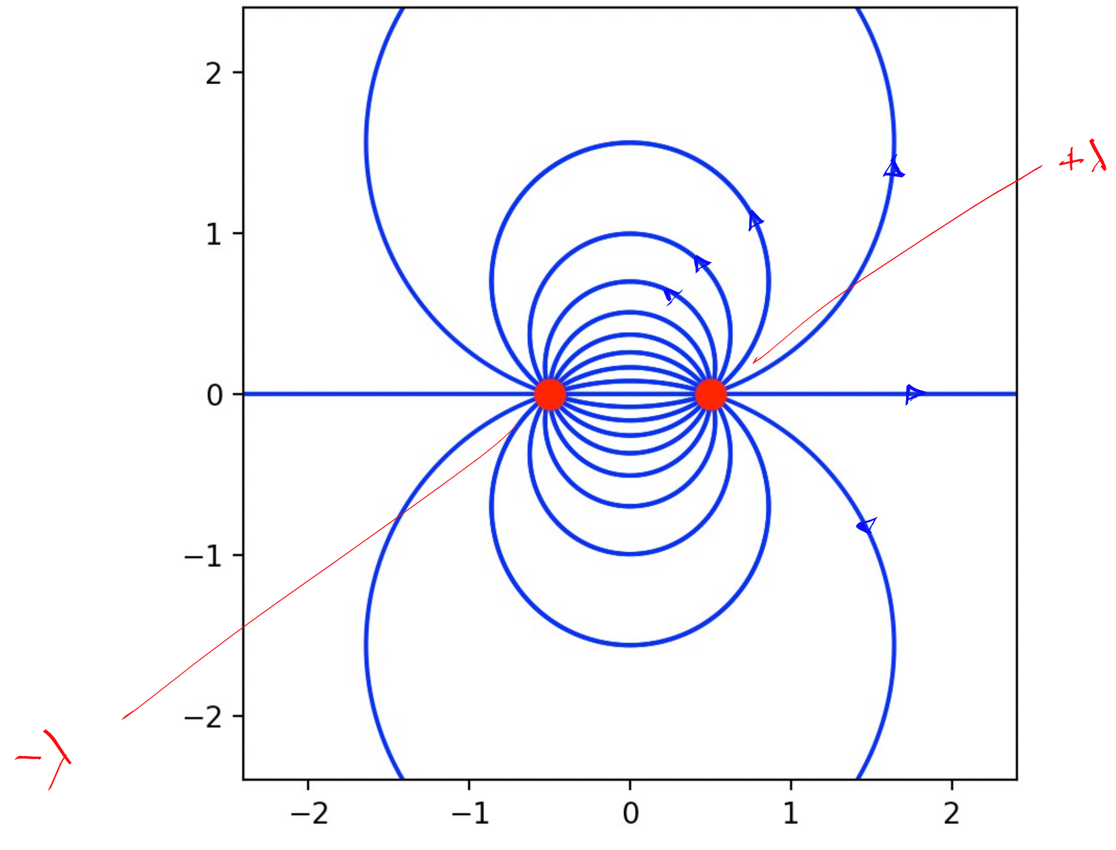


$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} E_x(x,y) \\ E_y(x,y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

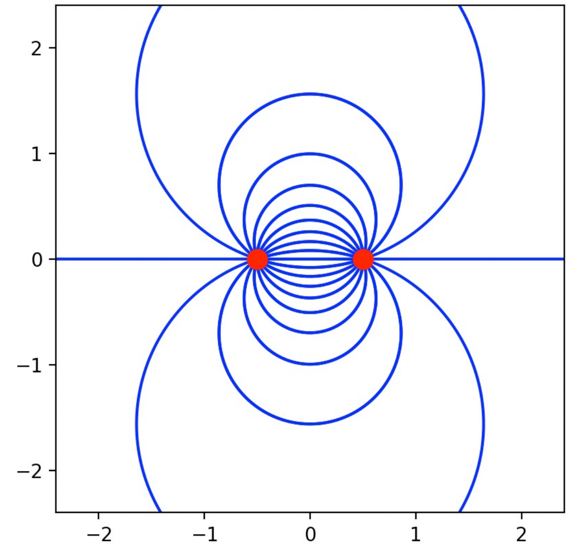
$$E(\vec{\mathbf{x}}) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

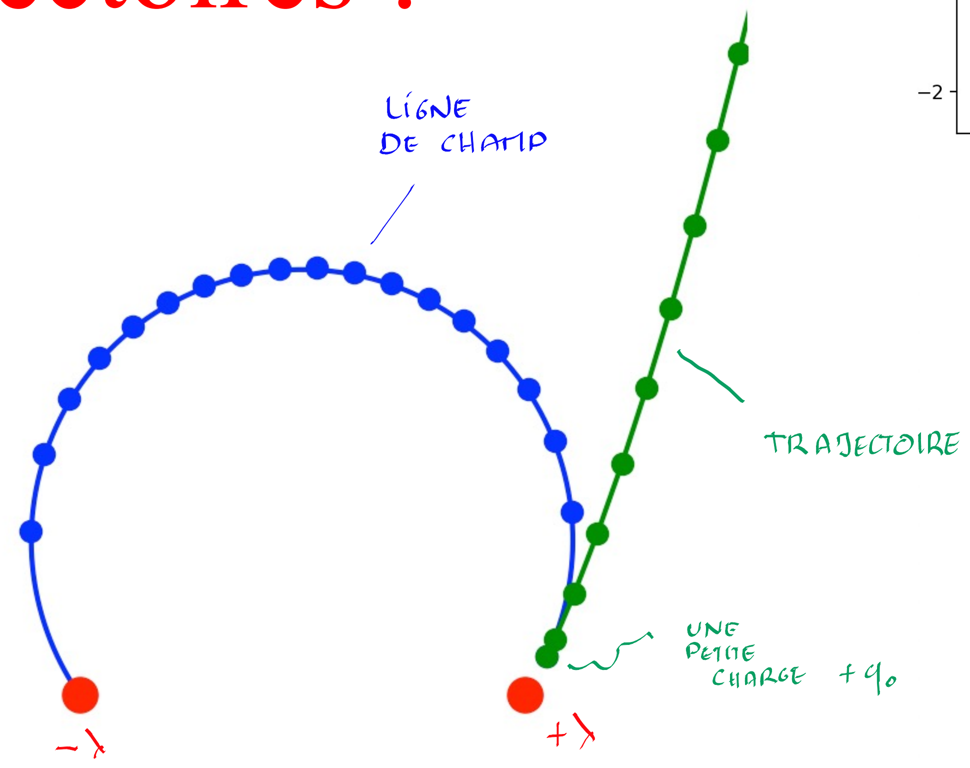
… intensité du champ !

Deux cables chargés perpendiculaires au plan

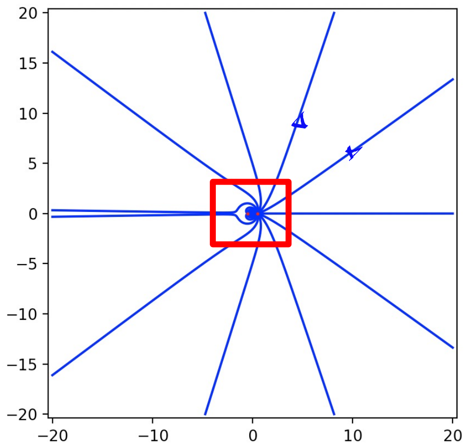


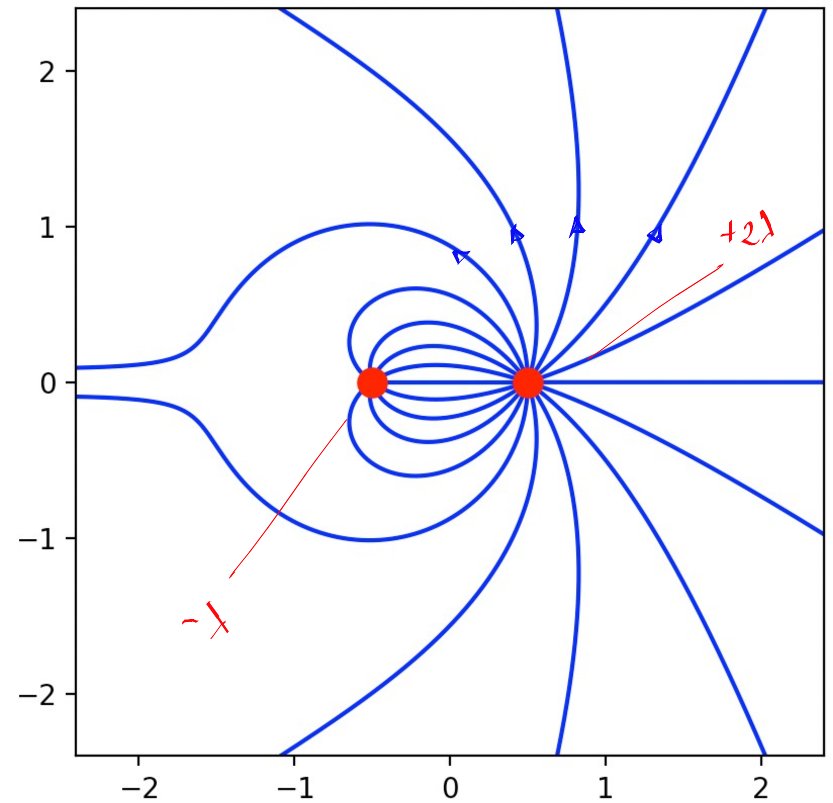
Les lignes du champ ne sont pas des trajectoires !

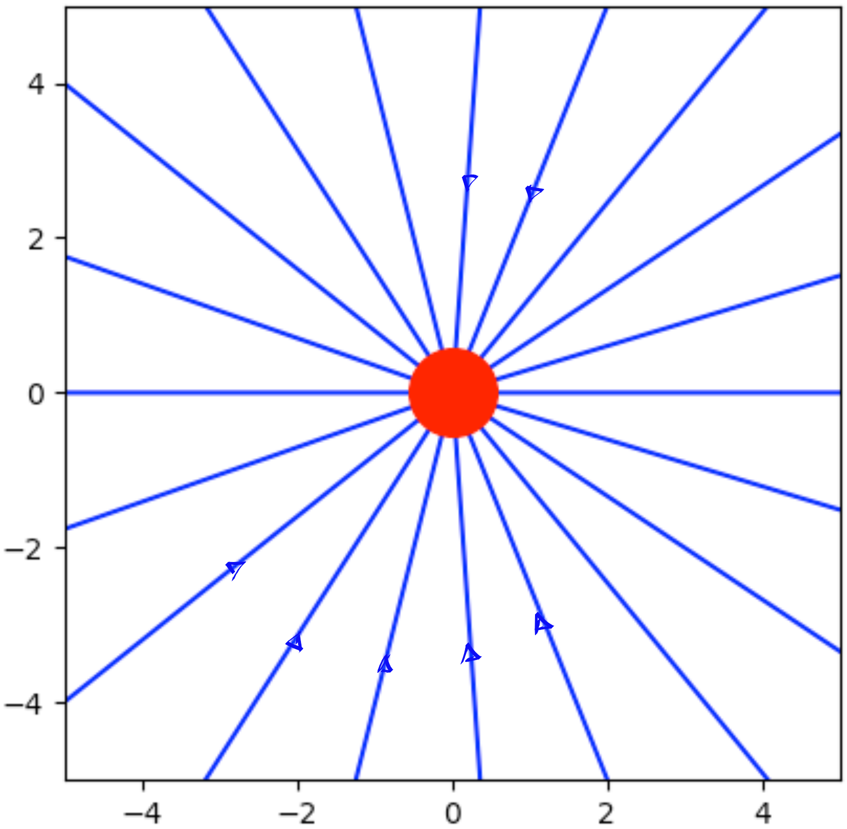




Avec des densité de charges différentes…



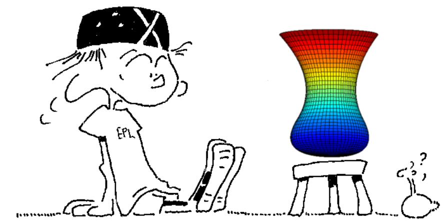




Lignes
du champ
gravitationnel
autour d'une étoile !

