UCLouvain

École polytechnique de Louvain

LEPL1201
Cours 4 : Loi de Gauss

Enseignant: **D. Lederer**

Année académique 2023-24

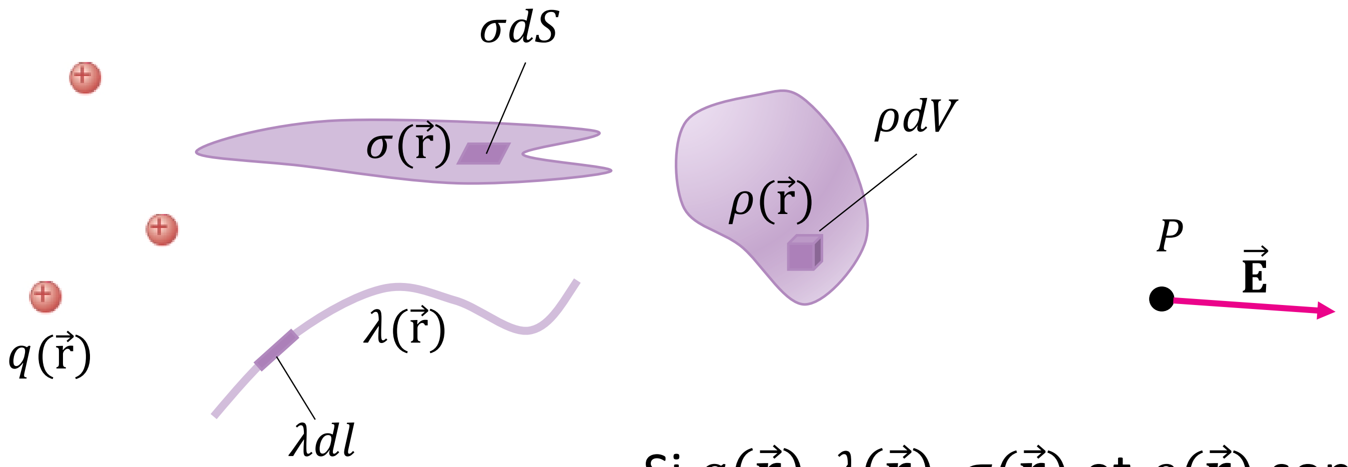
Agenda LEPL1201

S2	Mardi 26/9	**Cours 1** : **Unités, vecteurs, cinématique** + APP le jeudi
S3	Mardi 3/10	**Cours 2** : **Lois de Newton et gravité** (I) + APP le jeudi
S4	Mardi 10/10	**Cours 3** : **Force de Coulomb** + APP le jeudi
S5	Mardi 17/10	**Cours 4** : **Loi de Gauss** + APP le jeudi
S6	Mardi 24/10	**Cours 5** : **Forces de frottement** (and co) + APP le jeudi
S7	Mardi 31/10	**Cours 6 : Travail, énergie, puissance** + APP le jeudi + **Devoir Python**
S8	Mardi 7/11	**Cours 7** : **Potentiel électrique et moments** + APP le jeudi
S9	Mardi 14/11	**Cours 8** : **Capacités et diélectriques** + APP le jeudi + **LABO 1**
S10	Mardi 21/11	**Cours 9** : **Mouvements circulaires** + APP le jeudi
S11	Mardi 28/11	**Cours 10** : **Mécanique des corps rigides** + APP le jeudi
S12	Mardi 5/12	**Cours 11** : **Courant électrique et résistance** + APP le jeudi
S13	Mardi 12/12	**Cours 12** : **Circuit RC** + APP le jeudi
S14		**LABO 2**

Agenda Cours 3

1. Introduction
2. Notion de flux et de flux électrique
3. Loi de Gauss
4. Applications de la loi de Gauss
5. Charges sur les conducteurs

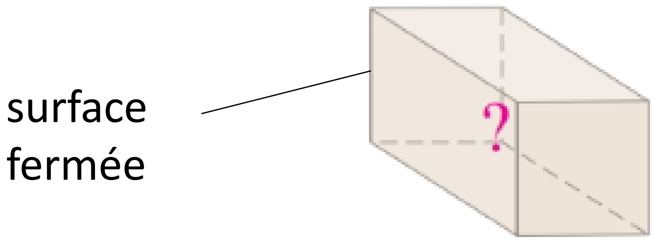
Introduction

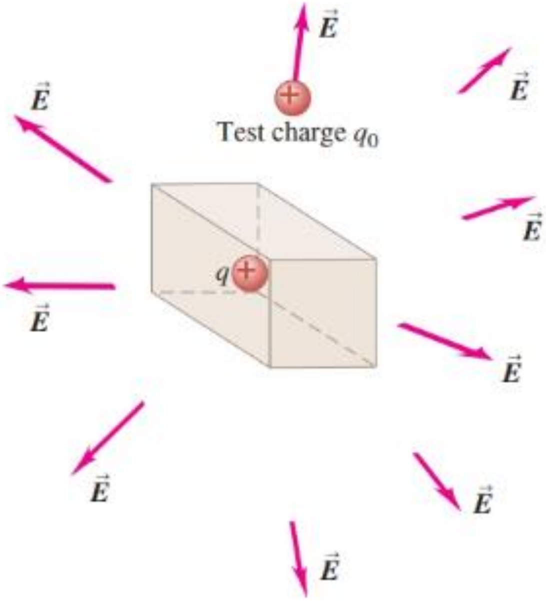


Si $q(\vec{\mathbf{r}}), \lambda(\vec{\mathbf{r}}), \sigma(\vec{\mathbf{r}})$ et $\rho(\vec{\mathbf{r}})$ sont connues, on peut calculer $\vec{\mathbf{E}}$ en tout point *P*.

Question: si l'on connaît $\vec{\mathbf{E}}$ dans une certaine région de l'espace, peut-on en déduire la distribution de charge dans cette région ou ailleurs?

Charge inconnue dans une boite



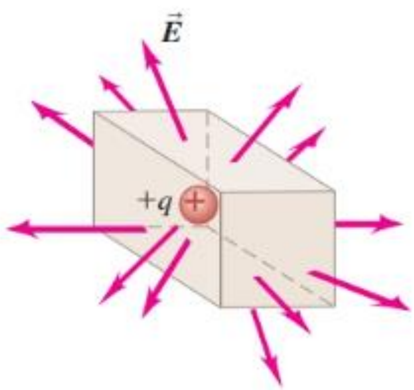


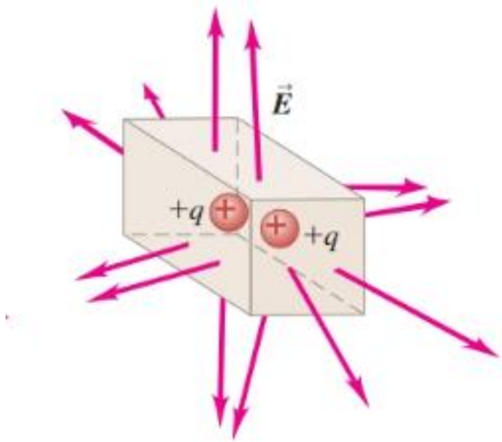
- Comment déterminer ce qu'il y a dans la boite?
- On peut faire une cartographie de $\vec{\mathbf{E}}$ dans l'espace en promenant q_0, et de là, determiner q. Ici, ok car une seule charge et champ radial.

Charge inconnue dans une boite

- En fait, on peut déterminer le contenu (en terme de charges) en ne mesurant uniquement que le champ $\vec{\mathbf{E}}$ sur les parois de la boite. On va le démontrer dans les prochains slides.

- Assez trivial pour une charge unique, car champ purement radial





- Beaucoup moins intuitif lorsque l'on a plusieurs charges dans la boite

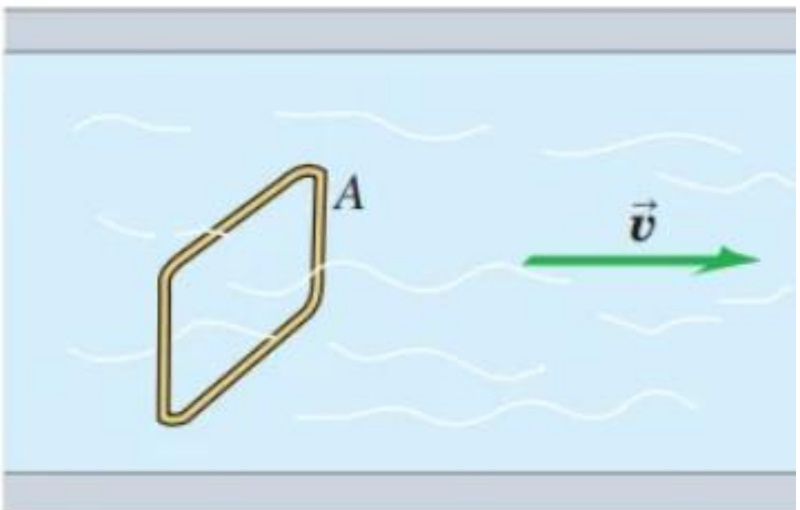
Agenda Cours 3

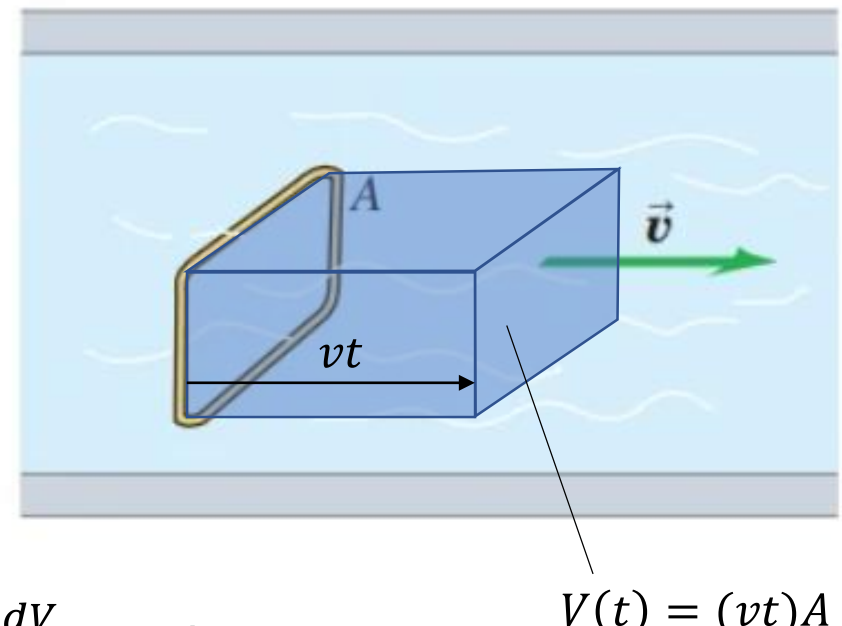
1. Introduction
2. Notion de flux et de flux électrique
3. Loi de Gauss
4. Applications de la loi de Gauss
5. Charges sur les conducteurs

