# Le théorème de Gauss !

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$


**Résumé des épisodes précédents :-)**

**Episode 1 : Décrire le mouvement**
**Episode 2 : Newton et la force de gravité**
**Episode 3 : Coulomb et la force de l'électricité**

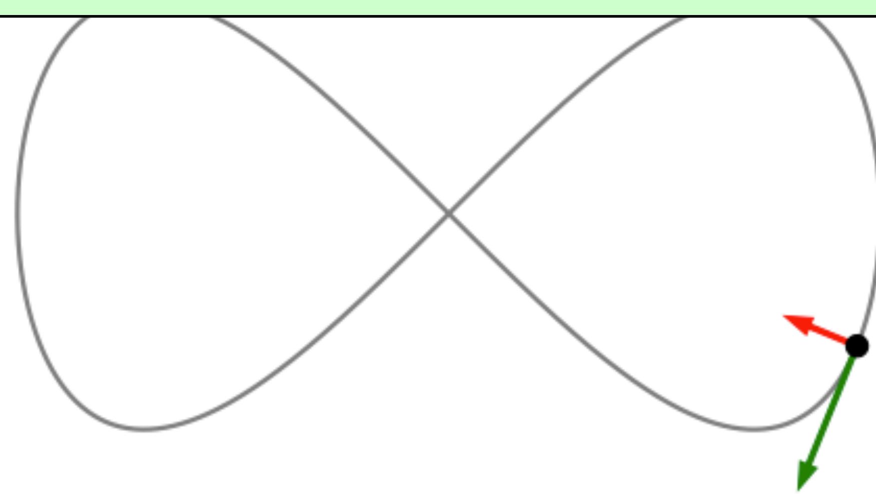
# La mécanique du point

$$\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) = \vec{\mathbf{v}}(t)$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) = \vec{\mathbf{a}}(t)$$

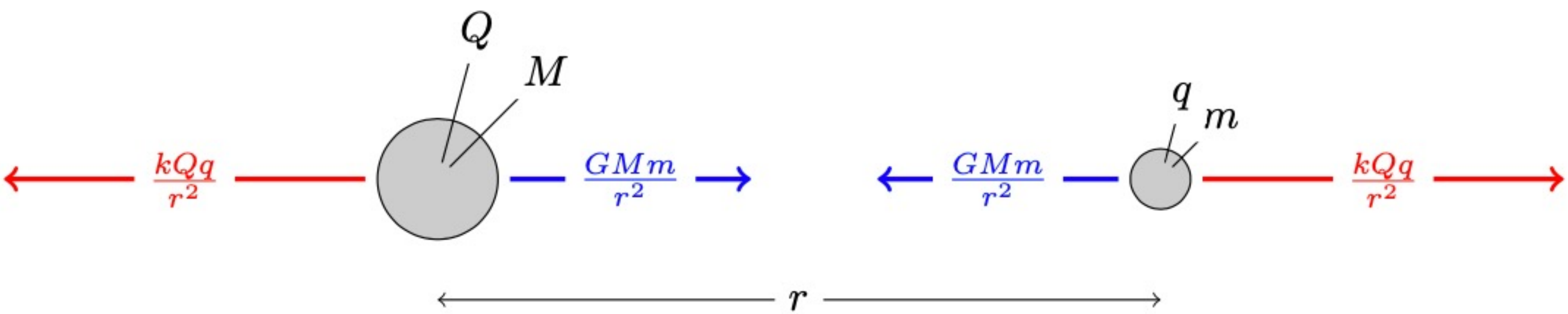
$$m\,\vec{\mathbf{a}}(t) = \sum \vec{\mathbf{F}}(t)$$


- **La position, la vitesse, l'accélération, les forces sont des vecteurs ! Il faut donc bien maîtriser l'algèbre vectorielle !**
- **A l'exception du mouvement rectiligne à vitesse constante, tout autre type de mouvement présente une accélération centripète due au changement de direction et/ou de norme de la vitesse.**



La force de Coulomb…

$$F = \frac{kQq}{r^2}$$

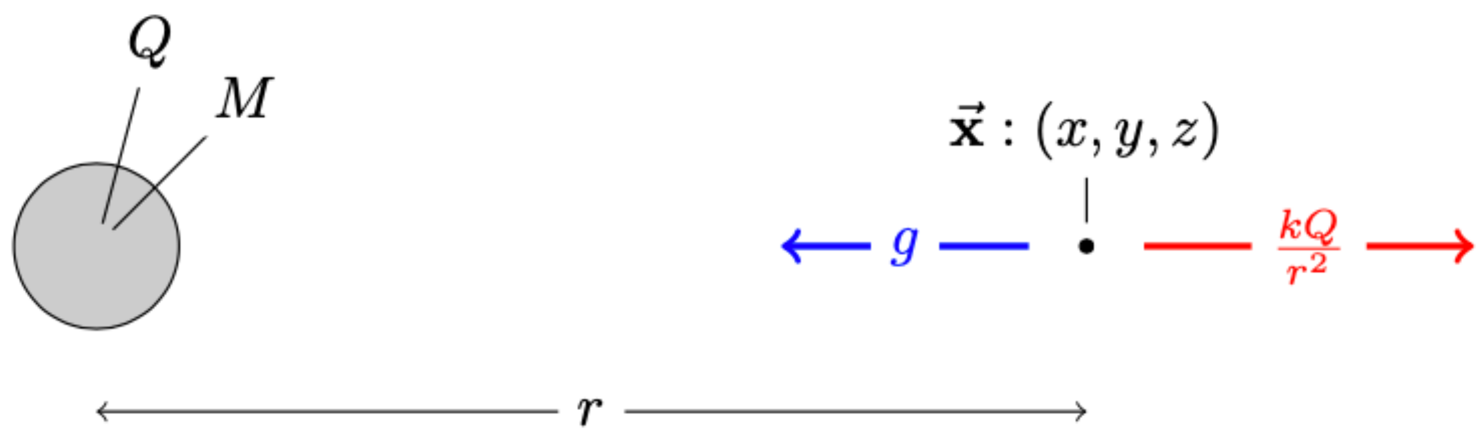



$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

… et la force de gravité

Le champ électrique…

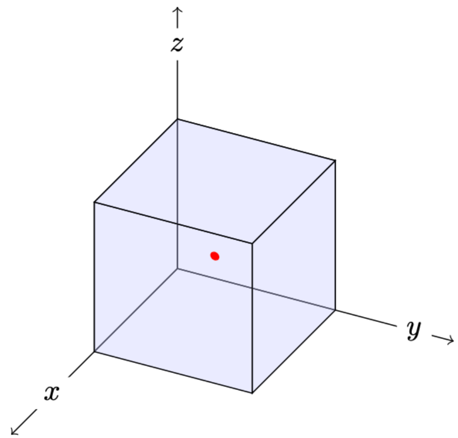
$$\boxed{E = \frac{kQ}{r^2}}$$



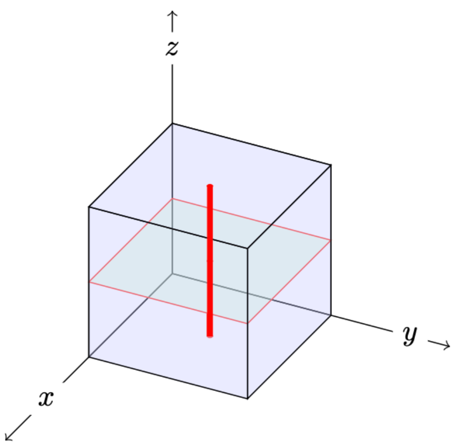

$$\boxed{E = \underbrace{\frac{GM}{r^2}}_{g}}$$

… et le champ gravitationnel

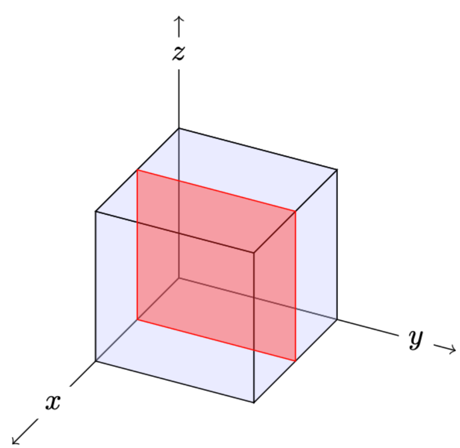
# Trois champs électriques particuliers !