Méthode dite d'Euler explicite !

Y a mieux !
On y reviendra plus tard !



$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt}(t) = \vec{v}(t) \\[2mm] \dfrac{d\vec{v}}{dt}(t) = \vec{g}(\vec{x}(t)) \end{cases}$$

EN PRENANT UN PETIT Δt

$$\frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} \simeq \vec{v}(t)$$

$$\frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \simeq \vec{g}(\vec{x}(t))$$

POSONS $t = 0$:-) SANS PERTE DE GENERALITE

EN DEFINISSANT $\vec{X}_i \triangleq \vec{x}(t + i\Delta t)$

$\vec{V}_i \triangleq \vec{v}(t + i\Delta t)$ $\qquad \vec{X}_0 = \vec{x}(0)$

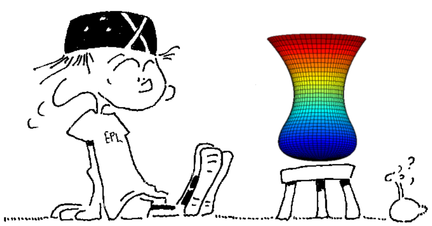
$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \Delta t \, \vec{V}_i$$
$$\vec{V}_{i+1} = \vec{V}_i + \Delta t \, \vec{g}(X_i)$$

Une trajectoire avec python !

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{v}}(t) \\
\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}}(t))
\end{aligned}
$$

Méthode dite d'Euler explicite !

Y a mieux !
On y reviendra plus tard !



En prenant un Δt suffisamment petit...

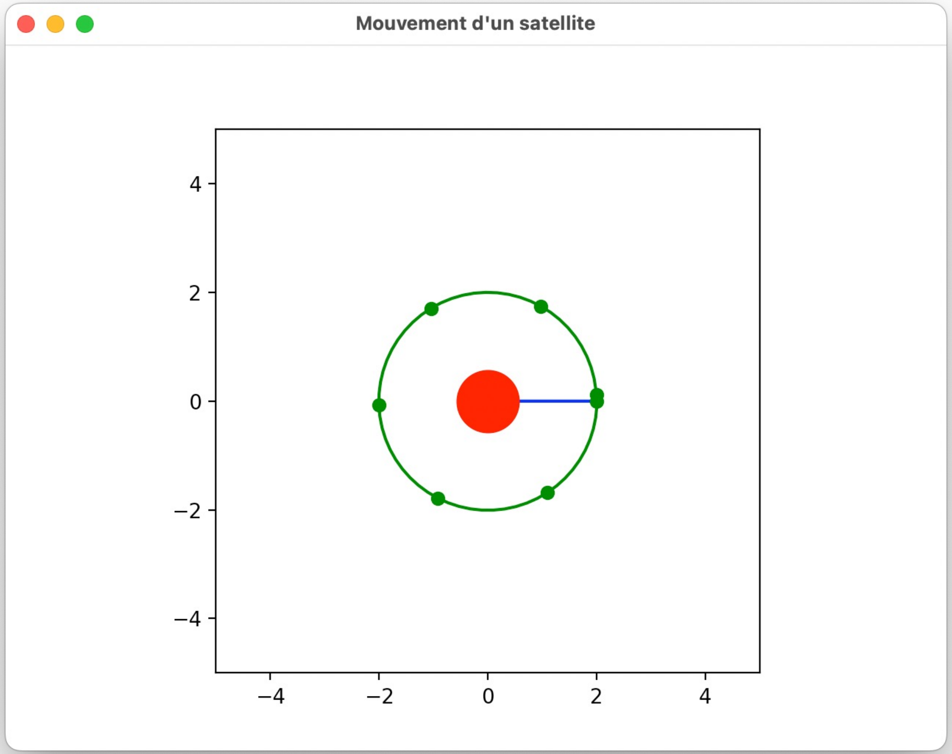
$$
\begin{aligned}
\frac{\vec{\mathbf{x}}(t+\Delta t)-\vec{\mathbf{x}}(t)}{\Delta t} &= \vec{\mathbf{v}}(t) \\
\frac{\vec{\mathbf{v}}(t+\Delta t)-\vec{\mathbf{v}}(t)}{\Delta t} &= \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}}(t))
\end{aligned}
$$

Il faut une position et une vitesse initiale pour entamer le calcul !

En definissant $\vec{\mathbf{x}}_i = \vec{\mathbf{x}}(t+i\Delta t)$ et $\vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{v}}(t+i\Delta t)$

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}_{i+1} &= \vec{\mathbf{x}}_i + \Delta t\ \vec{\mathbf{v}}_i \\
\vec{\mathbf{v}}_{i+1} &= \vec{\mathbf{v}}_i + \Delta t\ \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}}_i)
\end{aligned}
$$

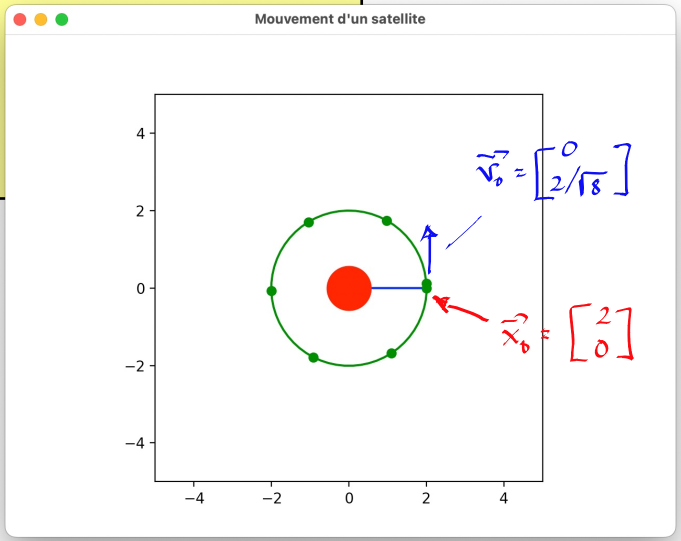
Une trajectoire avec python !



La Terre tourne autour du Soleil !

```
def g(x):
  g = zeros(2)
  g[0] = -x[0] / (x[0]*x[0] + x[1]*x[1])**(3/2)
  g[1] = -x[1] / (x[0]*x[0] + x[1]*x[1])**(3/2)
  return g

X = zeros((n+1,2)); X[0,:] = [2.0,0.0]
X = zeros((n+1,2)); V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0)]
n = 18001;  dt = 10e-4
for i in range(n):
  V[i+1,:] = V[i,:] + dt * g(X[i,:])
  X[i+1,:] = X[i,:] + dt * V[i,:]
```

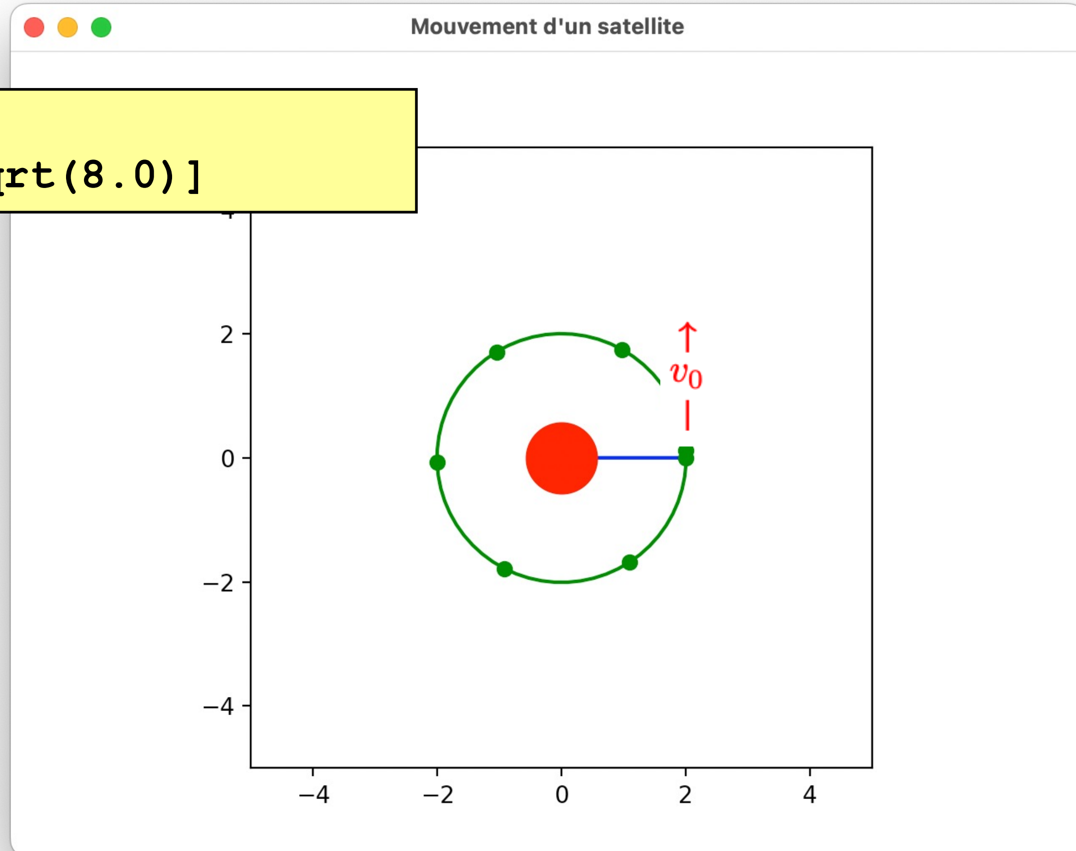


Eh oui !

Les lignes de champ ne sont pas les trajectoires !