Notion de flux d'un fluide (1)

- Flux d'un fluide: le flux est un **taux d'écoulement (débit) à travers une surface A:**

Durant un temps $t > 0$:





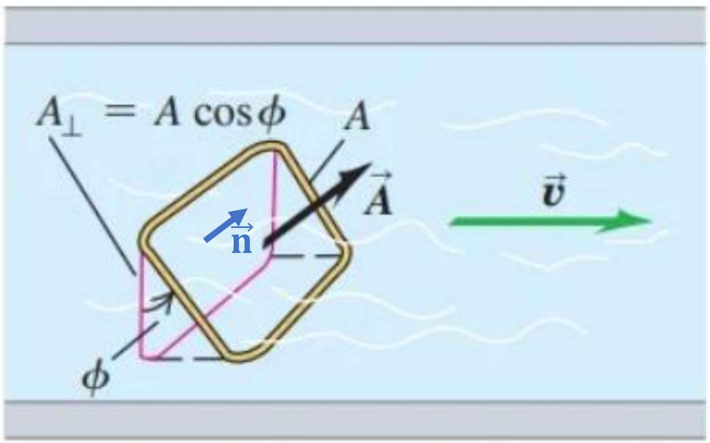
Flux: $\Phi = \frac{dV}{dt} = vA$

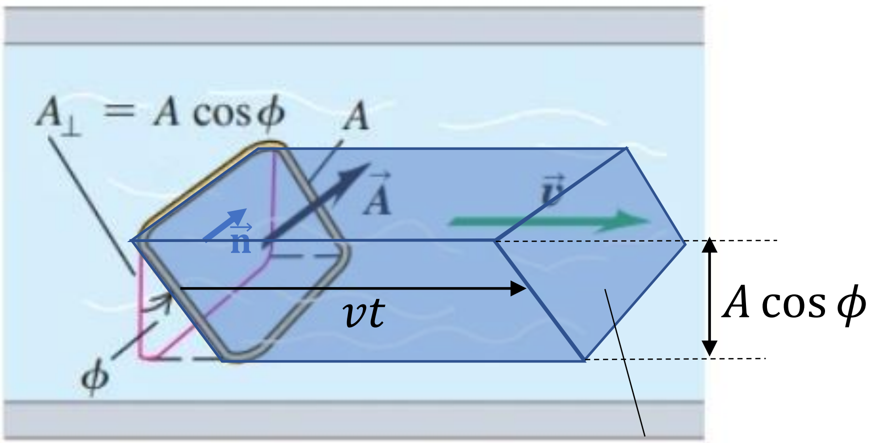
- Le flux d'un fluide (ou débit) est proportionnel à v et A !

Notion de flux d'un fluide (2)

- Si la surface **n'est pas perpendiculaire** au mouvement:

Durant un temps $t > 0$:





$$V(t) = (vt)(A\cos\phi)$$

$$\Phi = \frac{dV}{dt} = vA\cos\phi = vA_\perp$$
$$= \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}}A$$

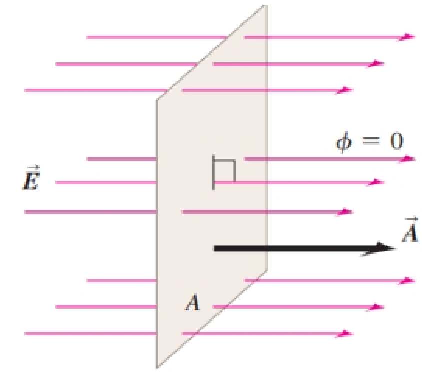
où $\vec{\mathbf{A}}$ est un vecteur **normal** à la surface et dont la norme est A

- Le flux a un sens !

Flux d’un champ E uniforme (1)

- On peut aussi définir la notion de **flux** associé à un **champ vectoriel**
- Exemple: **flux électrique**
- **Notation**: Φ_E

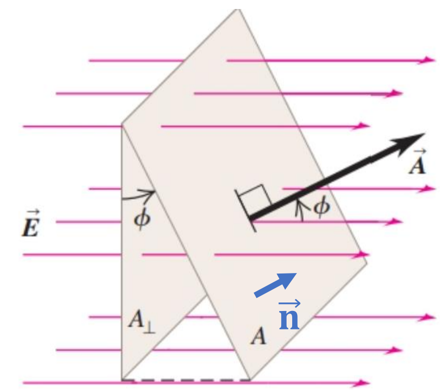
$$\Phi_E = EA$$



- Si la surface **n’est pas perdendiculaire** à $\vec{\mathrm{E}}$

$$\Phi_E = EA\cos\phi = EA_{\perp}$$

$$\Phi_E = EA\cos\phi = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}}A$$



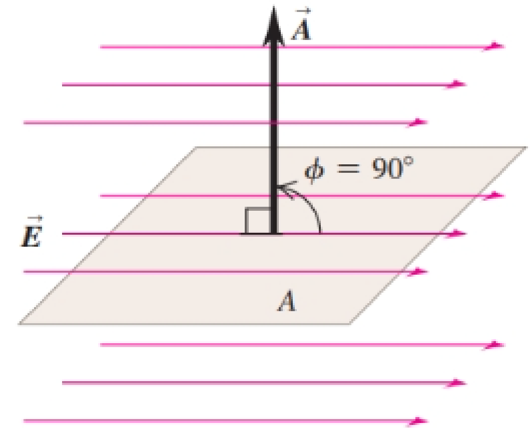
- le **flux** du champ électrique est **proportionnel** à E et A !

Flux d'un champ E uniforme (2)

Cas particuliers:

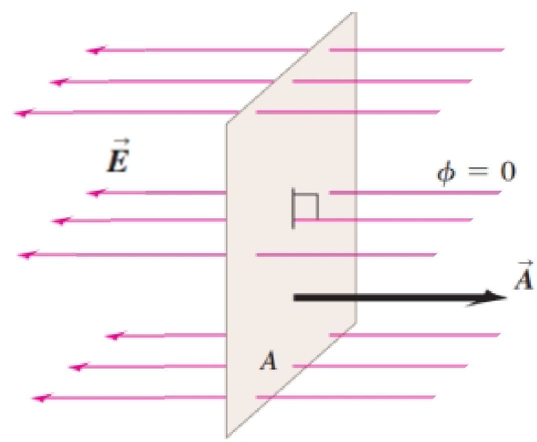
- $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{A}}$ **perpendiculaires**:

  $\Phi_S = EA\cos\phi = \vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{A}} = 0$

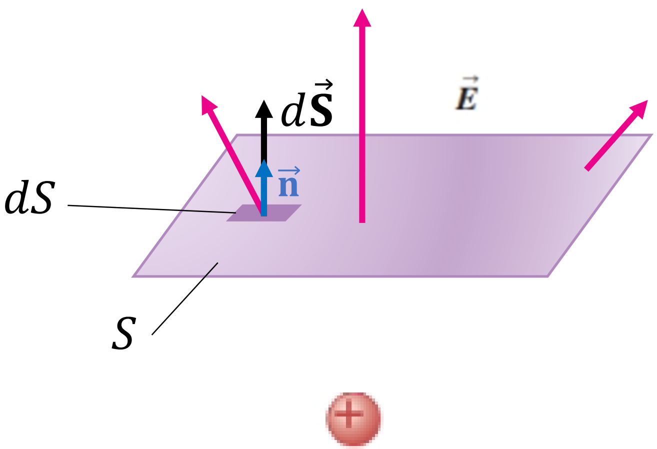


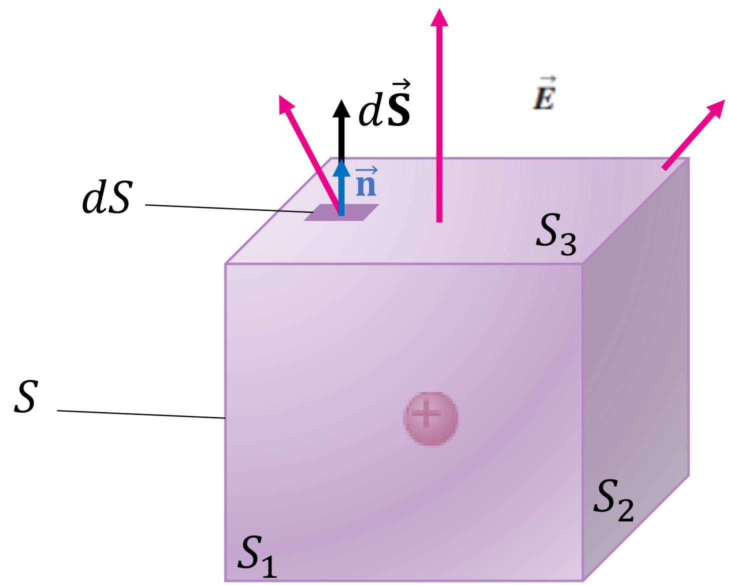
- $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{A}}$ **anti-parallèles**

  $\Phi_S = EA\cos\phi = \vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{A}} = -EA$



Et si le champ n'est pas uniforme?