$$E \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}$$

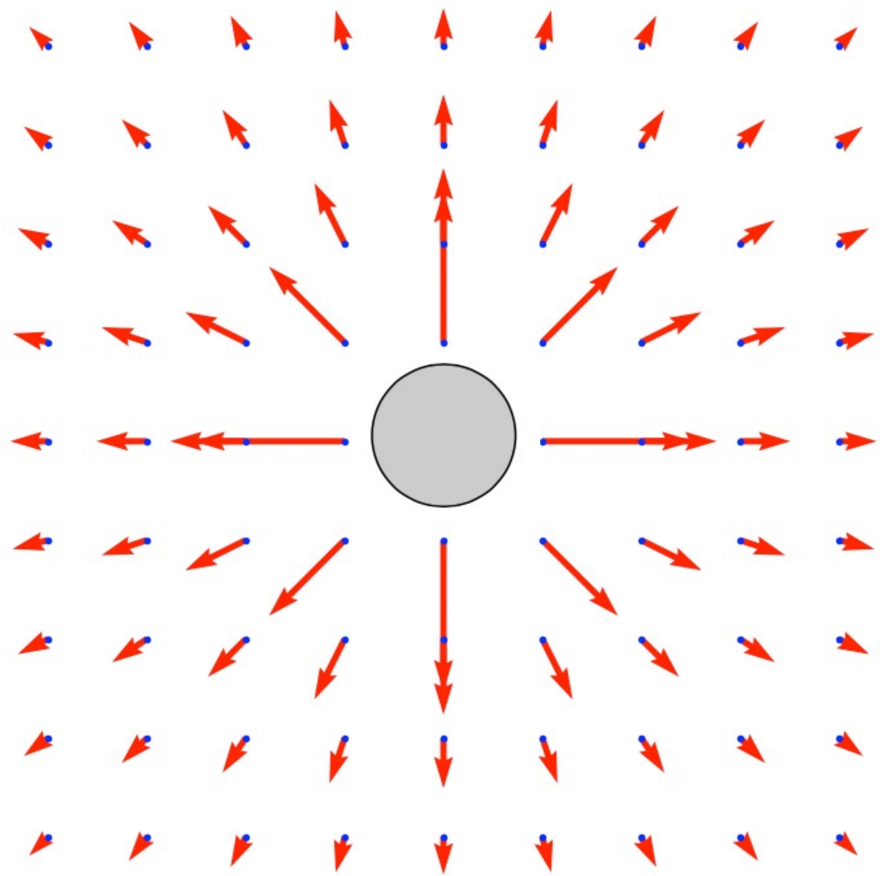



$$E \;=\; \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{\lambda}{r}$$




$$E \;=\; \frac{1}{2\epsilon_0}\,\sigma$$

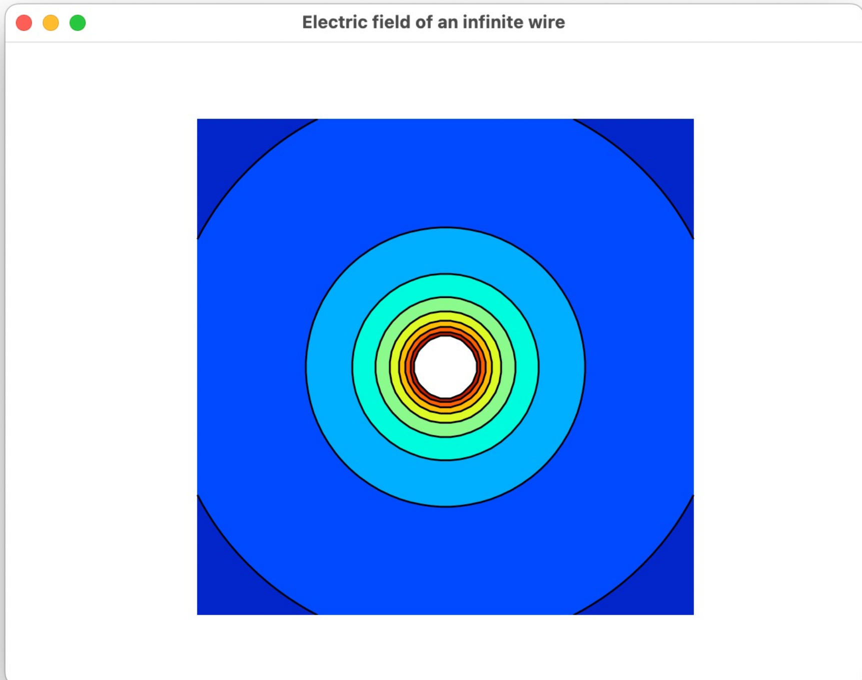
# Un cable infini chargé perpendiculaire au plan