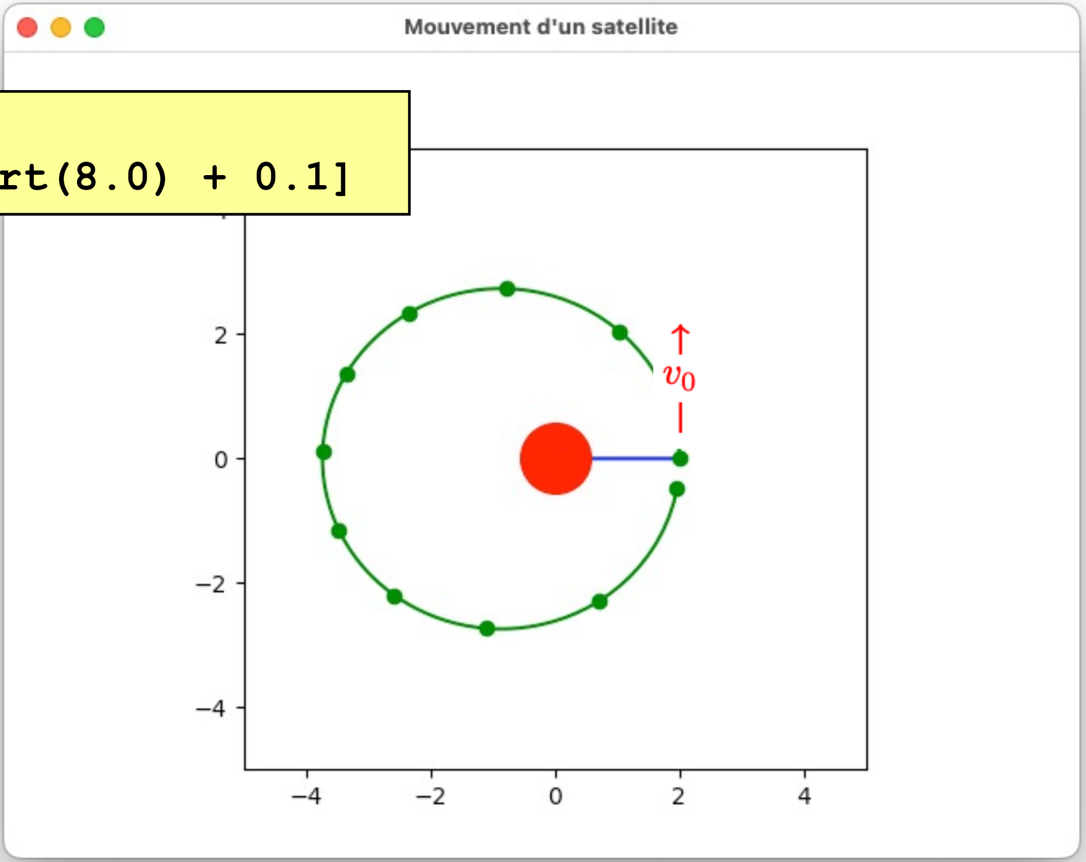
Python : so cool :-)

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0)]
```



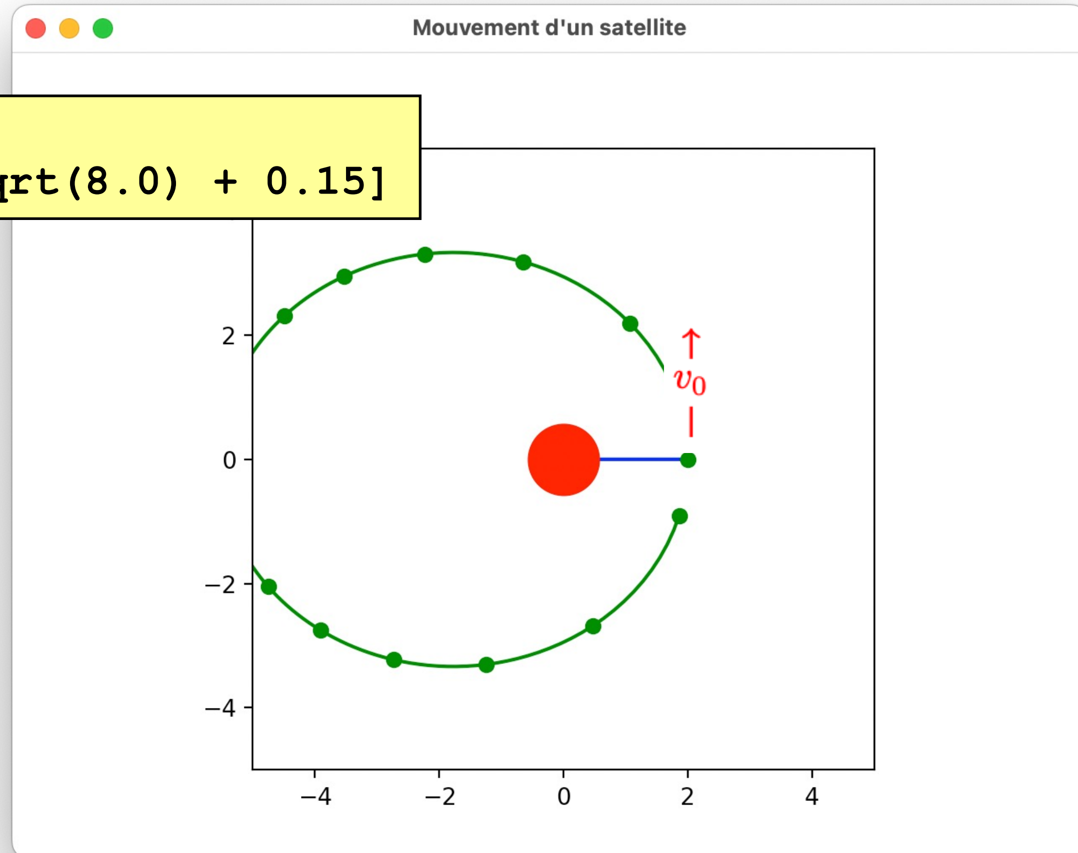
Lâchons un satellite !

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) + 0.1]
```



Lâchons
un fifrelin plus vite !

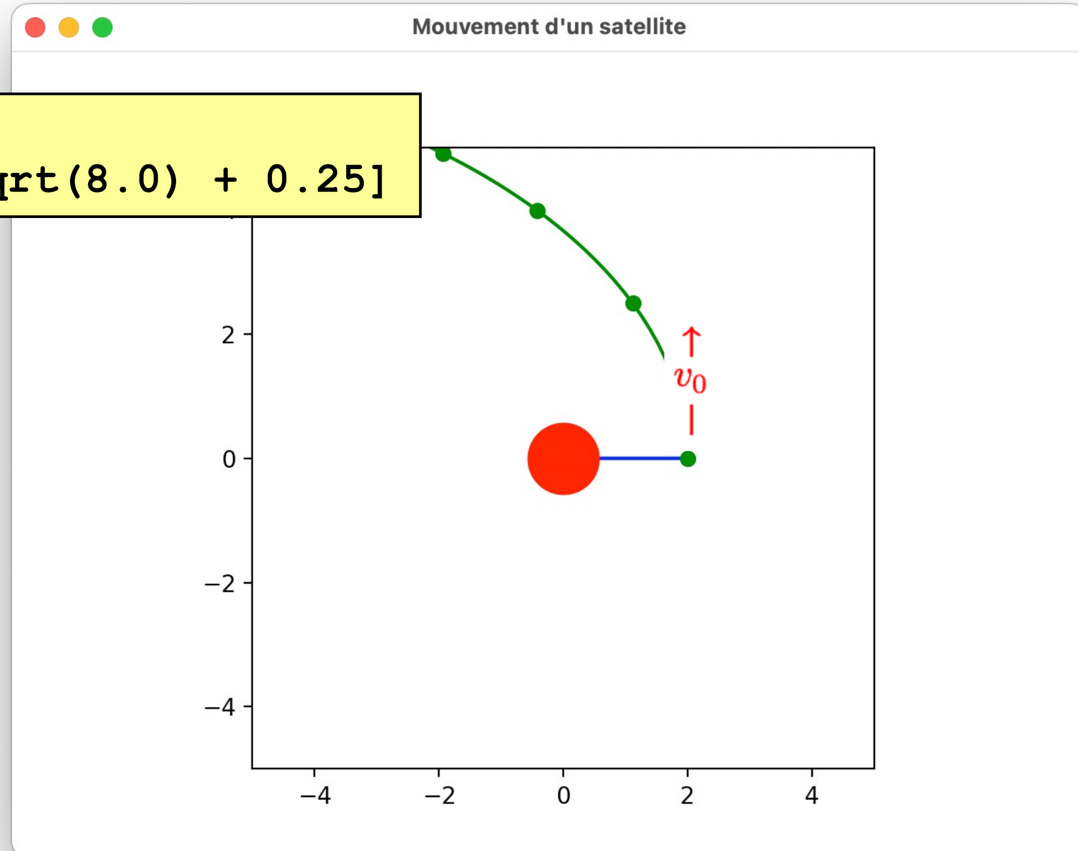
```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) + 0.15]
```



Loi
DE KEPLER :-)

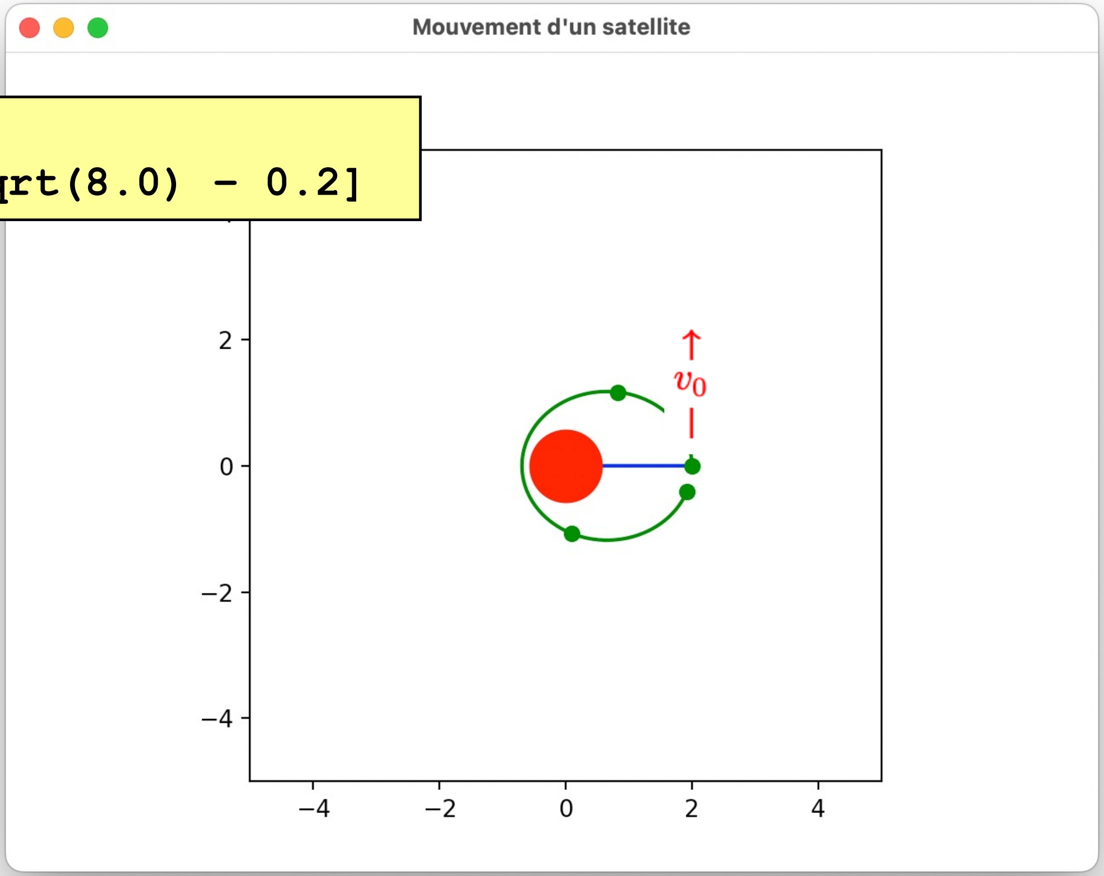
Et encore
un tout petit plus vite !