NB: pour une surface **fermée**, on choisit en général $\vec{\mathbf{n}}$ sortant

- On **décompose** la surface en éléments de surface dS,
  et on définit: $d\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{n}} dS$

- **Flux traversant** S obtenu par une **intégrale de surface**: $\Phi_S = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$

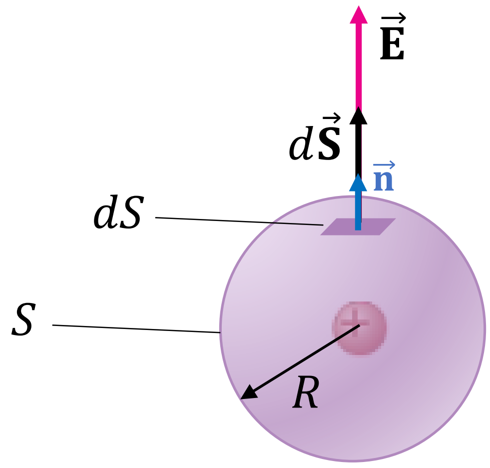
- Si la surface est **fermée** et formée de ***N*** **parties**:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_{S_1} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} + \ldots \int_{S_N} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N$$

Agenda Cours 3

1. Introduction
2. Notion de flux et de flux électrique
3. Loi de Gauss
4. Applications de la loi de Gauss
5. Charges sur les conducteurs

Cas du flux sortant d'une sphère



$\vec{\mathbf{n}}$, $d\vec{\mathbf{S}}$, et $\vec{\mathbf{E}}$ tous alignés !
(quelle que soit $d\vec{\mathbf{S}}$)

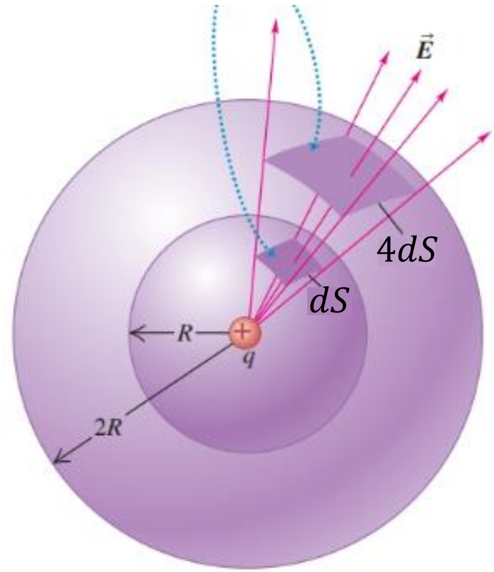
=> Φ_E se calcule facilement

- $\Phi_E = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \int_S E dS = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} dS$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} \int_S dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} (S) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} (4\pi R^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

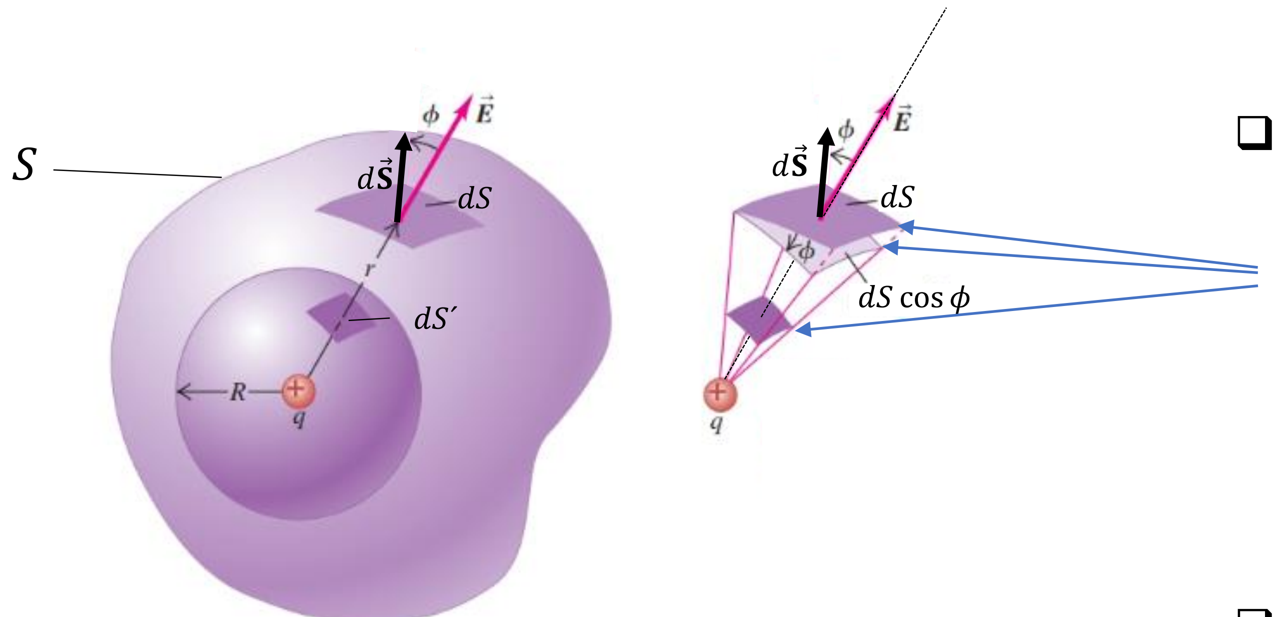
- Φ_E **ne dépend pas** de R

Interprétation par lignes de champ



- dS et $4dS$ sont vues sous un **même « angle »** par q
- Comme $\vec{\mathbf{E}}$ est **radial**, chaque **ligne de champ** traversant dS traverse aussi $4dS$
- Les **flux** traversant dS et $4dS$ sont donc **identiques**
- Les **flux** traversant les deux sphères sont donc **identiques** également

Et si la surface est irrégulière ?



- Le flux $d\Phi_S$ qui traverse **les trois surfaces** est identique:

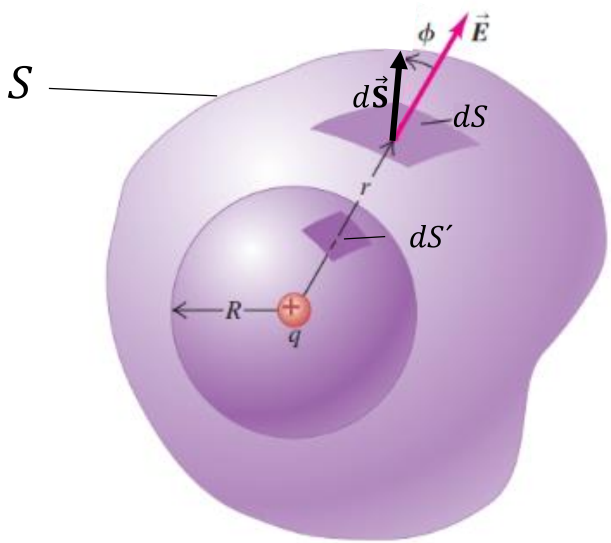
$$d\Phi_S = EdS\cos\phi$$

- Vrai pour $\forall\, dS \in S$

- Le flux traversant S est donc égal au flux traversant la sphère:

$$\Phi_S = \oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \oint_{sphère} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}\,' = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Et si la surface est irrégulière ?

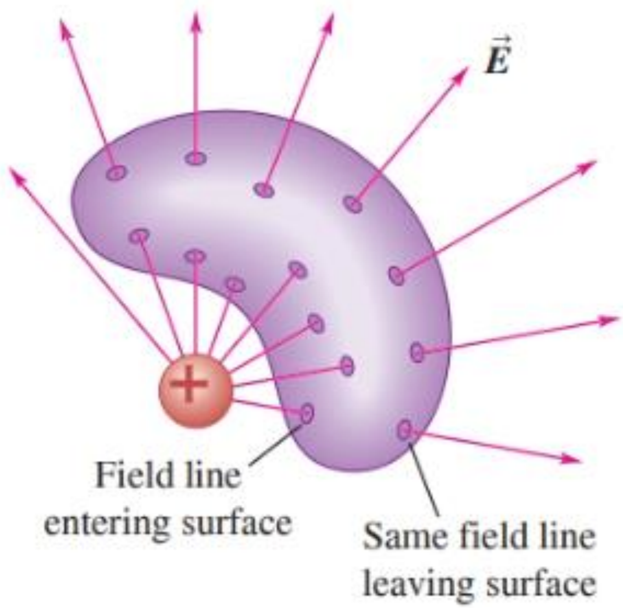


- $\Phi_{\mathrm{E}} = \oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$
- Vrai pour toute surface **fermée** entourant q
- si $q < 0$:

$\vec{\mathbf{E}}$ orienté **vers** la charge (flux entrant)

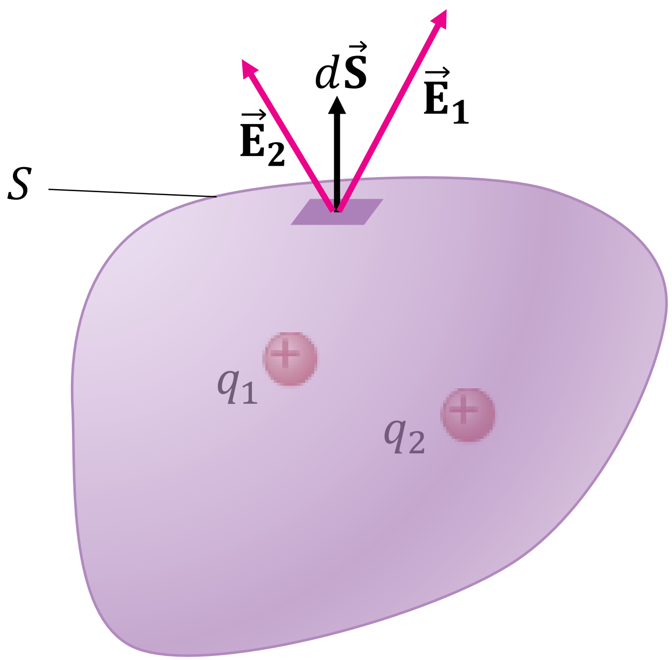
$\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} < 0$ => $\Phi_{\mathrm{E}} = \frac{q}{\varepsilon_0} < 0$

Et si la charge comprise dans la surface fermée est nulle ?