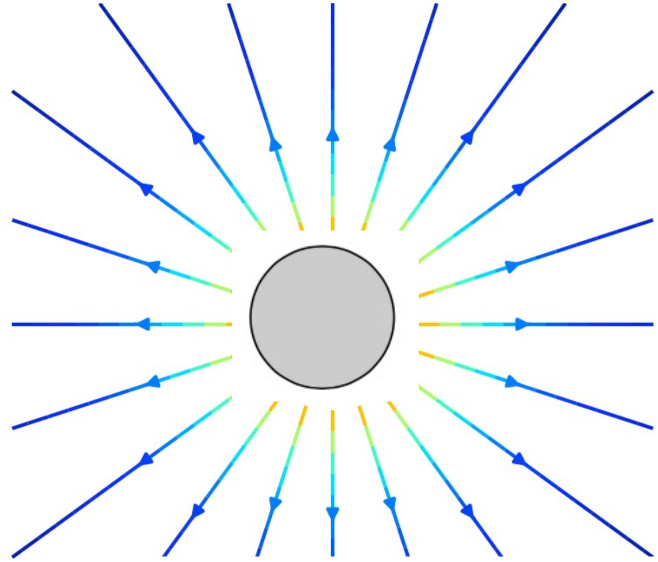


**En 2D, c'est plus facile !**

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

# Lignes du champ …



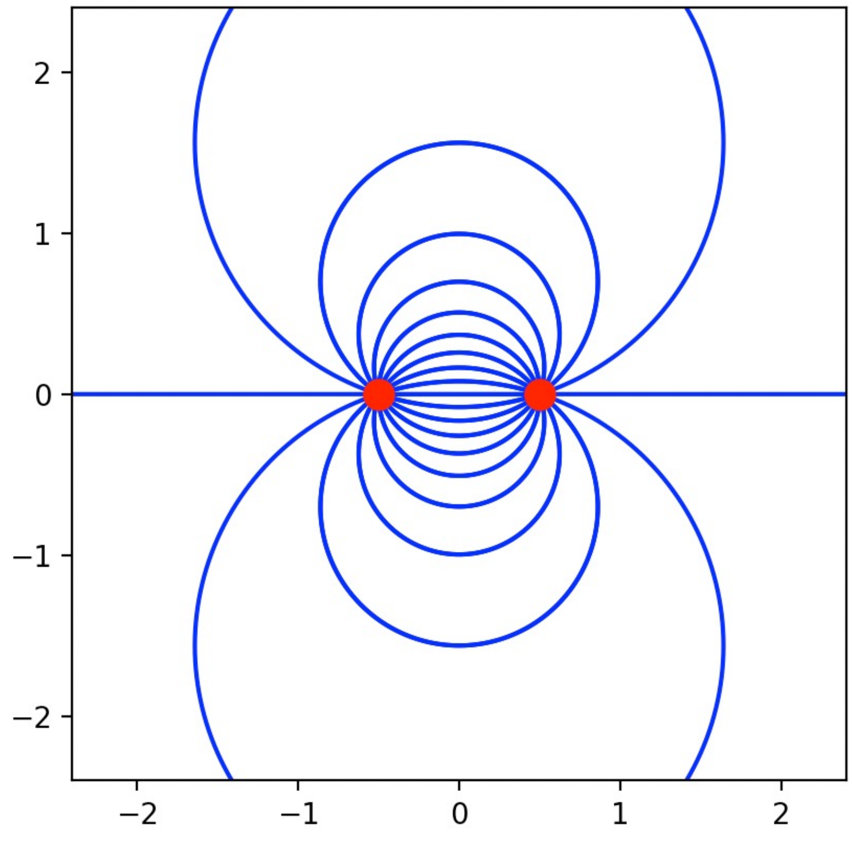



$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} E_x(x,y) \\ E_y(x,y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

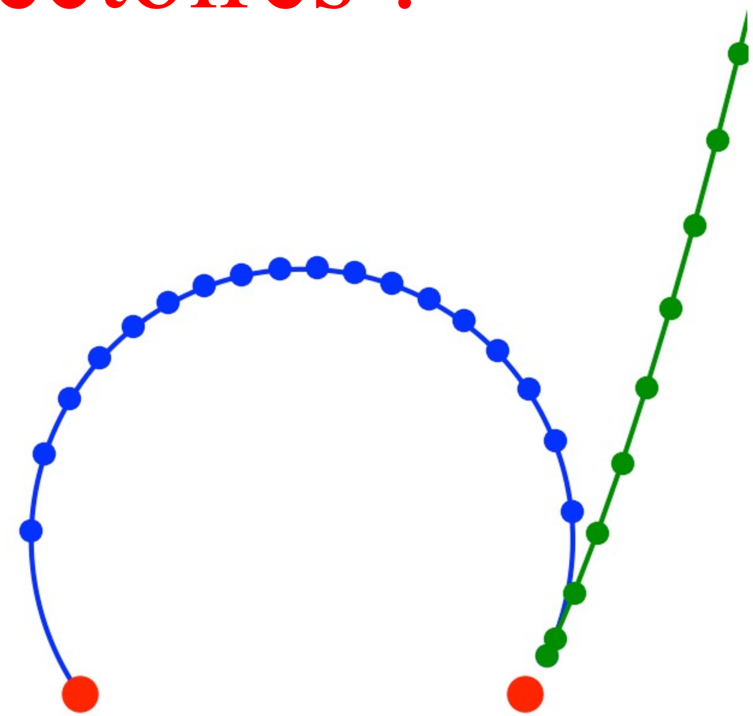
$$E(\vec{\mathbf{x}}) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

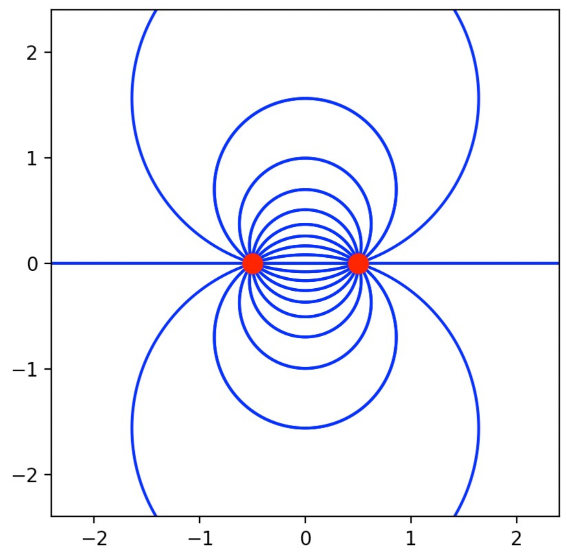
# … intensité du champ !

# Deux cables chargés perpendiculaires au plan

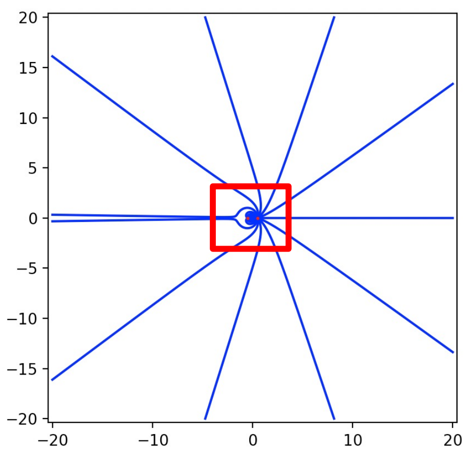


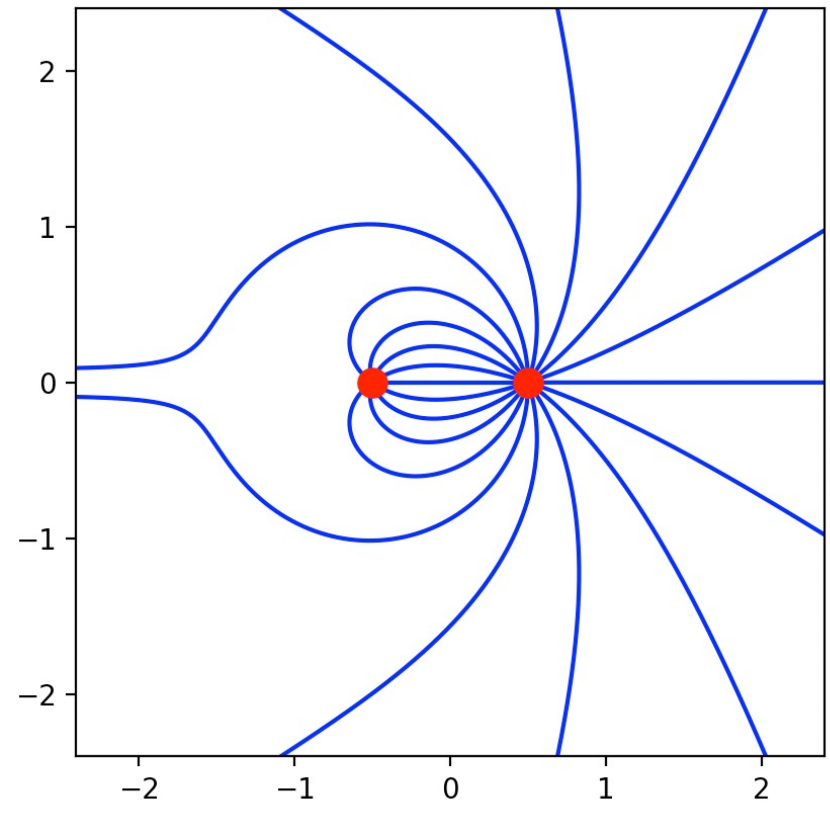
# Les lignes du champ ne sont pas des trajectoires !