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) + 0.25]
```



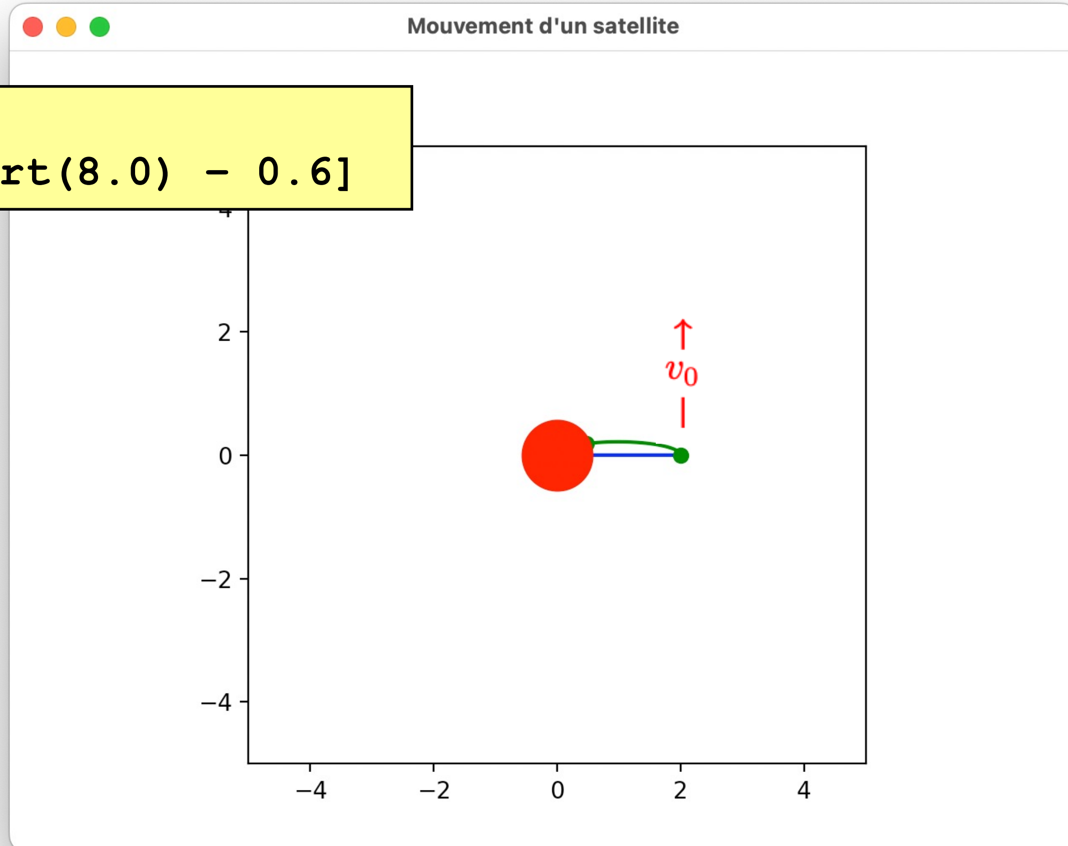
Est-ce qu’il va revenir ?

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) - 0.2]
```



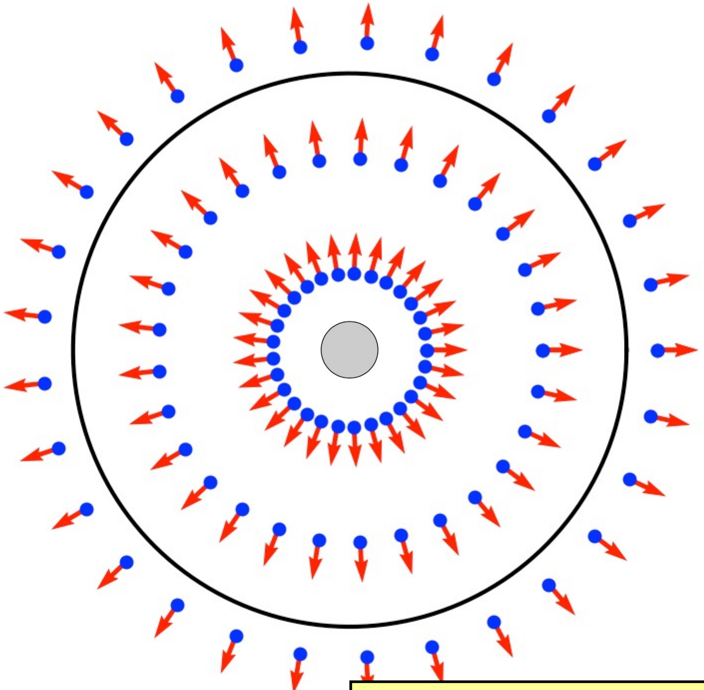
Et en le lâchant
un fifrelin plus lentement !