- $\Phi_{\mathrm{E}} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0$
- Interprétation en termes de **lignes de champ**:
  - chaque ligne de champ qui pénètre dans S doit **nécessairement** en ressortir si S ne contient aucune charge
  - Flux entrant = flux sortant
  - Flux total = 0

Et si j'ai plusieurs charges dans S ?



- Exemple à **deux charges**
- A **chaque élément** dS, on peut associer:

$$d\Phi_1 = \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad \text{et}$$
$$d\Phi_2 = \vec{\mathbf{E}}_2 \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

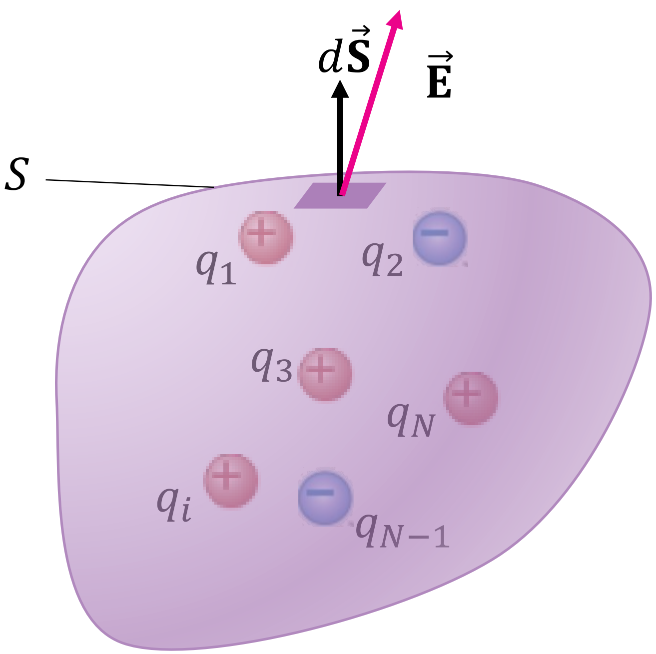
- Par ailleurs, le flux dû au champ **total** se calcule comme suit:

$$d\Phi_S = \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \left(\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2\right) \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$
$$= d\Phi_1 + d\Phi_2$$

- On a donc: $\Phi_S = \oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \oint_S d\Phi_S = \oint_S d\Phi_1 + \oint_S d\Phi_2$

$$= \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0}$$

Loi de Gauss



- ❑ $\Phi_S = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N$

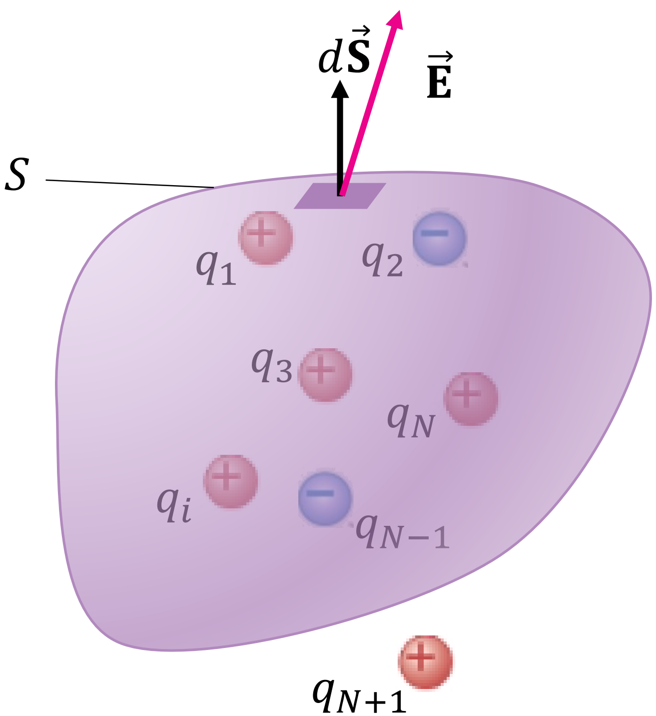
$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \cdots + \frac{q_N}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

où Q_{enc} représente la **charge totale** incluse à **l'intérieur** de S

- ❑ Vrai pour **toute distribution de charge** et pour **toute surface S fermée**

Théorème de Gauss



- ❑ $\Phi_{\mathrm{E}} = \Phi_{\mathrm{E}1} + \Phi_{\mathrm{E}2} + \cdots + \Phi_{\mathrm{E}N}$

$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \cdots + \frac{q_N}{\varepsilon_0}$$

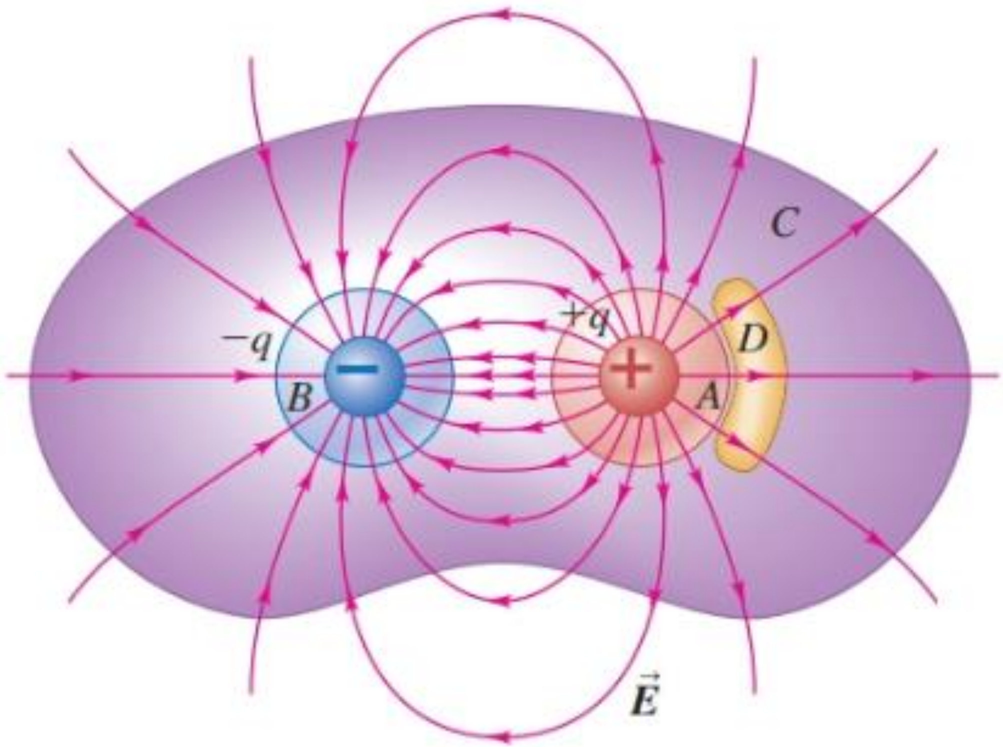
$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

où Q_{tot} représente la **charge totale** incluse à **l'intérieur** de S

- ❑ Vrai pour **toute distribution de charge** et pour **toute surface** S **fermée**
- ❑ Les charges **à l'extérieur** de S **ne doivent pas être prises en compte** dans l'expression de la loi de Gauss

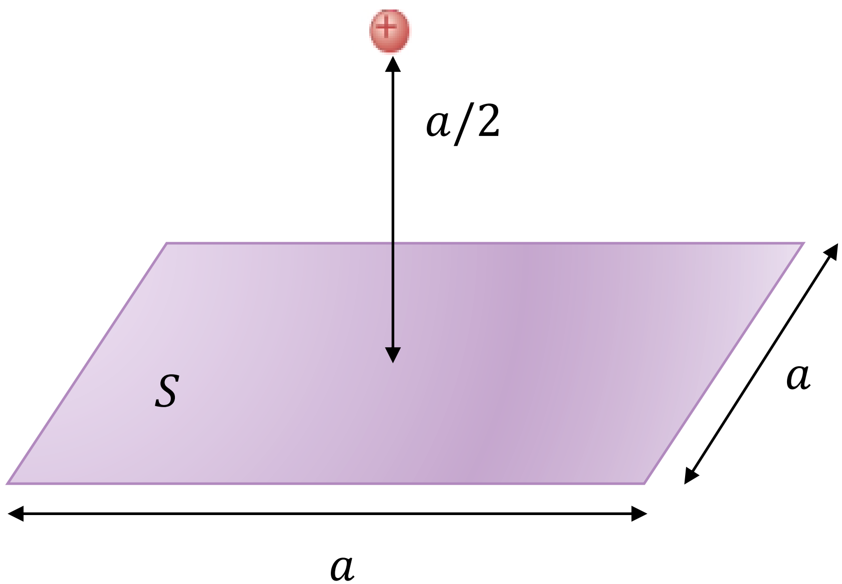
Exemples (1)

- Que valent $\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C, \Phi_D$?