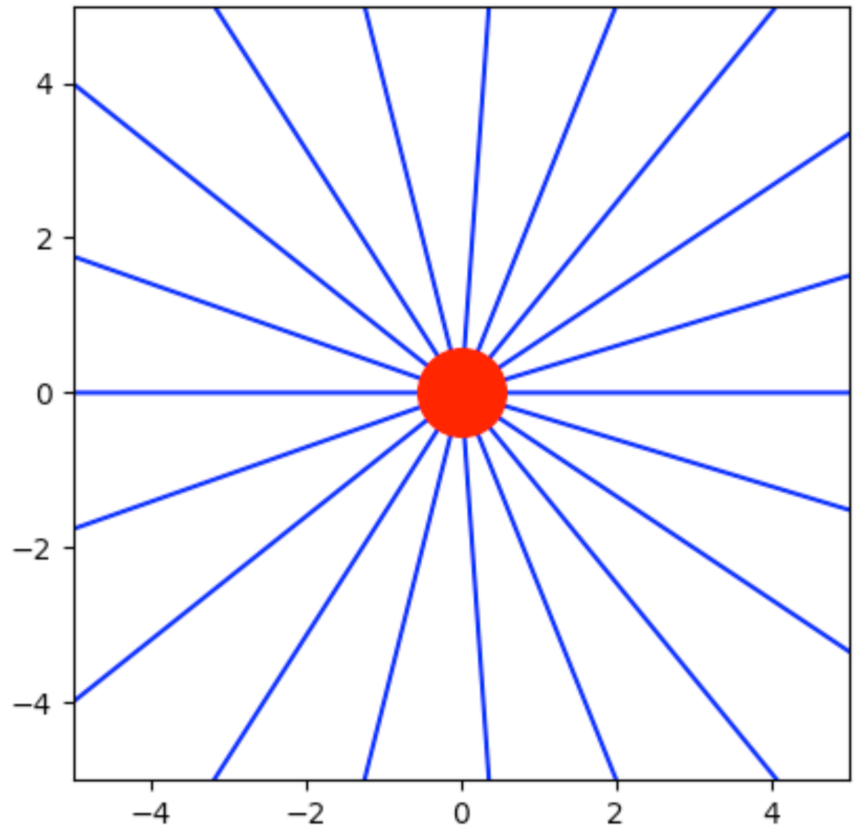




# Avec des densité de charges différentes…



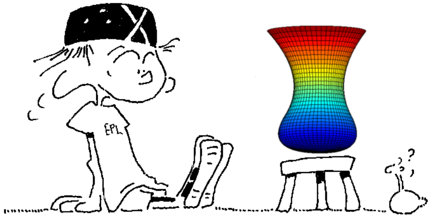






Lignes
du champ
gravitationnel
autour d’une étoile !

**Méthode dite**
**d'Euler explicite !**

**Y a mieux !**
**On y reviendra plus tard !**

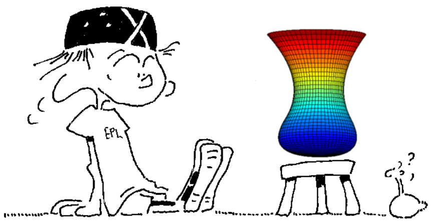


Une trajectoire
avec python !

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{v}}(t) \\
\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}}(t))
\end{aligned}
$$

**Méthode dite d'Euler explicite !**

**Y a mieux !**
**On y reviendra plus tard !**



$\downarrow$ En prenant un $\Delta t$ suffisamment petit...

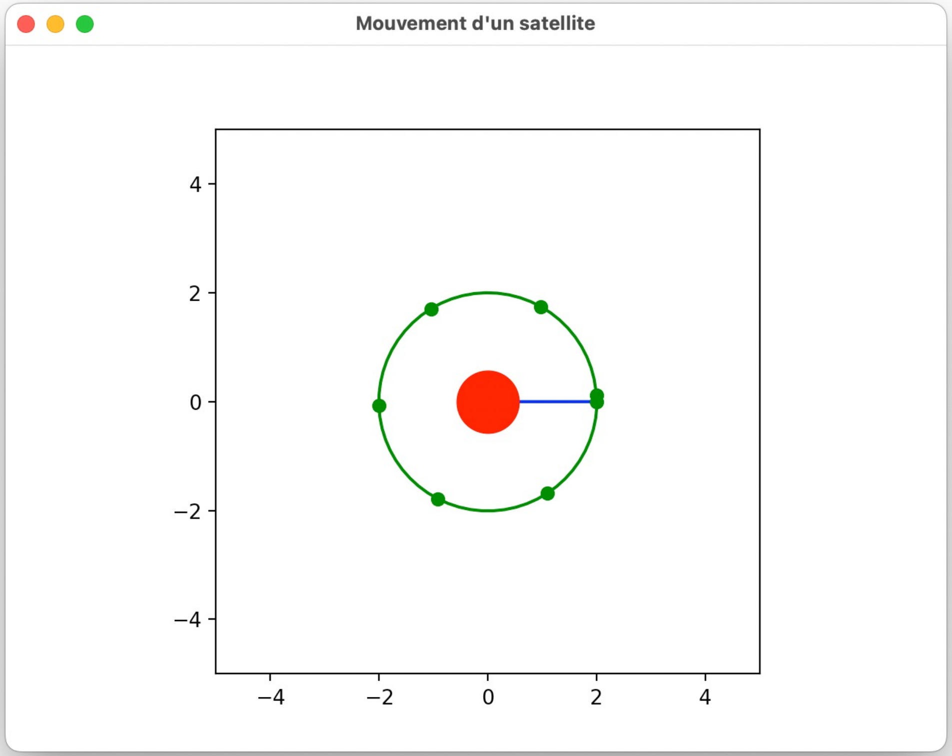
$$
\begin{aligned}
\frac{\vec{\mathbf{x}}(t+\Delta t) - \vec{\mathbf{x}}(t)}{\Delta t} &= \vec{\mathbf{v}}(t) \\
\frac{\vec{\mathbf{v}}(t+\Delta t) - \vec{\mathbf{v}}(t)}{\Delta t} &= \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}}(t))
\end{aligned}
$$

**Il faut une position et une vitesse initiale pour entamer le calcul !**

$\downarrow$ En definissant $\vec{\mathbf{x}}_i = \vec{\mathbf{x}}(t + i\Delta t)$ et $\vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{v}}(t + i\Delta t)$

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}_{i+1} &= \vec{\mathbf{x}}_i + \Delta t \; \vec{\mathbf{v}}_i \\
\vec{\mathbf{v}}_{i+1} &= \vec{\mathbf{v}}_i + \Delta t \; \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}}_i)
\end{aligned}
$$

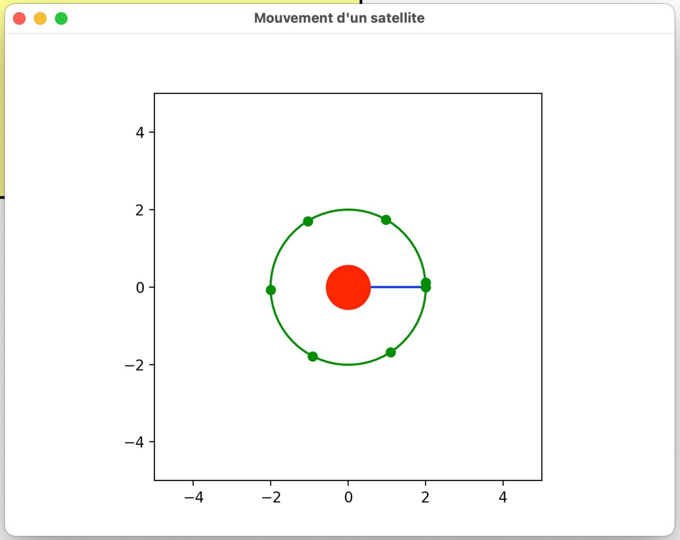
Une trajectoire avec python !