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) - 0.6]
```



Trop lent : le satellite retombe sur la planète !

Une source de particules



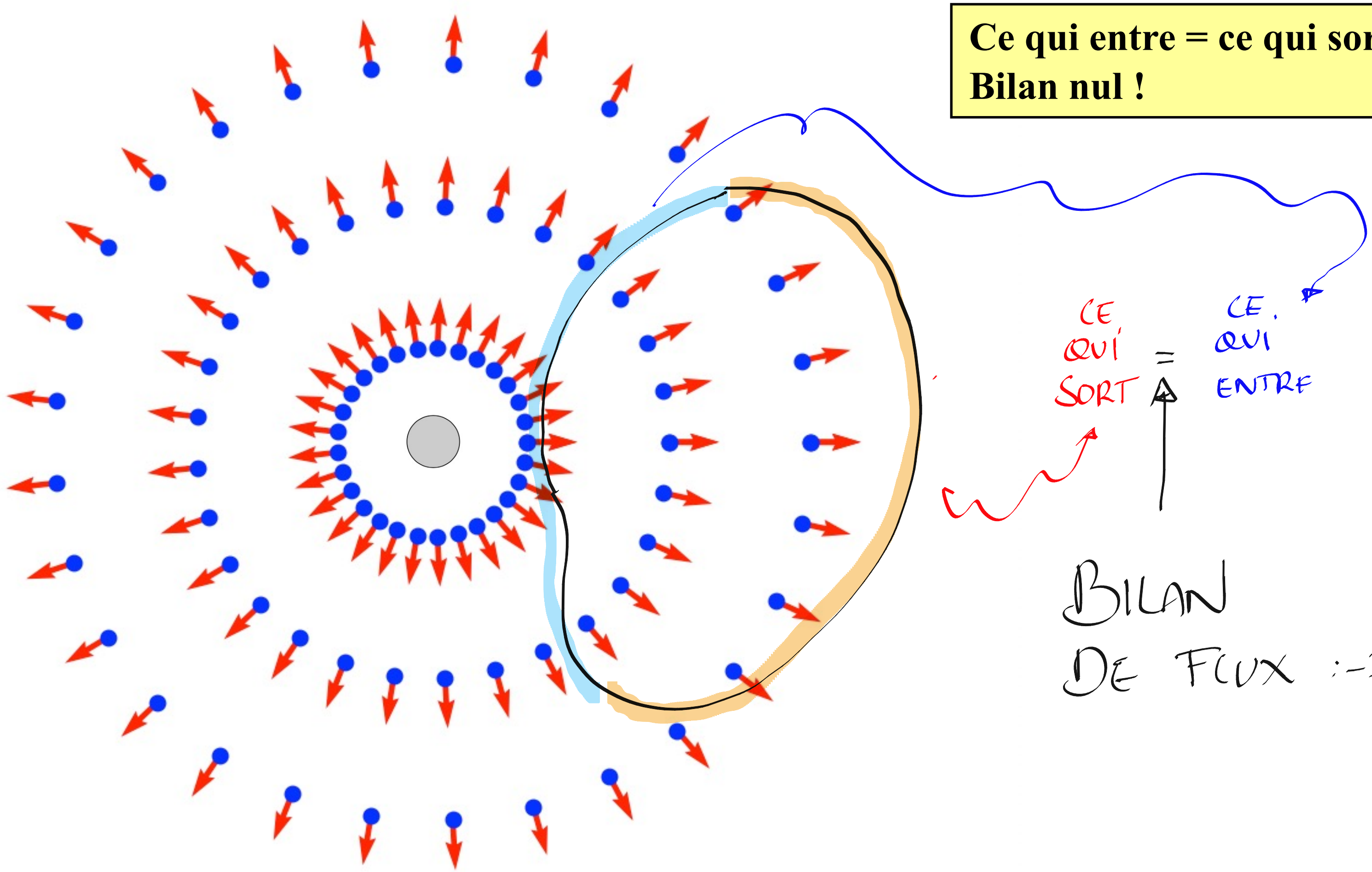
$$\underbrace{\text{Flux de particules}}_{\Phi} = \frac{\Delta n}{\Delta t}$$

En 2D, c'est plus facile !

Exemples :

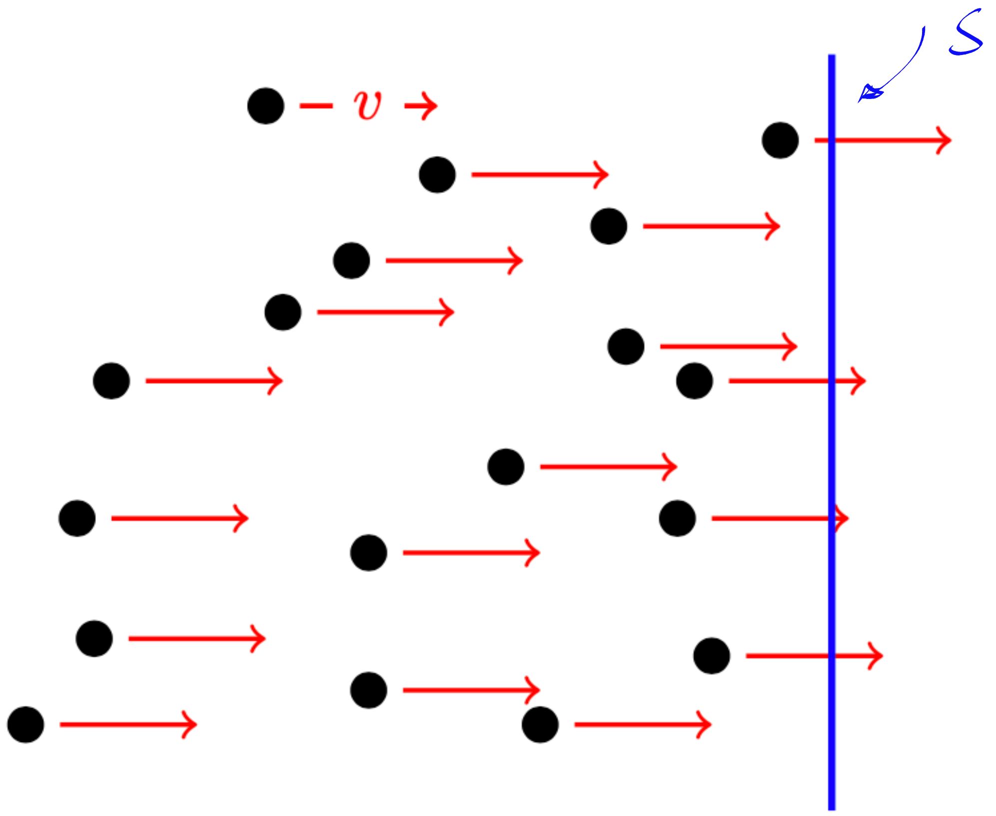
Photons d'une source lumineuse...
Gouttes d'eau provenant d'une source...
Voitures fuyant une explosion nucléaire…

Ce qui entre = ce qui sort !
Bilan nul !



Une courbe quelconque ne contenant pas la source !

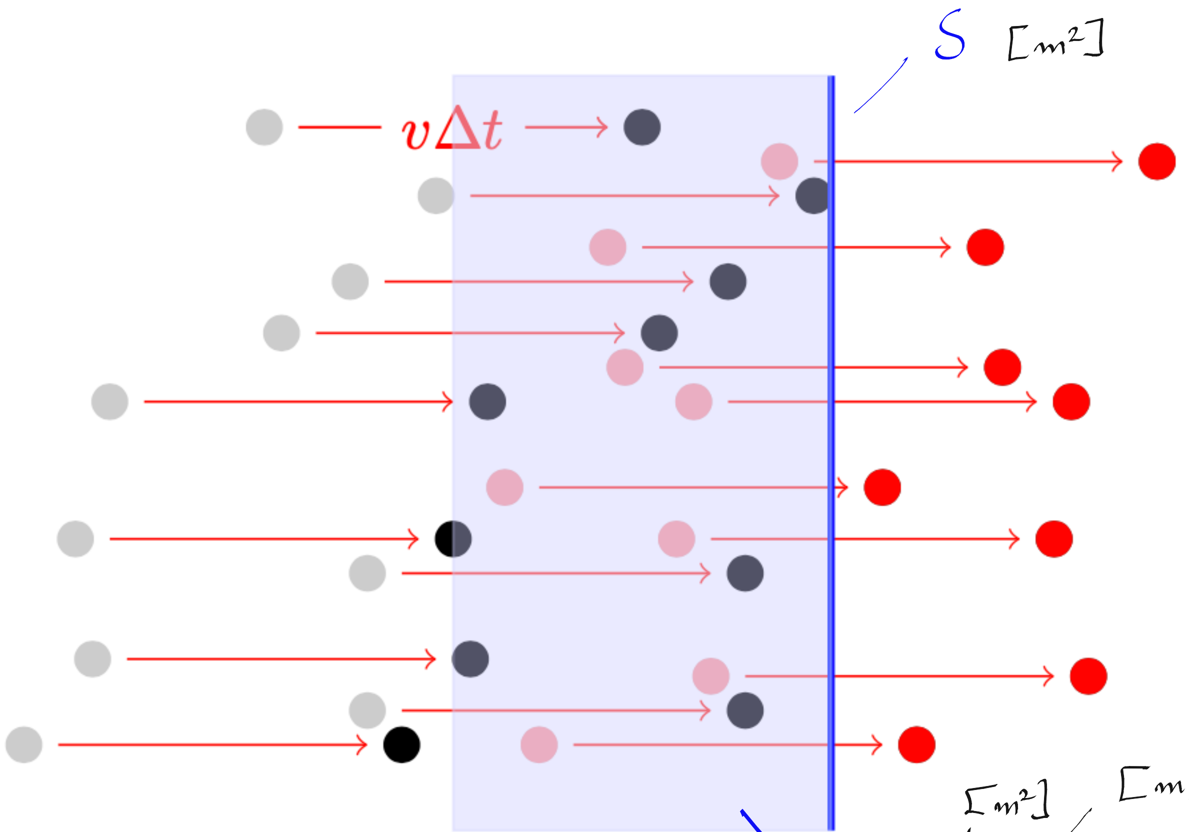
Plus facile !
un mouvement parallèle…



En 1D, c'est encore plus facile !
Enfin, plutôt 1,5 D :-)

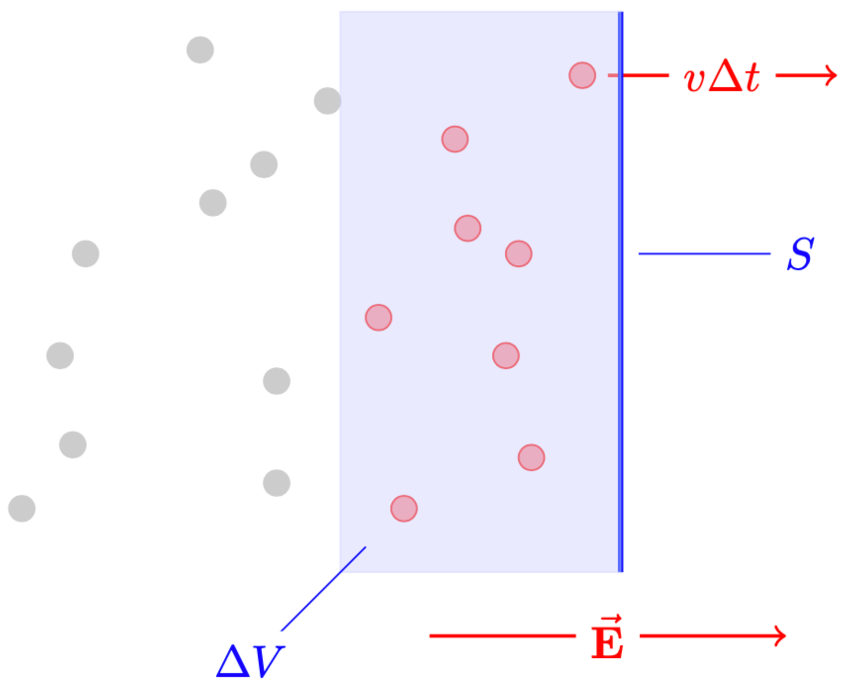
Démarrons le chronomètre…

Δt



$$\underbrace{\Delta V}_{[m^3]} = \underbrace{S}_{[m^2]}\ \underbrace{v}_{[m/s]}\ \underbrace{\Delta t}_{[s]}$$

Et calculons le flux…



DENSITE FLUX

$$E \triangleq \eta v$$

FLUX PARTICULES $= \dfrac{\Delta n}{\Delta t} = \overbrace{\eta v}\, S$

DENSITE PARTICULES

NBR DE PARTICULE "n"

$$\boxed{\frac{\Delta n}{\Delta V}} \triangleq \eta$$

DENSITE DE PARTICULE

"η = ETA"

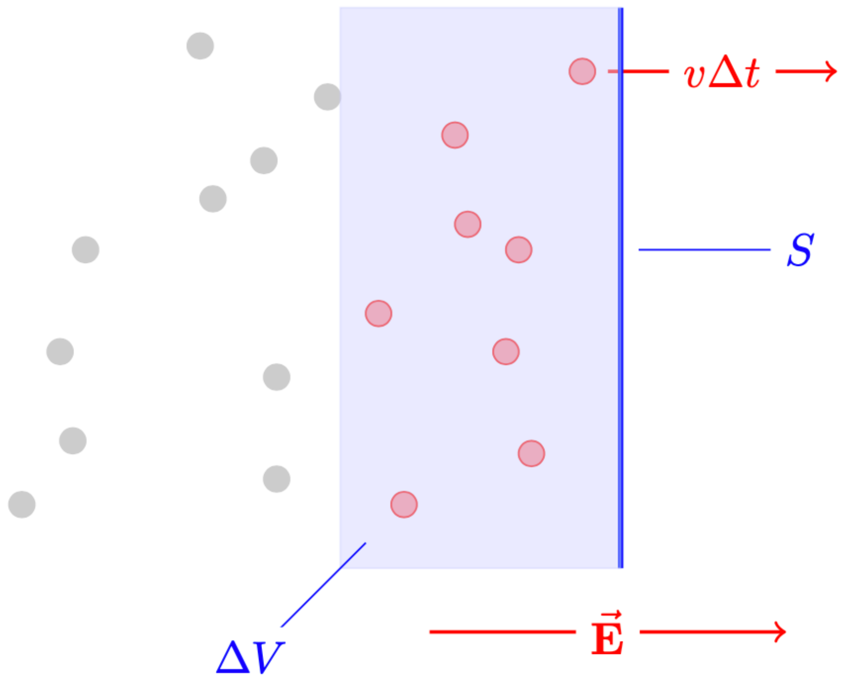
C'EST UNE LETTRE GRECQUE

MASSE PARTICULE

$$\frac{\Delta n}{\Delta V}\, m = \eta\, m = \rho$$

DENSITE DE MASSE $[kg/m^3]$

Et calculons le flux…



$$\text{Flux} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \underbrace{\eta\ v}_{E}\ S = E\ S$$

DENSITE DE FLUX

$$\rho = m\,\underbrace{\frac{\Delta n}{\Delta V}}_{\eta}$$