Exemples (2)

- Que vaut Φ_S?



Agenda Cours 3

1. Introduction
2. Notion de flux et de flux électrique
3. Loi de Gauss
4. Applications de la loi de Gauss
5. Charges sur les conducteurs

Applications

Loi de Gauss

Distribution de charge connue

Champ électrique connu pour des cas simples (ex: symétrie, conducteurs, …)

Méthodologie pour calculer le champ électrique:

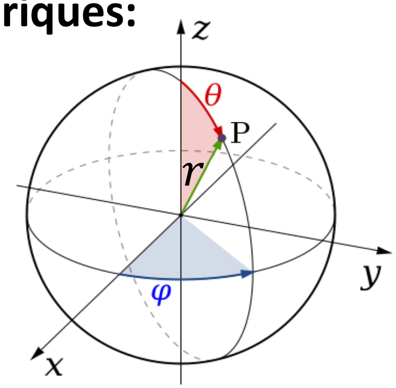
1/ on fait des **hypothèses** sur le champ (orientation, constance, …) en fonction de la **géométrie** du problème (symétrie, conducteurs, …)

2/ on choisit une **surface de Gauss** S qui **facilite** le calcul du flux, sur base des hypothèses formulées

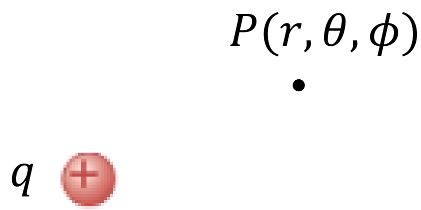
3/ on calcule le flux Φ_S et on applique Gauss

Charge ponctuelle (1)

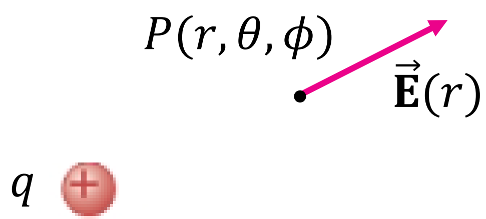
Système de coordonnées sphériques:



- Que vaut $\vec{\mathbf{E}}$ en tout point P?

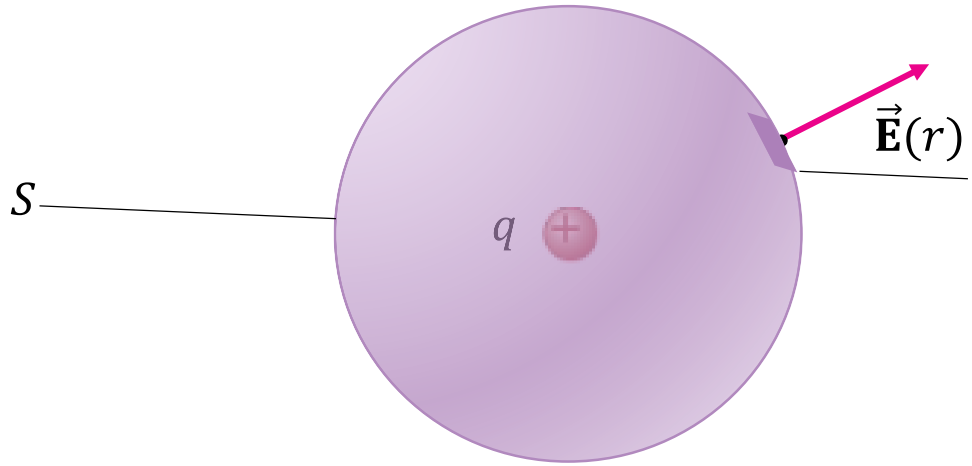


1/ Par symétrie, $\vec{\mathbf{E}}$ doit être **radial** et ne peut **dépendre que** de r

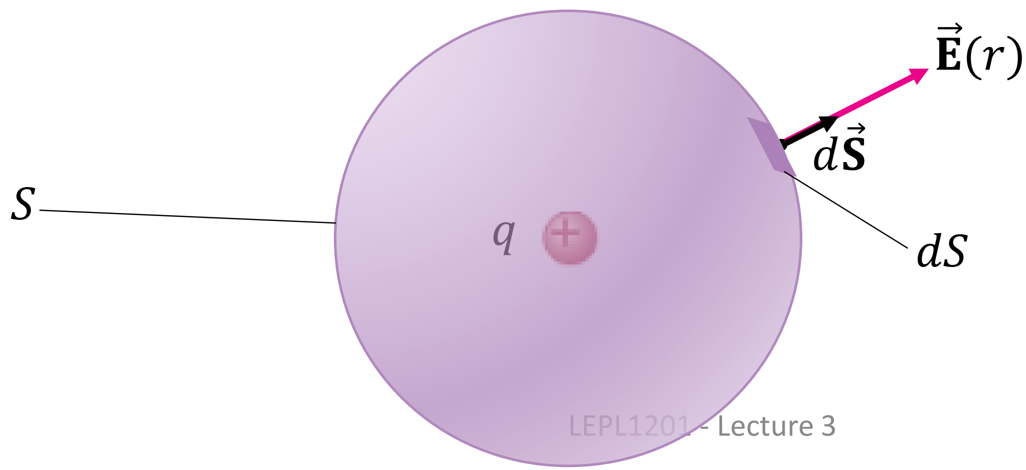


Charge ponctuelle (2)

2/ on choisit une **surface de Gauss** S qui facilite le calcul du flux



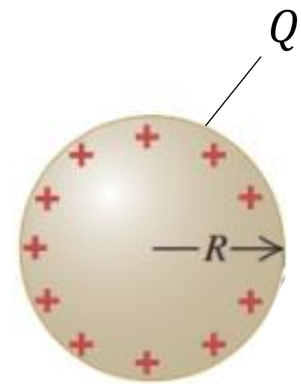
3/ on calcule le **flux** Φ_S et on applique la **loi de Gauss**



$$\Phi_S = 4\pi r^2 E(r)$$
$$= q/\varepsilon_0$$

$$=> E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\mathrm{r}^2}$$

Sphère conductrice chargée (1)



- **Sphère conductrice chargée** par $Q > 0$
- Que vaut $\vec{\mathbf{E}}(r)$ à **l'intérieur** et à **l'extérieur** de la sphère ?

- **Intérieur** ($r < R$) :

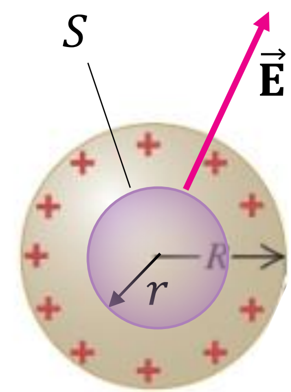
  1/ Par symétrie, $\vec{\mathbf{E}}$ doit être **radial** et ne peut **dépendre que** de r

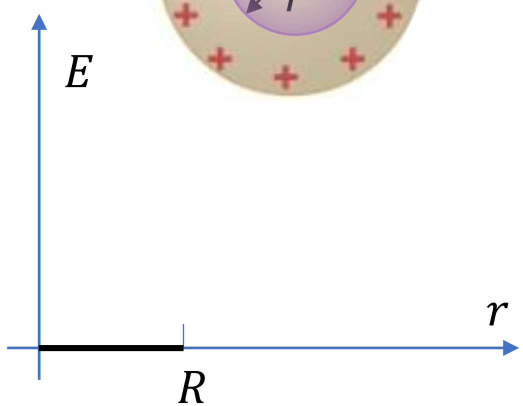
  2/ Choix de S : sphère concentrique t.q. $r < R$

  3/ Calcul du flux: $\Phi_S = E 4\pi r^2$

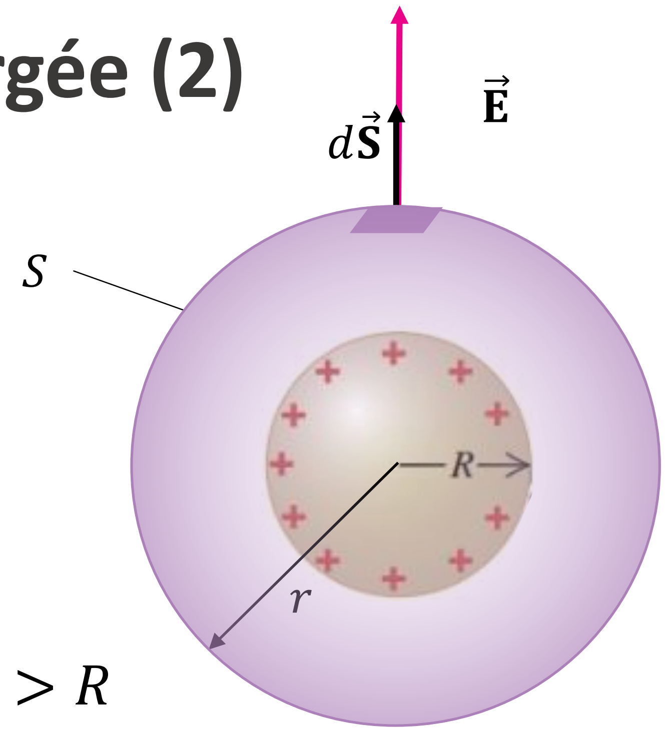
  Par Gauss: $\Phi_S = Q_{enc}/\varepsilon_0 = 0$