La Terre tourne autour du Soleil !

```
def g(x):
  g = zeros(2)
  g[0] = -x[0] / (x[0]*x[0] + x[1]*x[1])**(3/2)
  g[1] = -x[1] / (x[0]*x[0] + x[1]*x[1])**(3/2)
  return g

X = zeros((n+1,2)); X[0,:] = [2.0,0.0]
X = zeros((n+1,2)); V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0)]
n = 18001;  dt = 10e-4
for i in range(n):
  V[i+1,:] = V[i,:] + dt * g(X[i,:])
  X[i+1,:] = X[i,:] + dt * V[i,:]
```



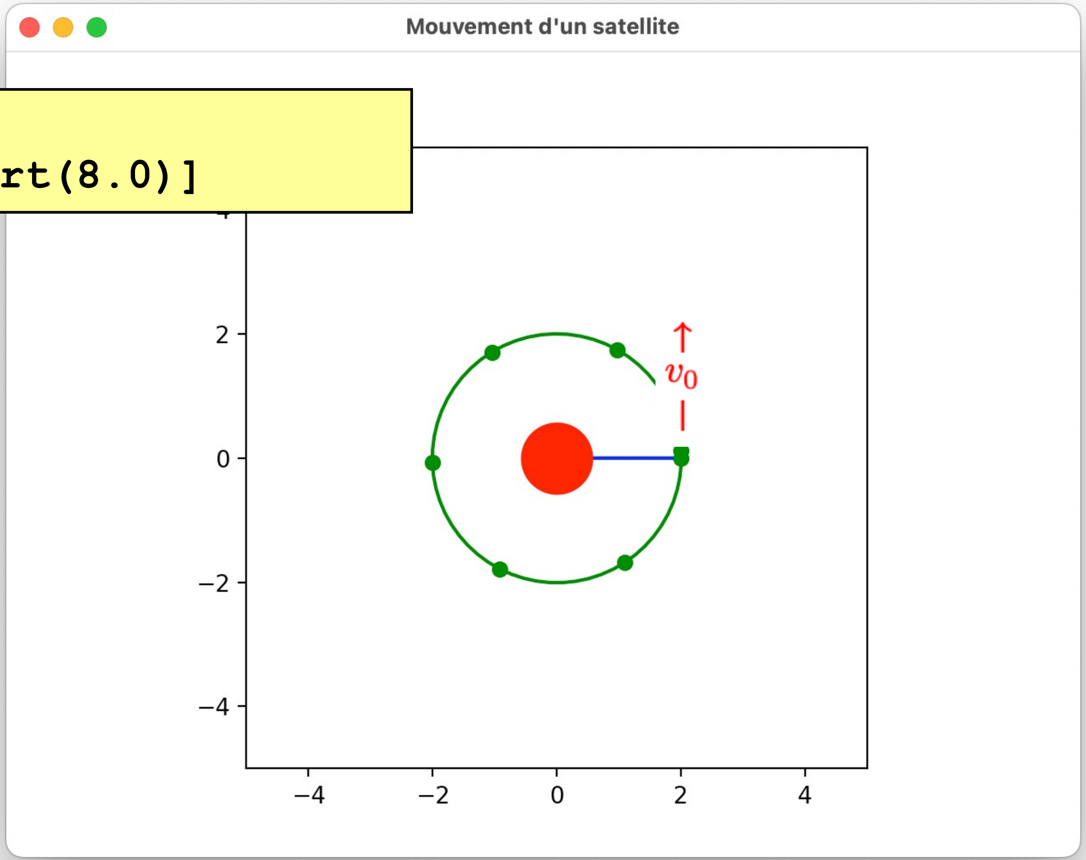

Eh oui !

Les lignes de champ

ne sont pas les trajectoires !

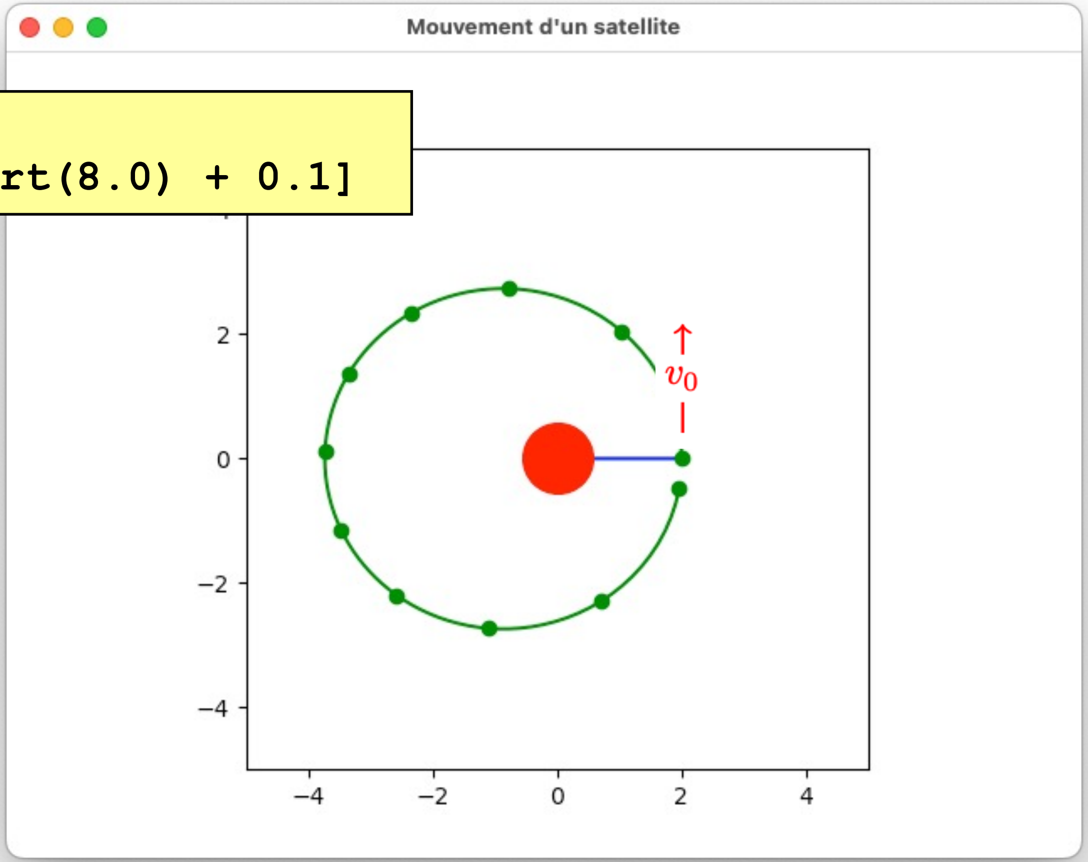
Python : so cool :-)