C'EST UNE LETTRE GRECQUE

$\eta \neq n$

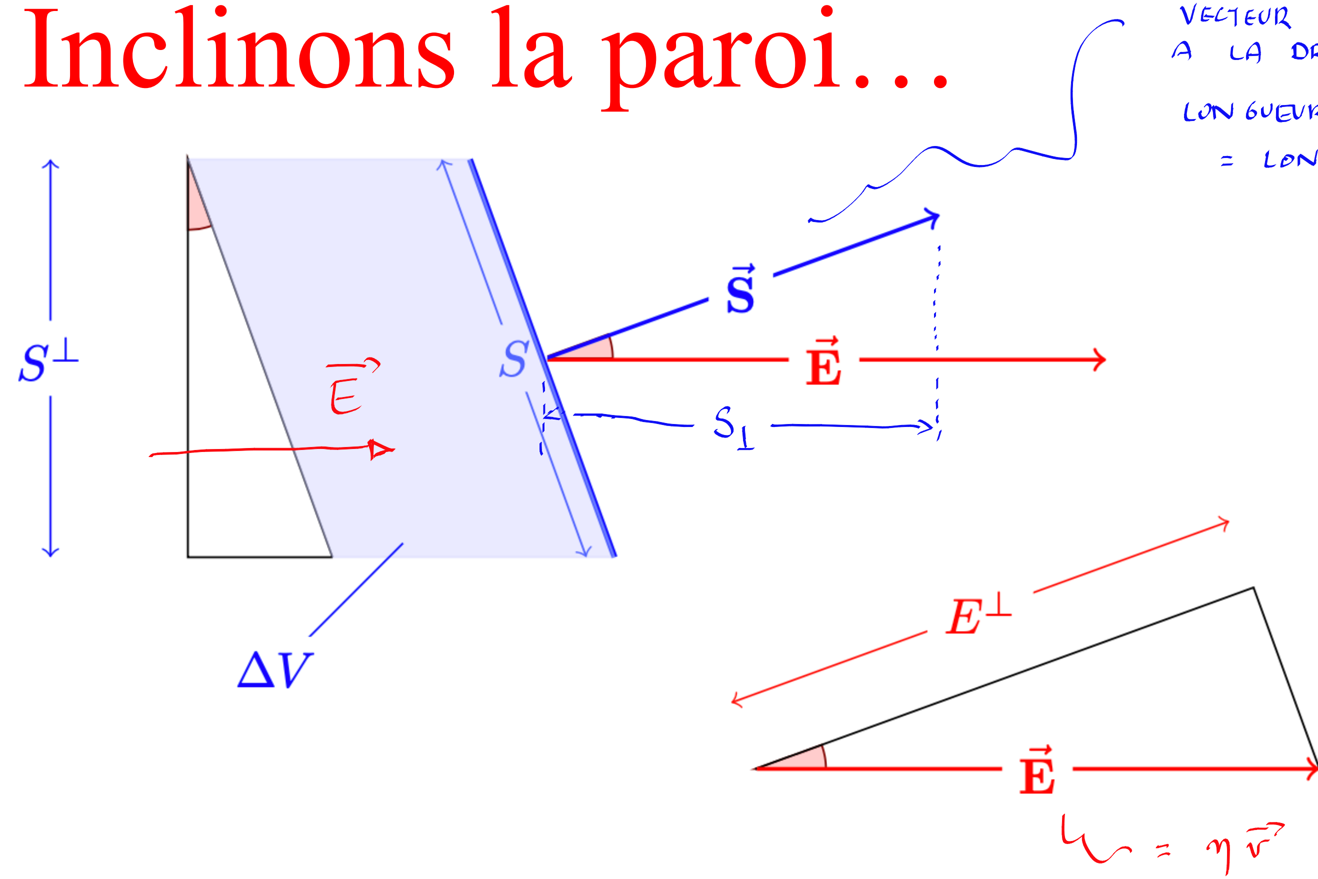
ETA

LE "N" DE NOMBRE :-)

Inclinons la paroi…

Vecteur normal à la droite/au plan S

Longueur du vecteur = longueur/surface de S

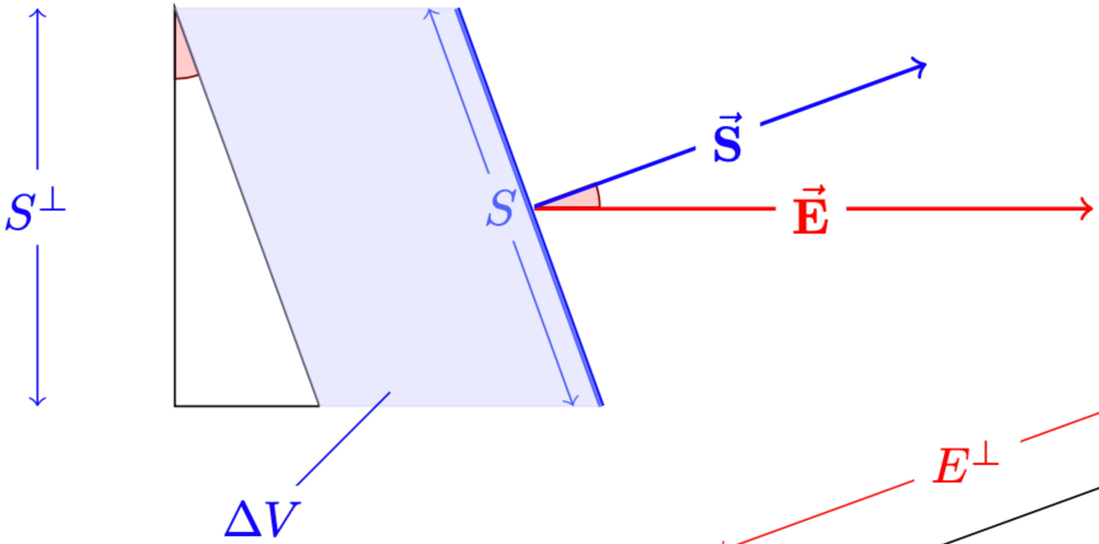


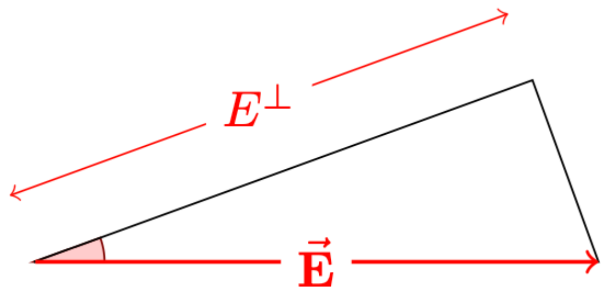
$$\text{Flux particules} = E\,\underbrace{S\cos\theta}_{S_\perp} = \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{S}}_{\text{produit scalaire}} = E\,S^{\perp} = E^{\perp} S$$

Ne pas mettre de point ici !

Dimitri !!!

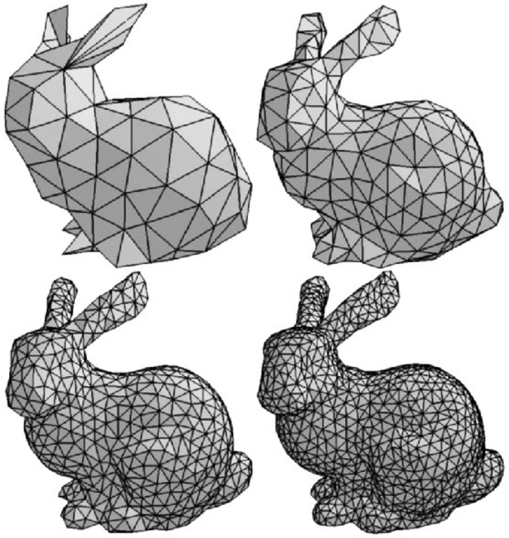
Inclinons la paroi…





$$\text{Flux} = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{S}} = E\ S\cos(\theta) = E\ S^\perp = E^\perp S$$

Et le flux à travers une surface quelconque…



$$\text{Flux} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \Delta\vec{\mathbf{S}}_i$$

En considérant un nombre indénombrable de toutes petites surfaces infinitésimales...

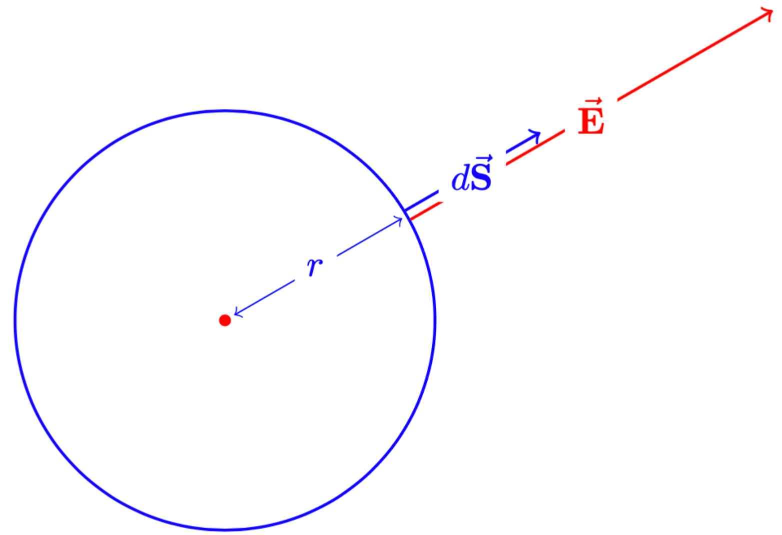
$$= \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \underbrace{d\vec{\mathbf{S}}}_{\vec{n}\; dS}$$

Sur la sphère c'est évident…

$$\text{Flux} = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{S}$$

$$= \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\,\frac{q}{\cancel{r^2}}\,\underbrace{\oint_S dS}_{\cancel{4\pi r^2}}$$

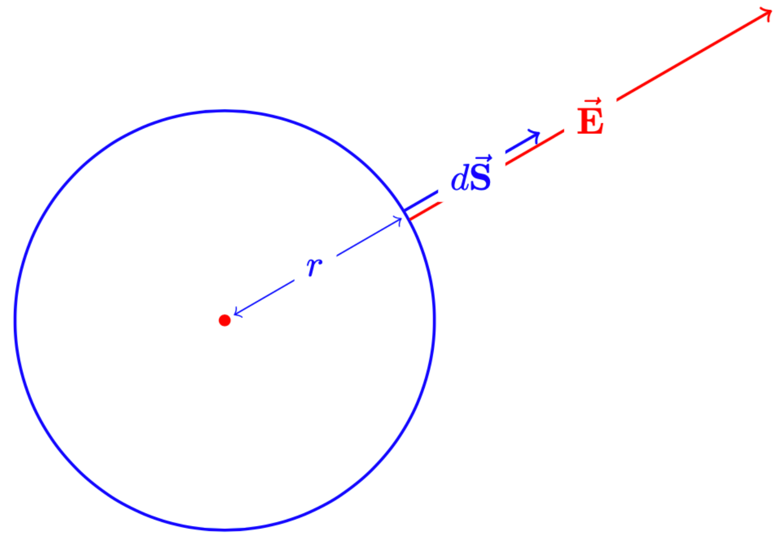
$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

La démonstration du théorème de Gauss !

Sur la sphère c'est évident…



$$\text{Flux} = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