  On en déduit donc que $E(r) = 0$ pour $r < R$





Sphère conductrice chargée (2)



- **Extérieur** $(r < R)$:

  1/ Par symétrie, $\vec{\mathbf{E}}$ doit être **radial**

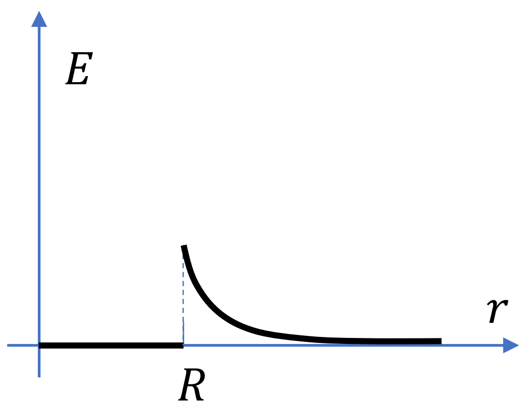
  et ne peut **dépendre que** de r

  2/ Choix de S : sphère concentrique t.q. $r > R$

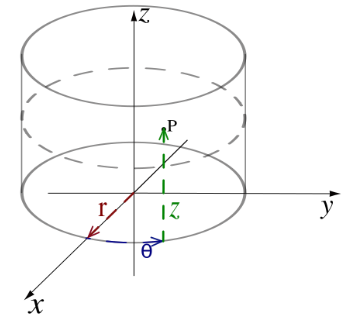
  3/ Calcul du flux: $\Phi_S = E 4\pi r^2$

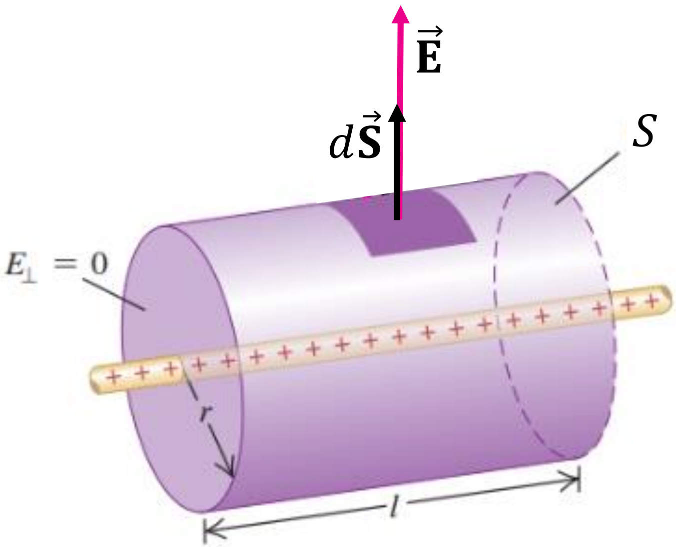
  Par Gauss: $\Phi_S = Q/\varepsilon_0$

  Et donc: $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ pour $r > R$



Fil chargé





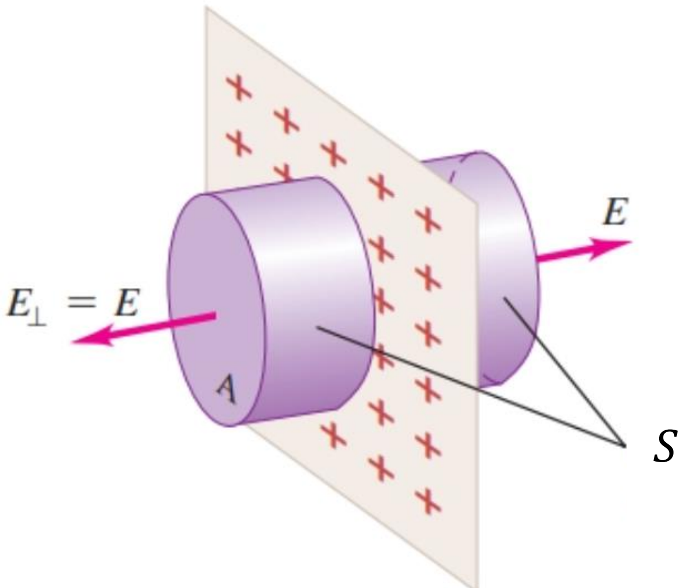
- Que vaut le champ $\vec{\mathbf{E}}$ généré par un fil chargé **uniformément** (λ) et de longueur **infinie** ?

1/ Problème à symétrie **axiale** (fil = axe de symétrie) => $\vec{\mathbf{E}}$ doit être **radial** et ne peut **dépendre que** de r

2/ Choix de S : cylindre centré sur et aligné avec le fil

3/ Calcul du flux: $\Phi_S = El2\pi r = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$

Plan uniformément chargé



- Que vaut le champ $\vec{\mathbf{E}}$ généré par un plan chargé **uniformément** (σ) de surface **infinie** ?

1/ Le plan chargé est un plan de **symétrie** => $\vec{\mathbf{E}}$ doit être ⊥ au plan

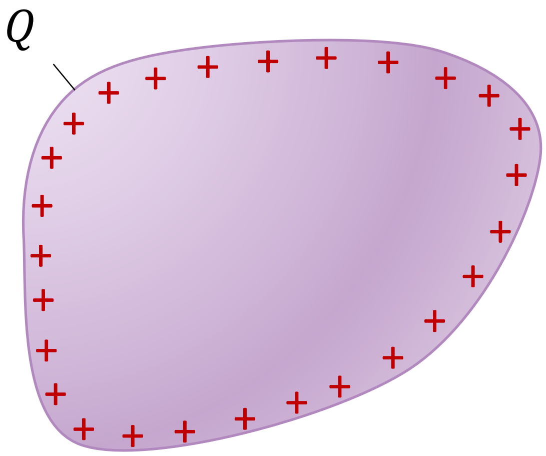
2/ Choix de S : un cylindre dont la base est // au plan, et traversant le plan

3/ Calcul du flux: $\Phi_S = 2EA = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

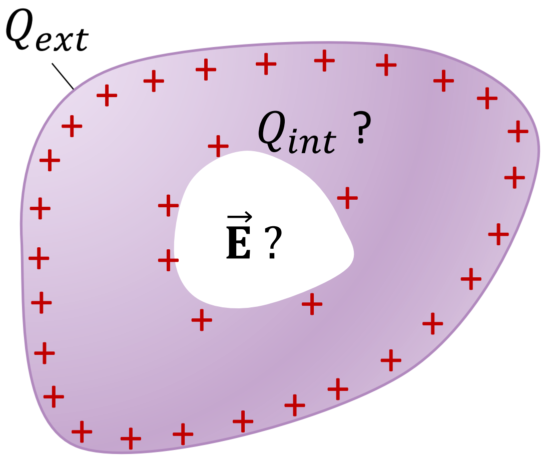
Agenda Cours 3

1. Introduction
2. Notion de flux et de flux électrique
3. Loi de Gauss
4. Applications de la loi de Gauss
5. Charges sur les conducteurs

Charges et conducteurs creux (1)

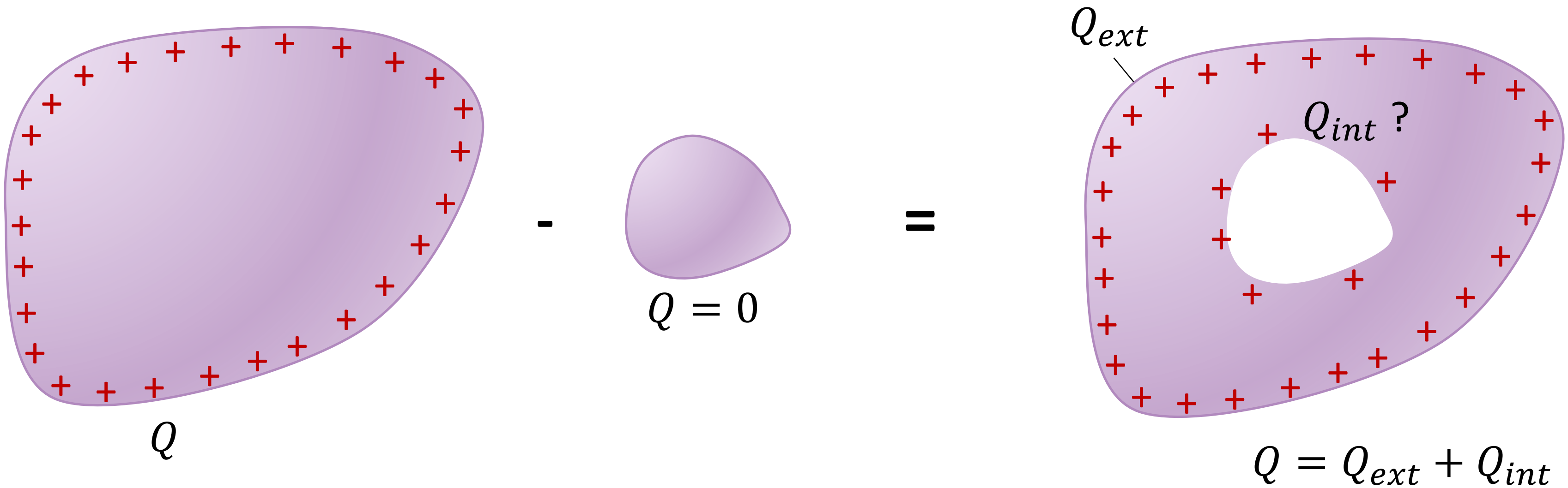


- A **l'intérieur** d'un **conducteur chargé à l'équilibre**, $\vec{\mathbf{E}}$ est nul



- Et si le conducteur chargé contient une **cavité**, y a-t-il des charges sur la face intérieure?
- Que vaut $\vec{\mathbf{E}}$ dans la cavité ?