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0)]
```



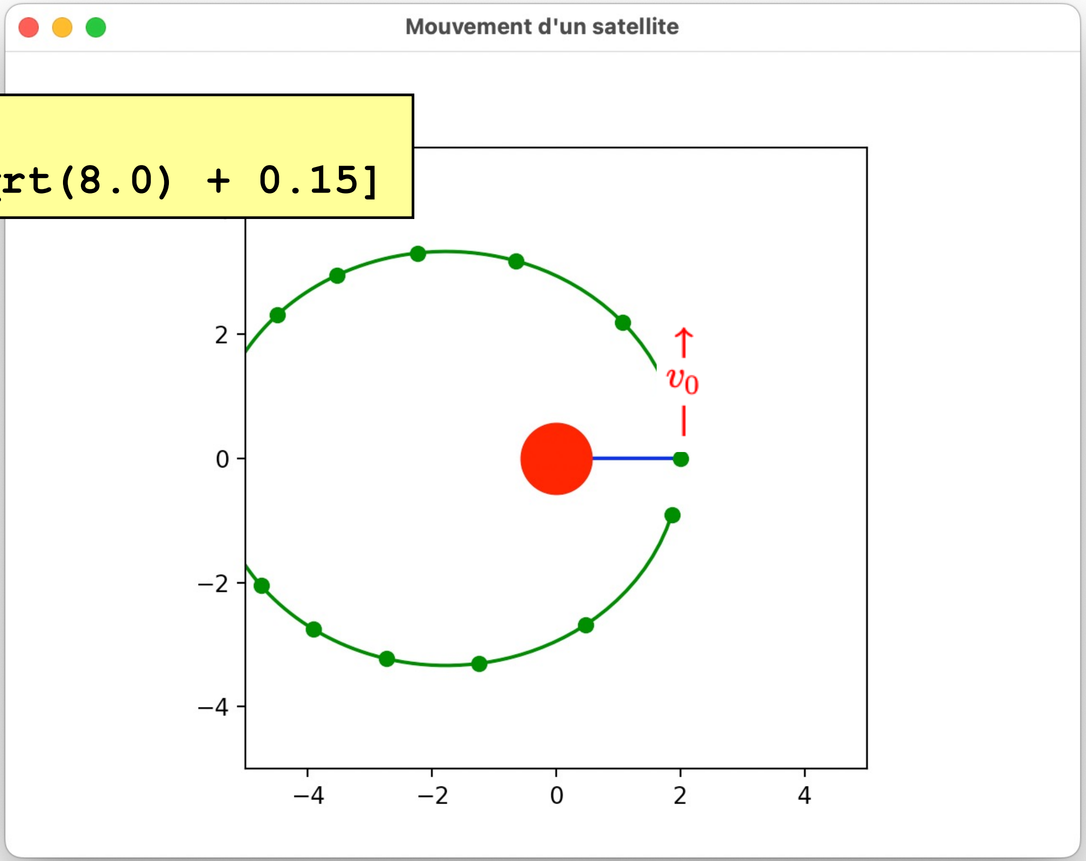

# Lâchons un satellite !

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) + 0.1]
```



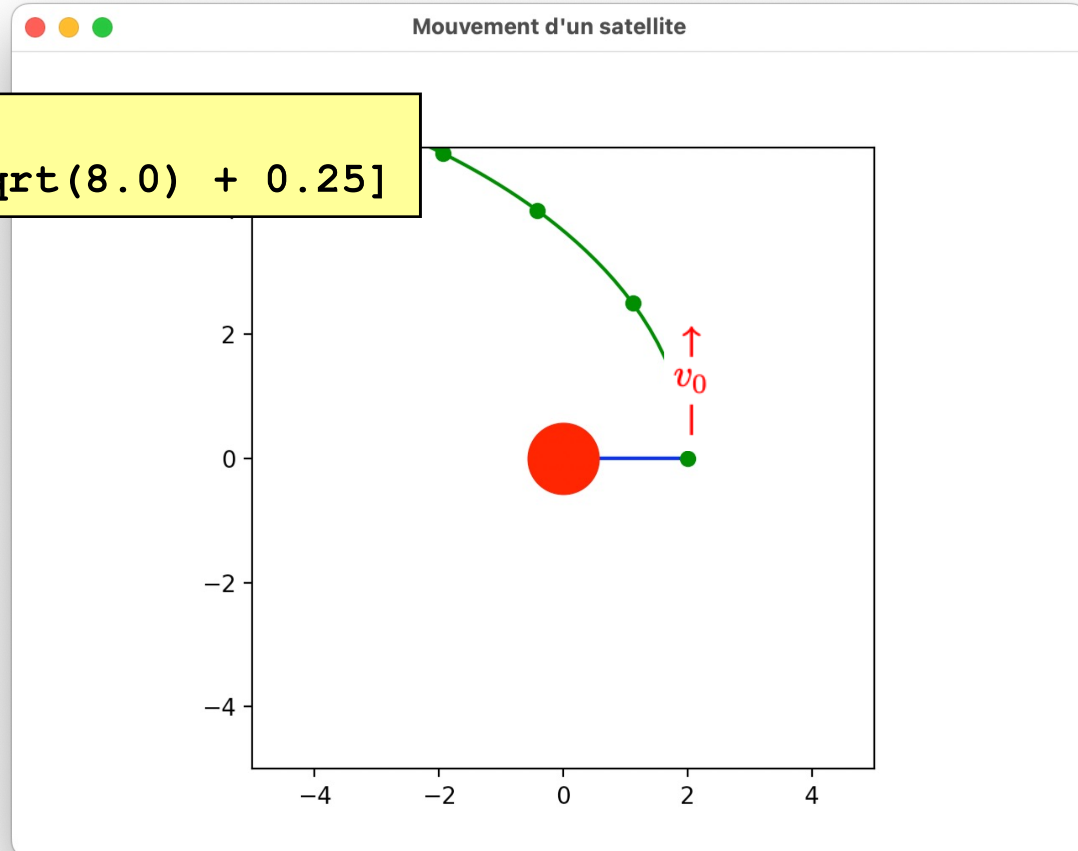

# Lâchons
# un fifrelin plus vite !

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) + 0.15]
```



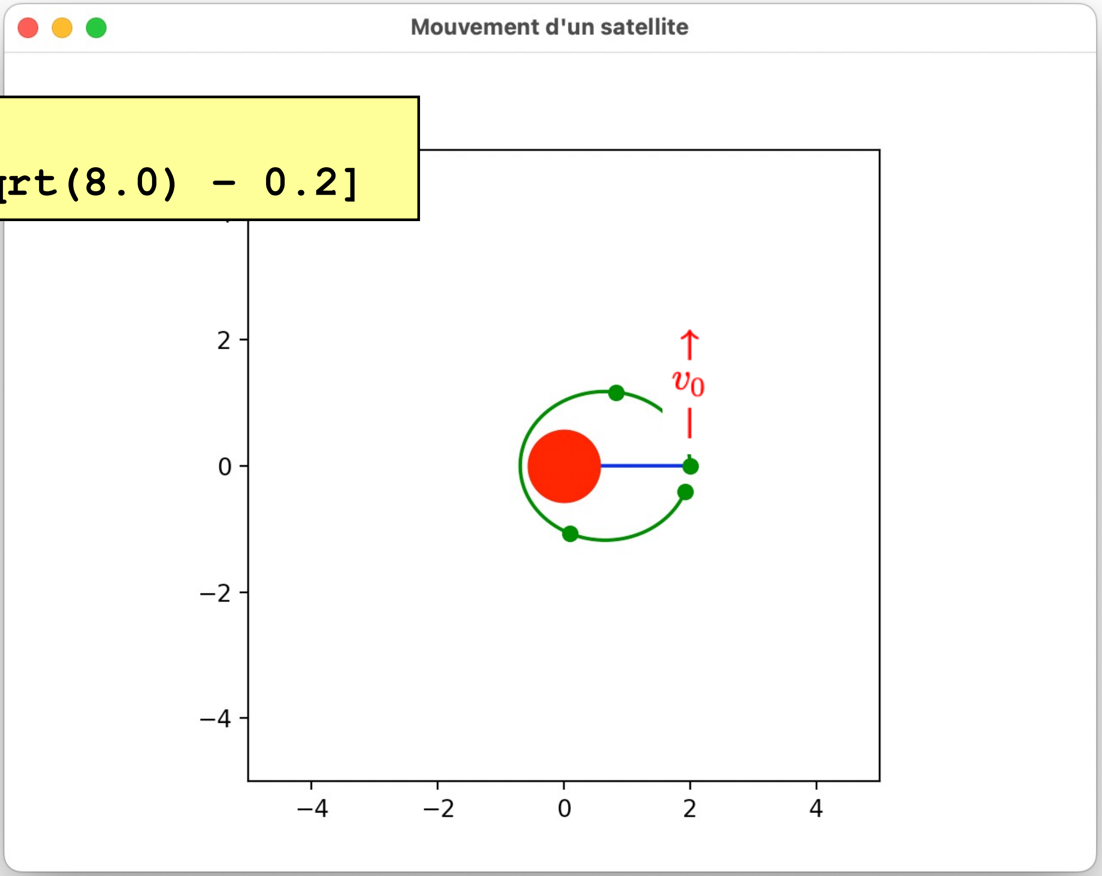

# Et encore un tout petit plus vite !

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) + 0.25]
```