En observant que le vecteur $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{q}{r^2}\,\vec{\mathbf{e}}_r$ et est normal à la sphère

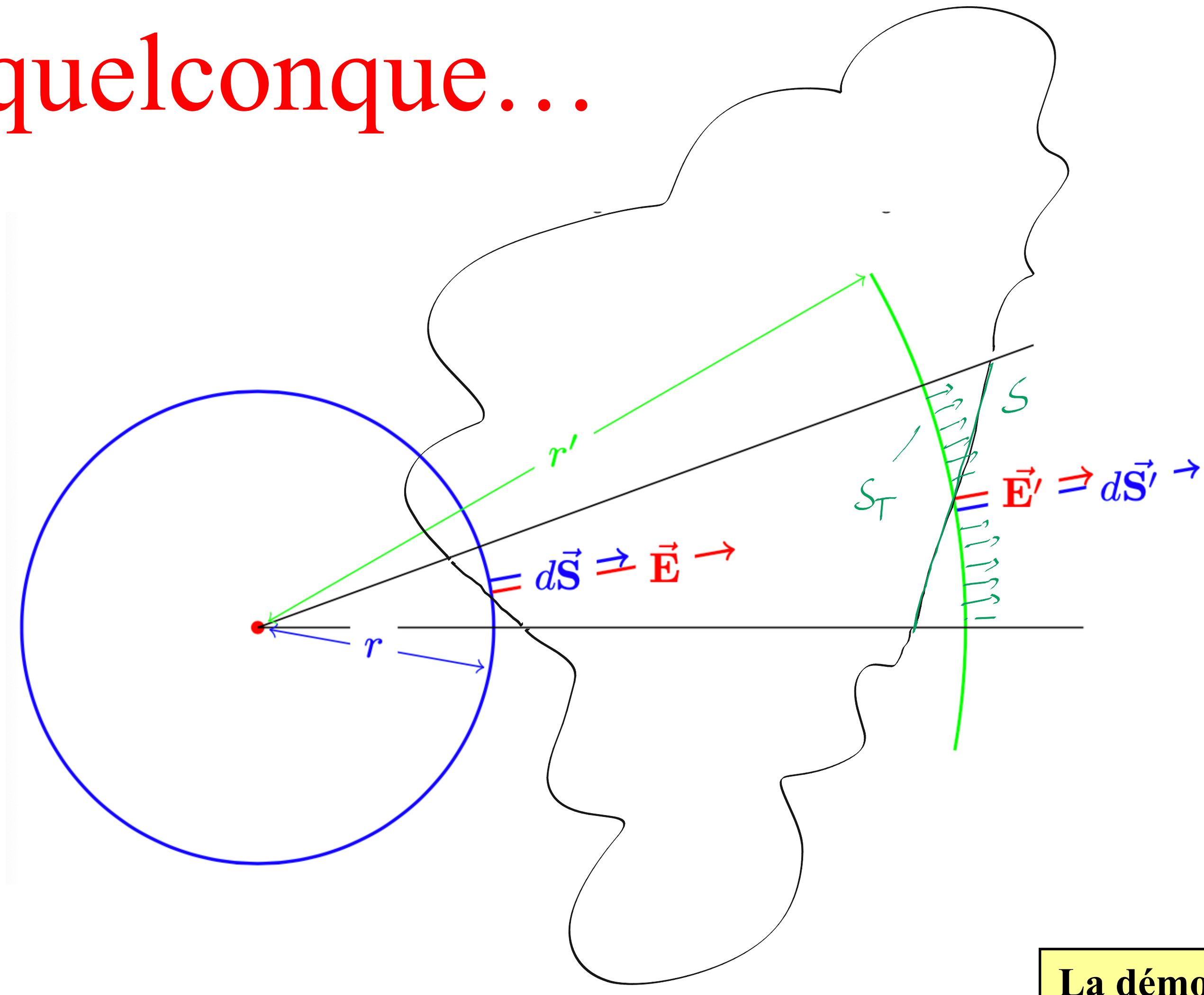
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\int_S dS$$

Et tenant compte que $\int_S dS$ est la surface de la sphère !

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

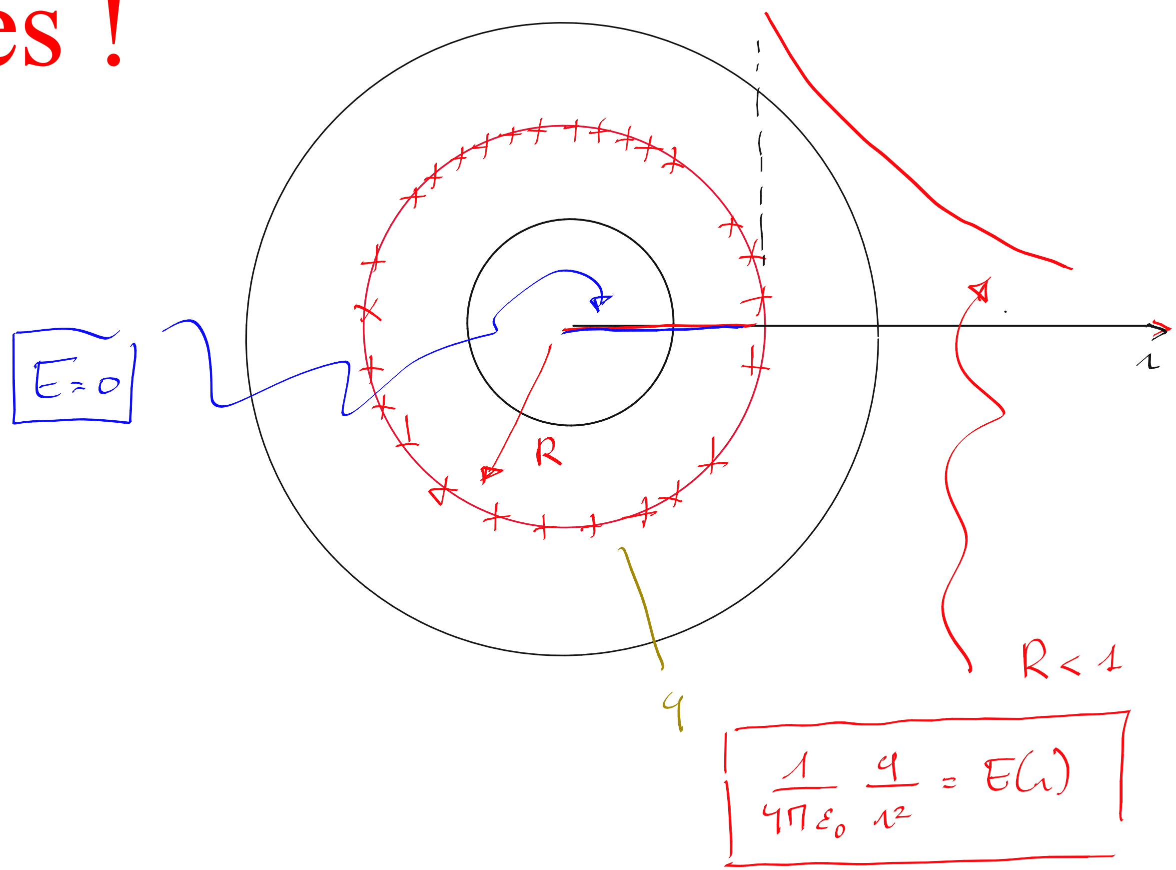
La démonstration du théorème de Gauss !

Et sur une surface quelconque…

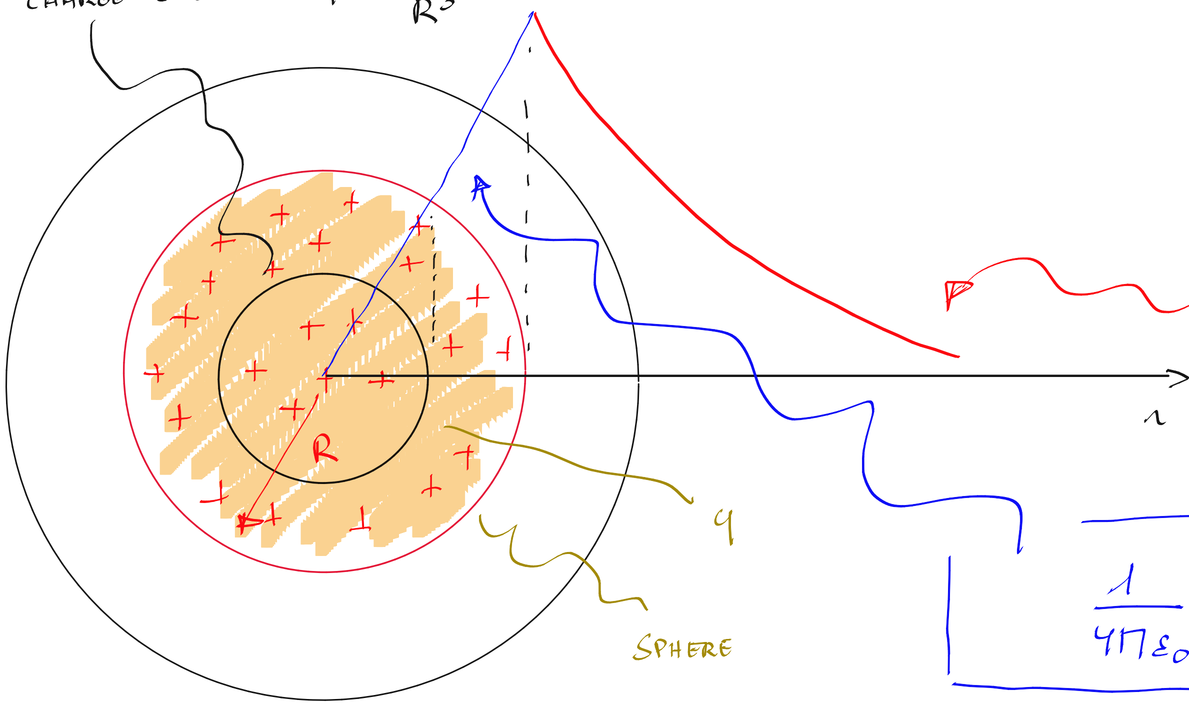


La démonstration du théorème de Gauss !

Les classiques applications usuelles !

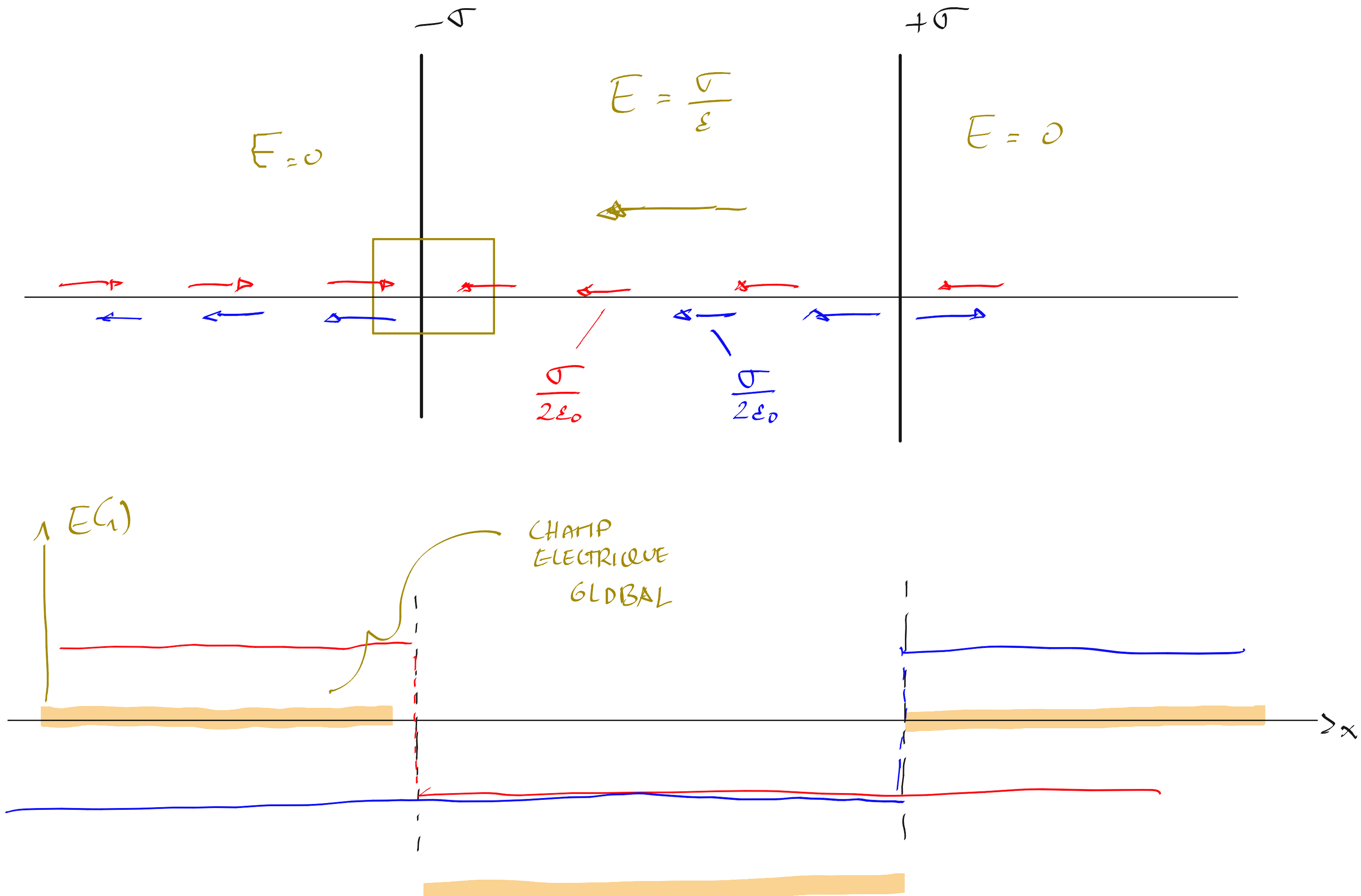


r :-)
CHARGE ENCLOBEE $q' = \frac{q r^3}{R^3}$



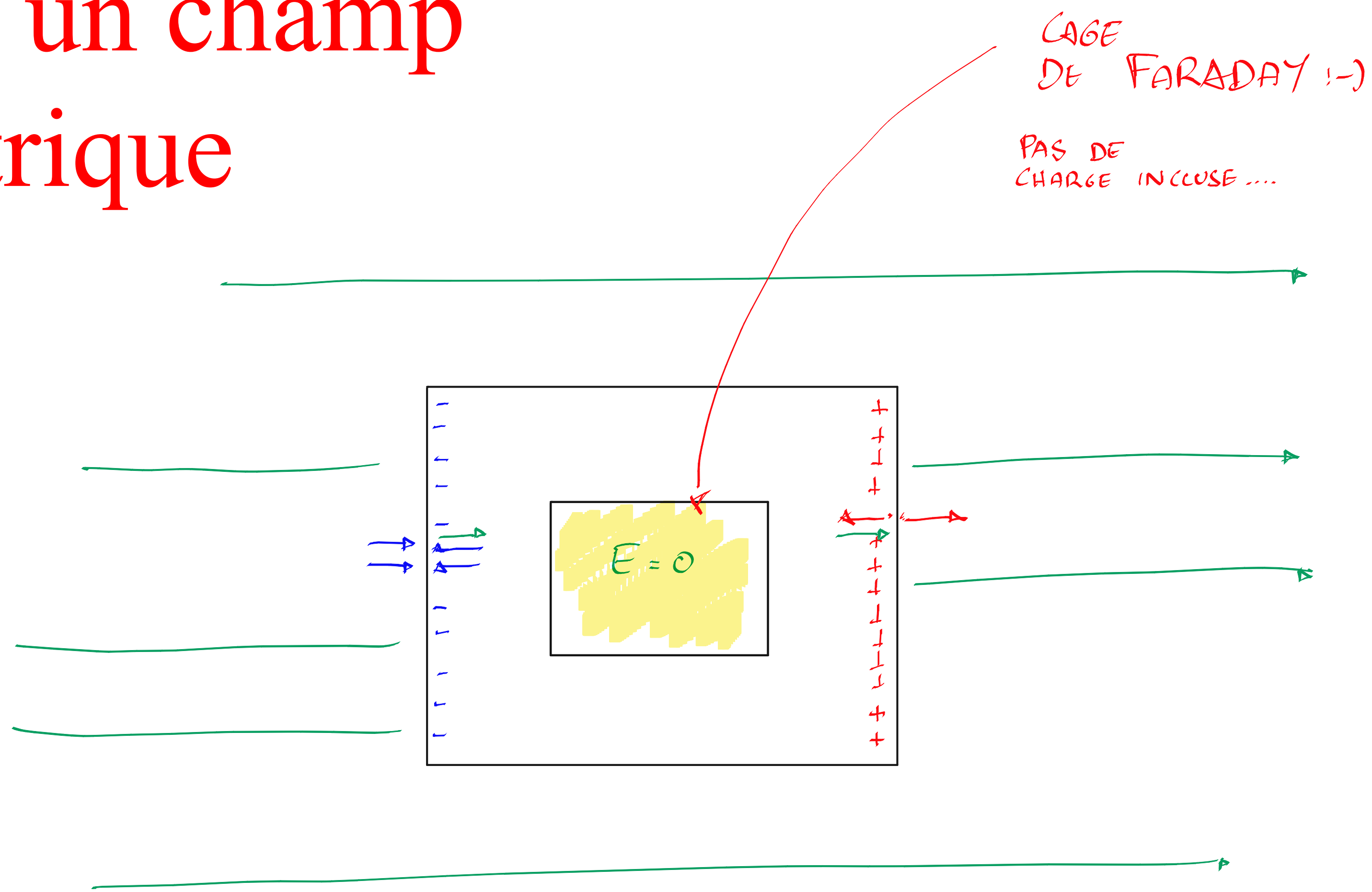
$$\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = E(r)}$$

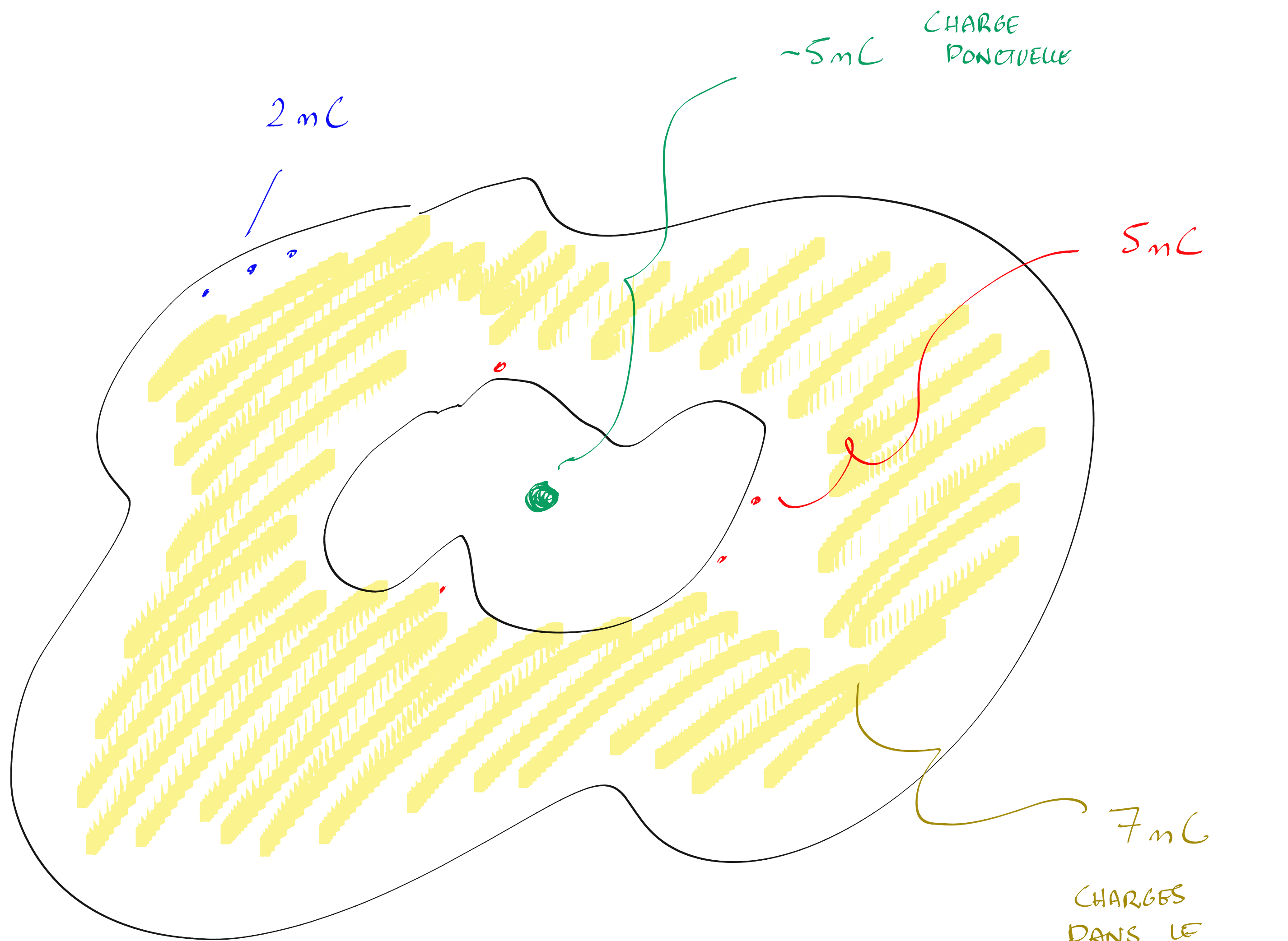
$$\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q r}{R^3} = E(r)}$$



$-\sigma$
$+\sigma$
$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$
$E = 0$
$E = 0$
$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
$E(x)$
CHAMP ELECTRIQUE GLOBAL
x

Un conducteur dans un champ électrique





2 mC
-5 mC
CHARGE PONCTUELLE
5 mC
7 mC
CHARGES DANS LE CONDUCTEUR

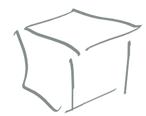
Forme locale du théorème de Gauss

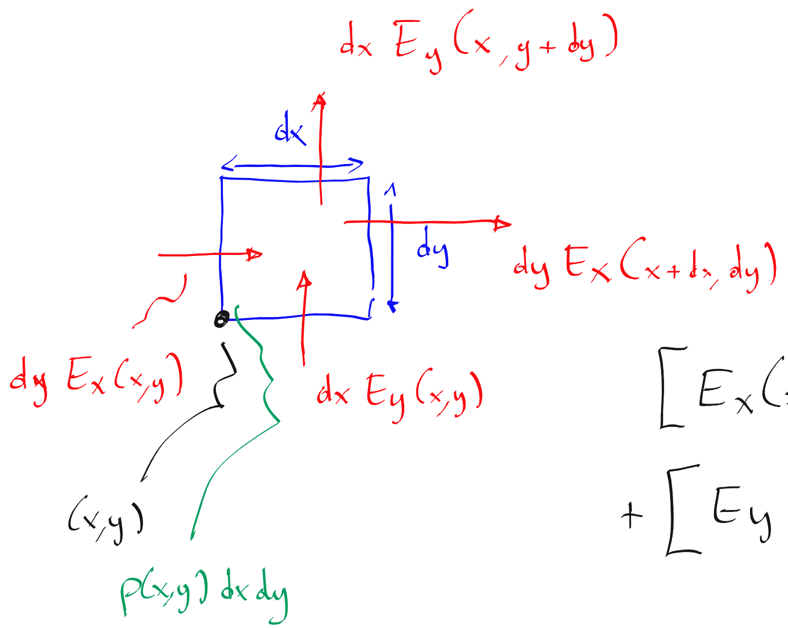
EN 2D [C/m²]

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\int_\Omega \rho \, dV}_{q}$$

2D

J'AURAIS PU ECRIRE σ :-)



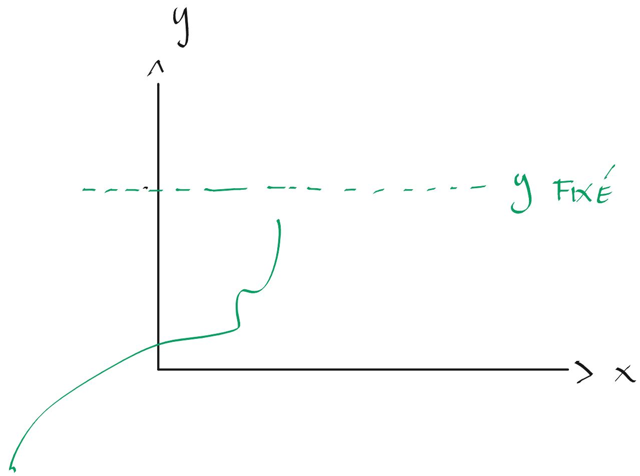


$$\left[E_x(x+dx, y) - E(x,y)\right] dy$$