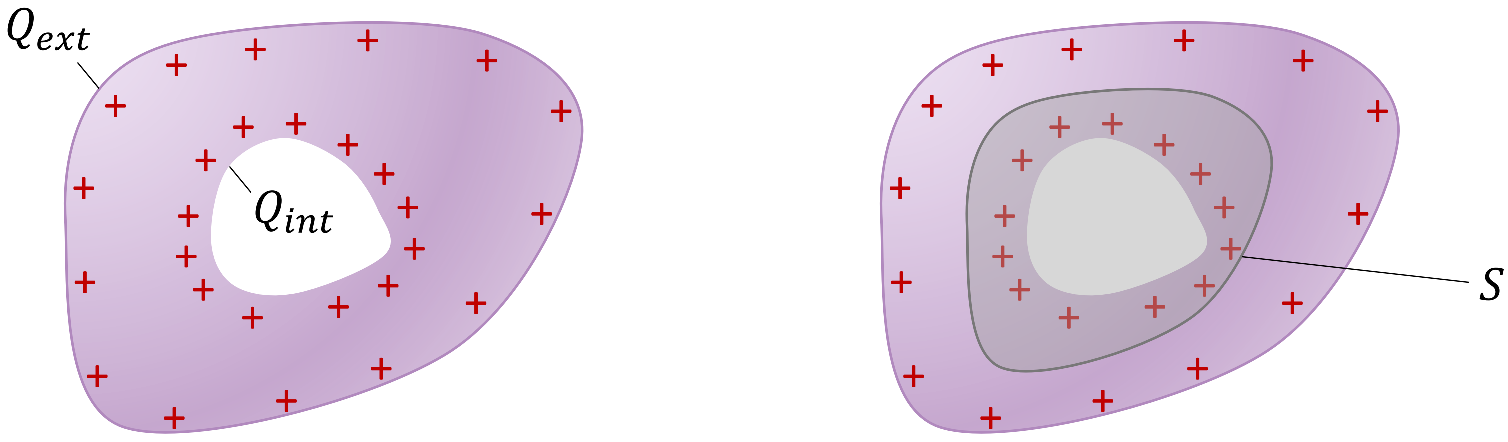
Charges et conducteurs creux (2)



- Pour créer la cavité, on **soustrait de la matière** qui **ne contient pas** de charge (car il n'y en a pas à l'intérieur d'un conducteur chargé)
- Créer la cavité **ne modifie donc pas** la charge totale

Conducteur creux et vide: pas de charge sur la paroi interne de la cavité

- Pourrions-nous avoir de la charge sur la **paroi interne**?

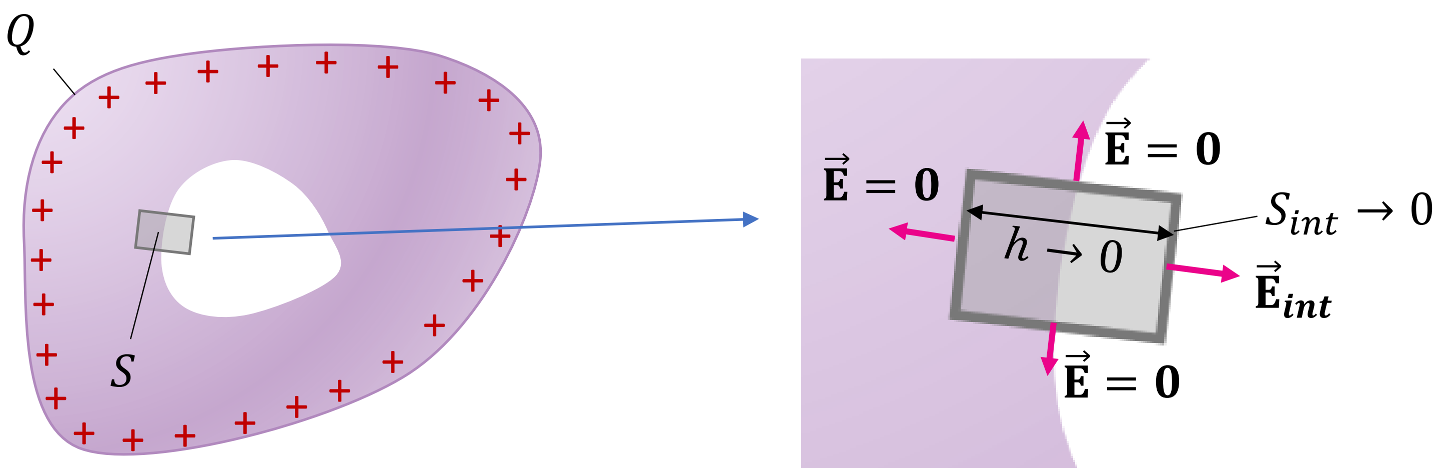


$Q = Q_{ext} + Q_{int}$?

- Si c'était le cas on aurait $\Phi_S = Q_{int}/\varepsilon_0 \neq 0$
- **Impossible** car $\vec{\mathbf{E}}$ **nul** dans le conducteur !
- On **doit** donc avoir $Q_{int} = 0$

Conducteur creux et vide: pas de champ à l'intérieur de la cavité

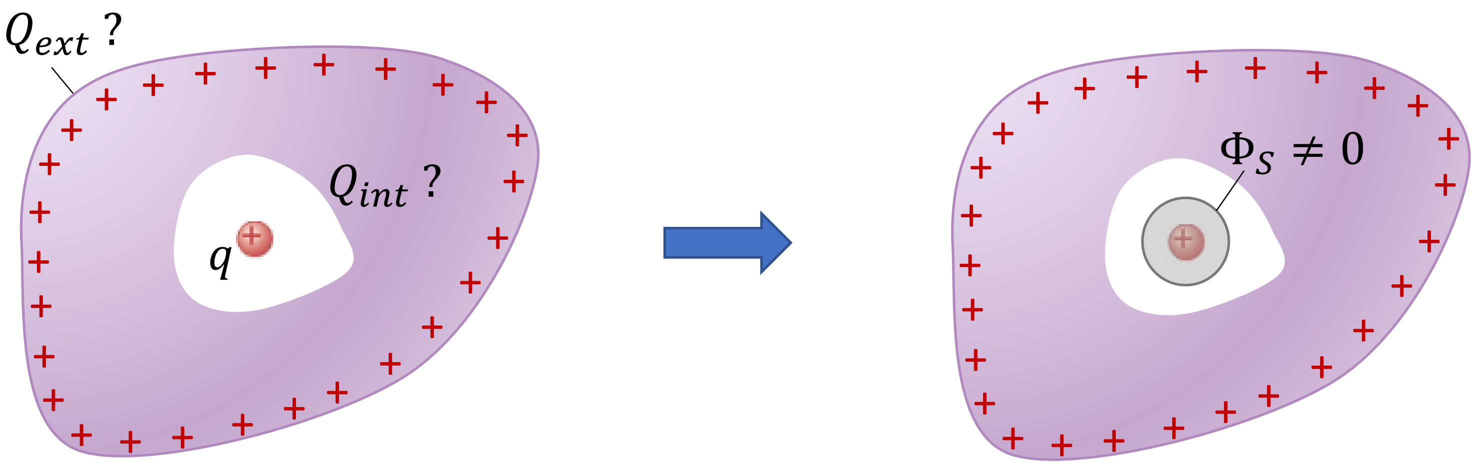
- Que peut-on dire de $\vec{\mathbf{E}}$ à l'intérieur de la cavité?



- On doit avoir $\Phi_S = E_{int} S_{int}$ pour $h \to 0$ et $S_{int} \to 0$
- Or $\Phi_S = Q_{enc}/\varepsilon_0 = 0$
- On en déduit donc que $E_{int} = 0$

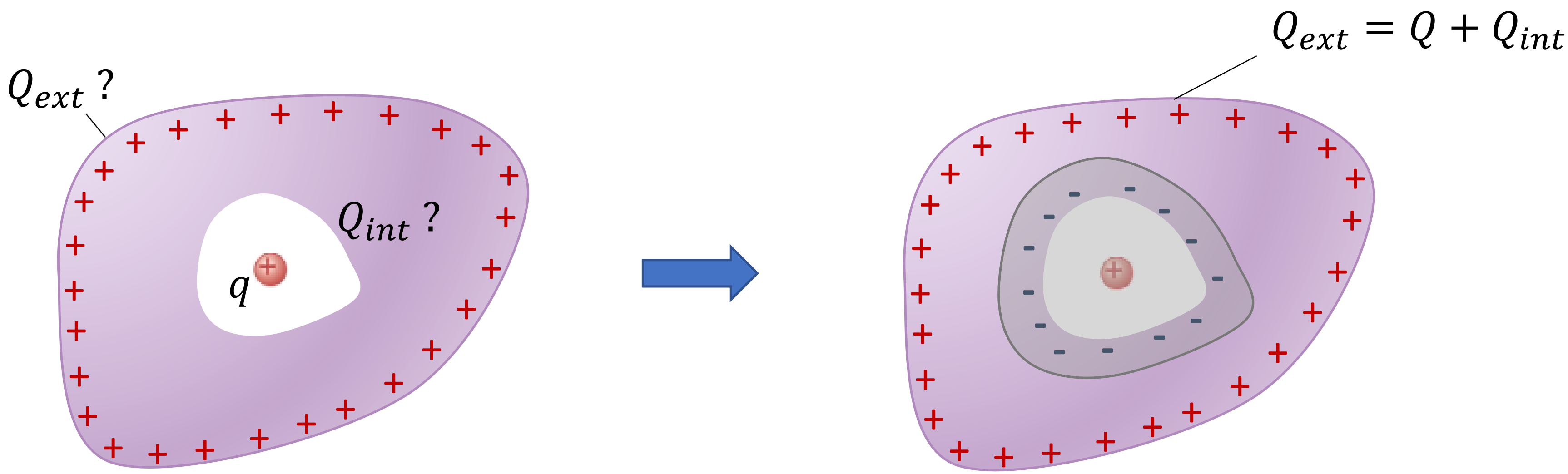
Conducteur creux avec une charge dans la cavité: champ non nul dans la cavité

- Et si, en plus de Q sur le conducteur, on ajoute une **charge isolée** à **l'intérieur de la cavité** ?