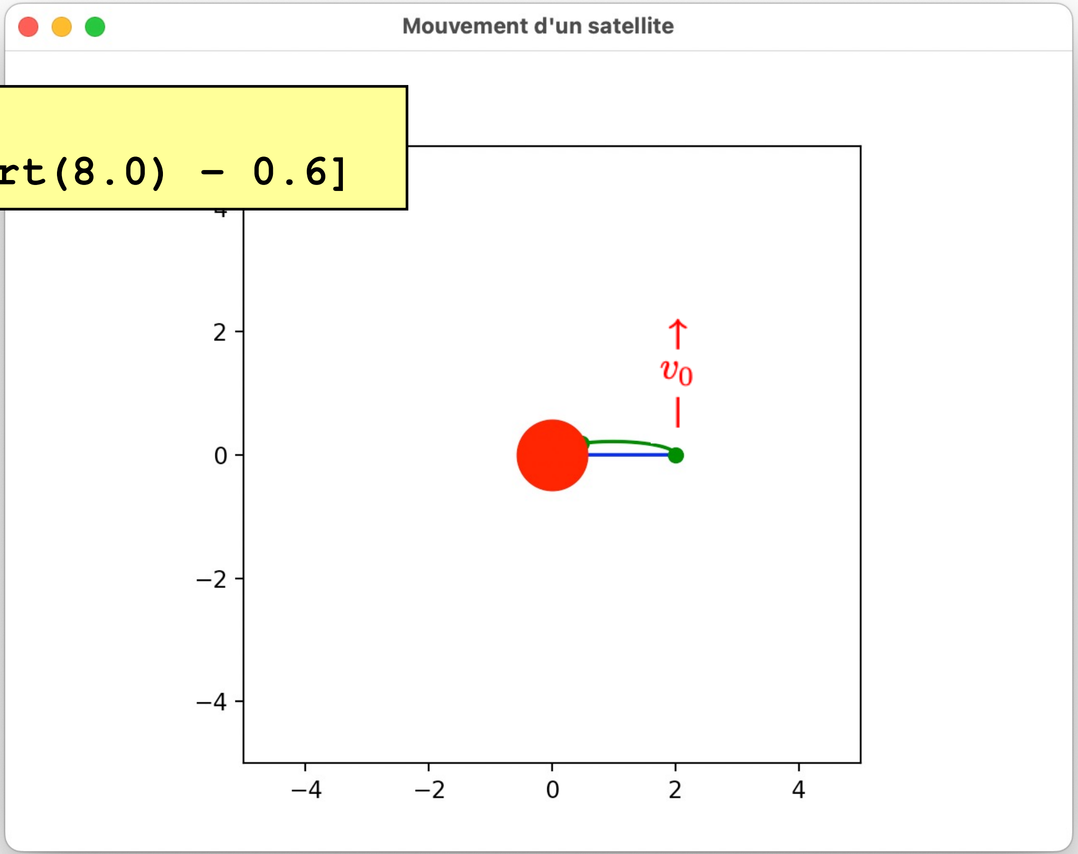

Est-ce qu’il va revenir ?

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) - 0.2]
```



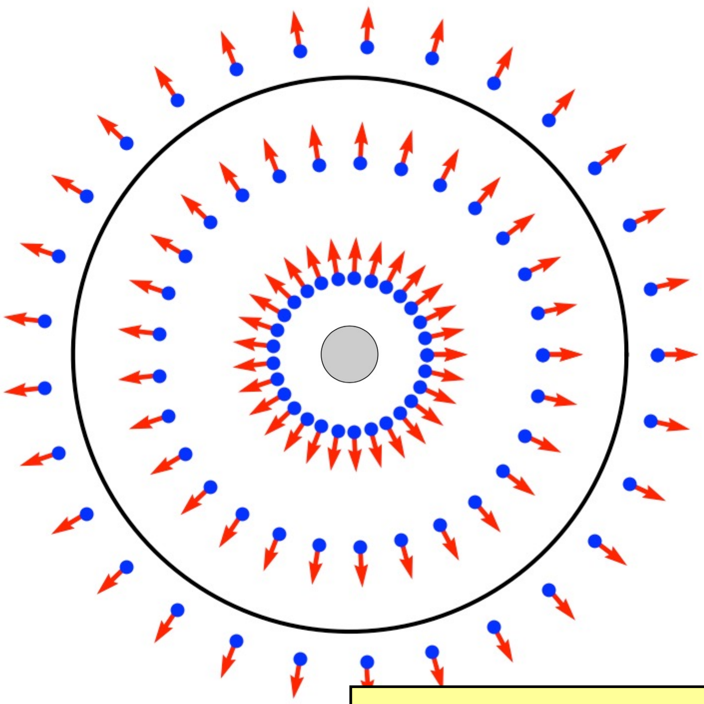

Et en le lâchant
un fifrelin plus lentement !

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) - 0.6]
```




Trop lent : le satellite retombe sur la planète !