$$+ \left[E_y(x, y+dy) - E(x,y)\right] dy = \rho \, dx \, dy$$

$E_x(x,y)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & & E_x(x,y) \end{array}$$



$$\underbrace{E_x^y(x)}_{f(x)} = E_x(x,y)$$

$$f'(x) \triangleq \frac{\partial E_x(x,y)}{\partial x}$$

Un petit mot d'analyse pour anticiper ce que François va vous raconter !

Forme locale du théorème de Gauss

$$\boxed{\oint_{\partial\Omega} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad = \quad \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho \, dV}$$

$$\Big[E_x(x+dx,y) - E_x(x,y)\Big]dy + \Big[E_y(x,y+dy) - E_y(x,y)\Big]dx \quad = \quad \frac{\rho}{\epsilon_0}\, dx\, dy$$

En divisant par $dx\ dy$!

$$\frac{E_x(x+dx,y) - E_x(x,y)}{dx} + \frac{E_y(x,y+dy) - E_y(x,y)}{dy} \quad = \quad \frac{\rho(x,y)}{\epsilon_0}$$

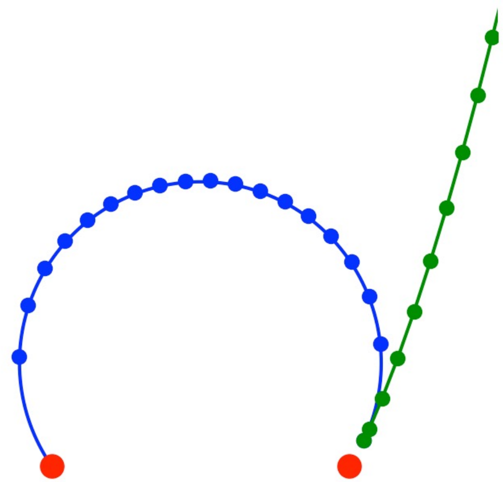
En faisant tendre dx et dy vers zéro !

EN 1D :-)

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad :-)$$

$$\boxed{\frac{\partial E_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y)}{\partial y} \quad = \quad \frac{\rho(x,y)}{\epsilon_0}}$$

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \;=\; \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$



- **Le flux électrique est une mesure de l'écoulement du champ électrique à travers une surface.**

- **Le flux sortant à travers une surface fermée est proportionnelle aux charges englobées par la surface.**

- **Les lignes des champs électrique ou gravitationnel ne sont quasiment jamais des trajectoires !**