- **Par Gauss**, le champ à l'intérieur de la cavité ne peut pas être nul !

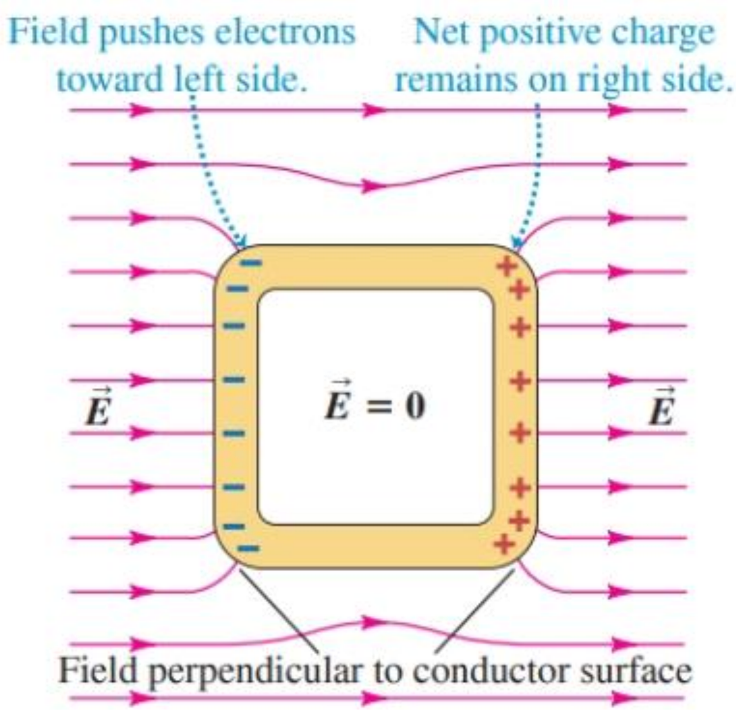
Conducteur creux avec une charge dans la cavité: charges induites sur les parois

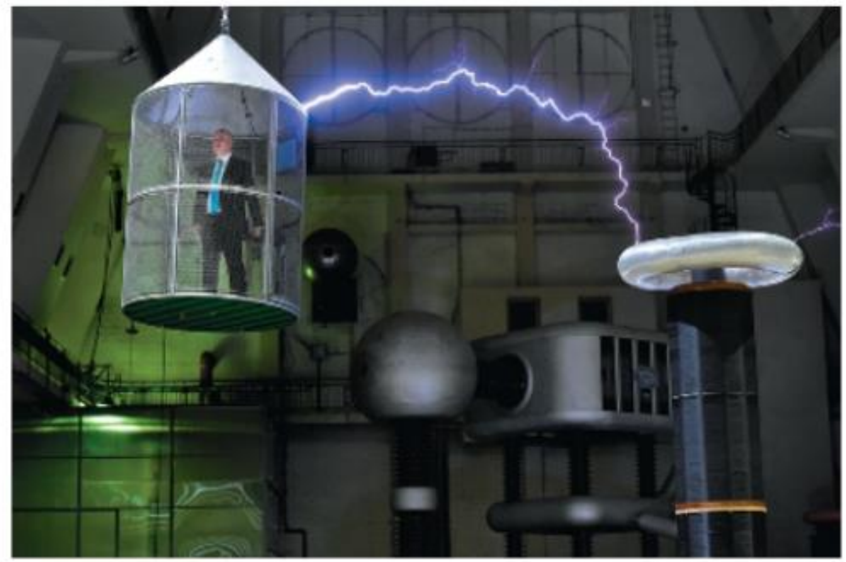


- **Par Gauss également**, il doit y avoir des charges induites sur les parois de la cavité, de signe **opposé** à q
- En effet: $\Phi_S = 0$ **car $\boldsymbol{E}$ est nul** dans le conducteur

  $\Phi_S = (q + Q_{int})/\varepsilon_0$ => $Q_{int} = -q$
- Sur la paroi **extérieure**: $Q_{ext} = Q + Q_{int}$ car conservation de la charge

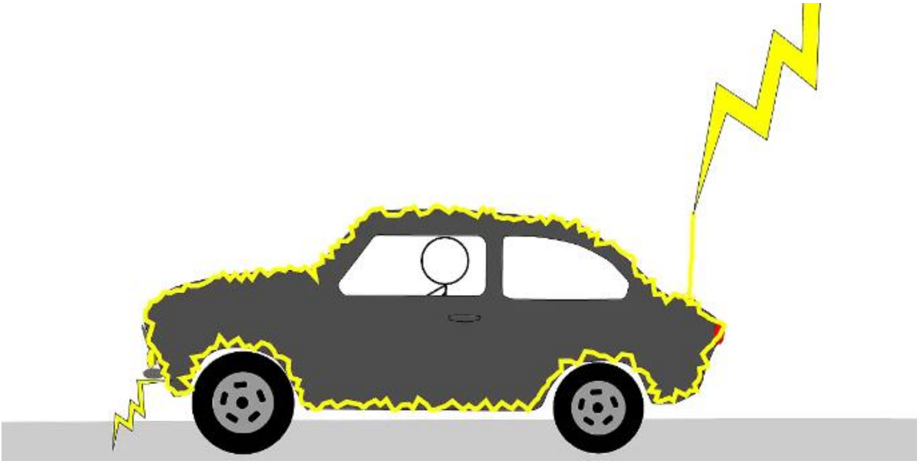
Cage de Faraday (1)





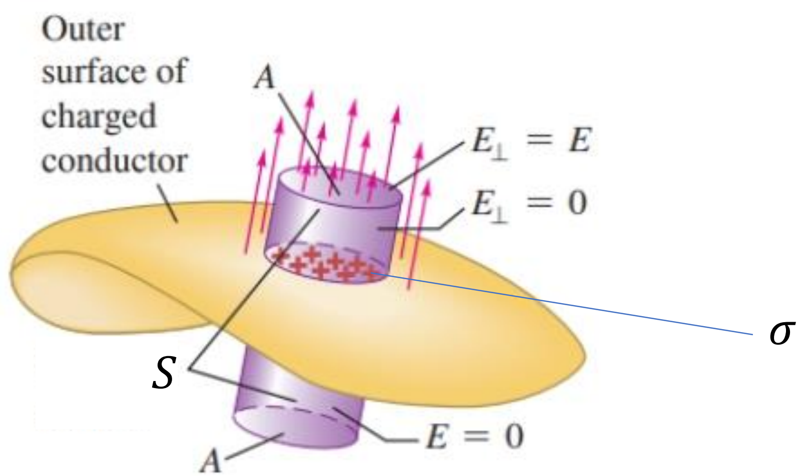
- Le champ et les charges **extérieures** du conducteur creux **n'ont aucun effet** sur le champ à **l'intérieur** de la cavité => **cage de Faraday**

Cage de Faraday (2)



Champ à la surface d’un conducteur

- La loi de Gauss permet aussi de relier le **champ électrique** à la **surface** d’un **conducteur** à la **densité surfacique** de charge (σ)



- Par Gauss: $EA = Q_{enc}/\varepsilon_0 = \sigma A/\varepsilon_0 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ ou encore $\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{\mathbf{n}}$
- $\vec{\mathbf{E}}$ orienté **vers le conducteur si $\boldsymbol{\sigma < 0}$**

Synthèse du cours 4 (1)

- Le **flux du champ électrique** représente le flux électrique au travers d'une surface donnée.
- Il est calculé en **intégrant** le **produit scalaire** entre $\vec{\mathbf{E}}$ et $d\vec{\mathbf{S}}$ sur l'entièreté de la **surface** considée: $\Phi_S = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$.
- Pour une **surface fermée**, la **loi de Gauss** relie le flux électrique à la **charge incluse** dans le volume délimité par cette surface fermée: $\Phi_S = Q_{enc}/\varepsilon_0$
- Dans certains **cas simples** (symétrie, conducteurs, …), la loi de Gauss permet de déterminer la **distribution de charge** si l'on connait le **champ électrique** dans une certaine region de l'espace. Elle permet aussi déterminer **le champ électrique** à partir d'une **distribution de charges connue**.
- La loi de Gauss permet notamment de trouver **très facilement** le champ électrique pour le cas de la **charge ponctuelle**, de la **distribution linéïque uniforme de charge** (fil chargé infini), et de la **distribution surfacique uniforme de charge** (plaque chargée infinie).

Synthèse du cours 4 (2)

- Dans le cas d'un **conducteur chargé creux**, la loi de Gauss permet de démontrer que **le champ électrique à l'intérieur de la cavité est nul**.
- Ce phénomène forme le principe de base de la "**cage de Faraday**", largement exploitée pour **protéger des régions de l'espace** de tout champ électrique en réalisant une **cage métallique**.
- La Loi de Gauss permet aussi d'obtenir **l'intensité du champ électrique** à la **surface** d'un **conducteur chargé**: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$