# Une source de particules

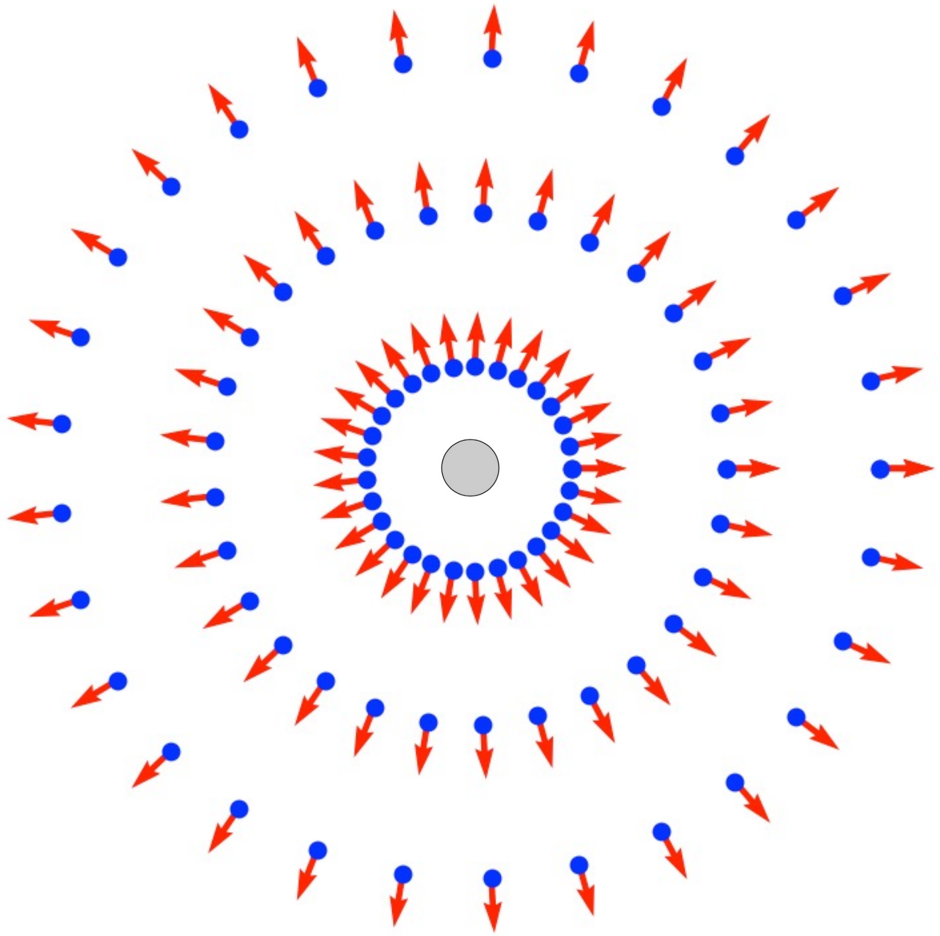


$$\underbrace{\text{Flux de particules}}_{\Phi} = \frac{\Delta n}{\Delta t}$$

**En 2D, c'est plus facile !**

**Exemples :**

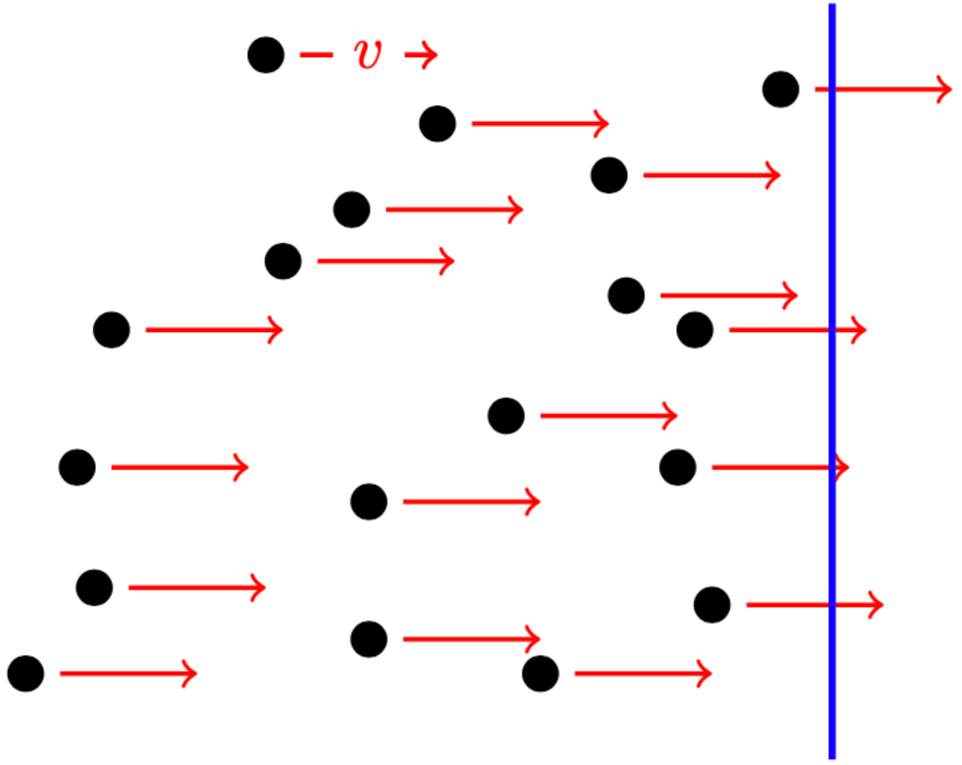
**Photons d'une source lumineuse...**
**Gouttes d'eau provenant d'une source...**
**Voitures fuyant une explosion nucléaire…**



Ce qui entre = ce qui sort !
Bilan nul !

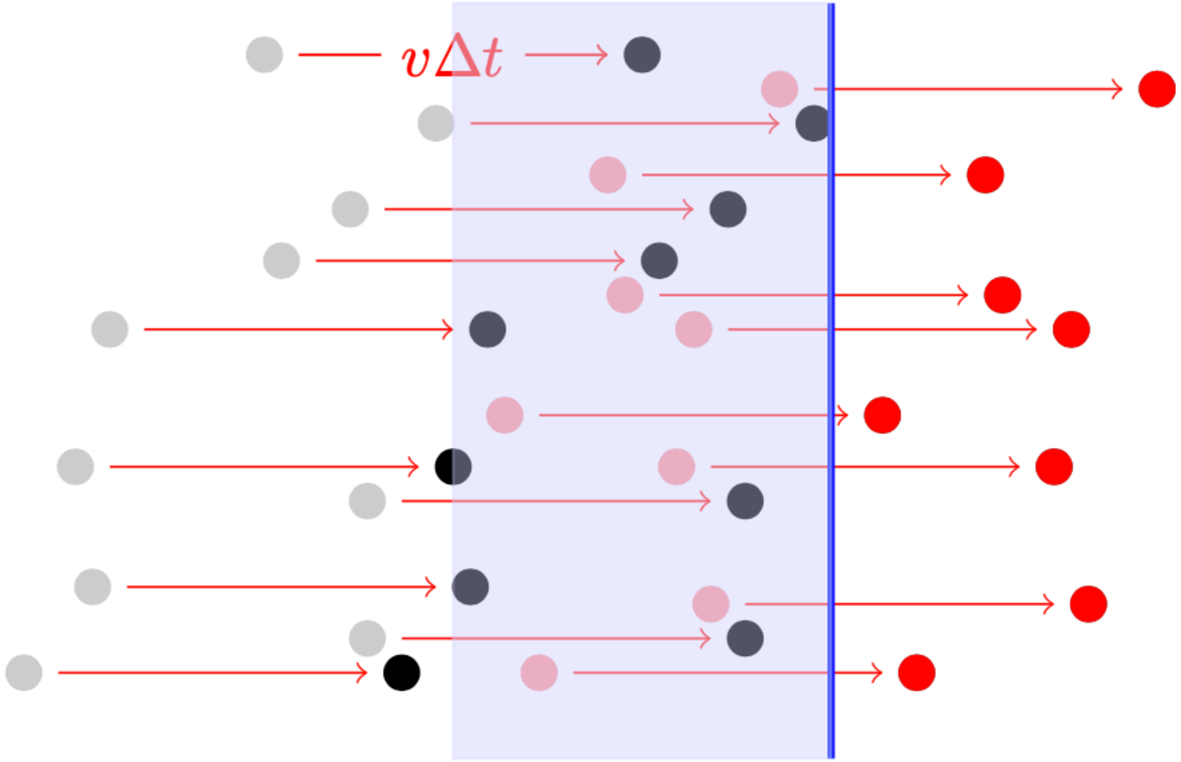
Une courbe quelconque
ne contenant pas la source !

# Plus facile !
# un mouvement parallèle…

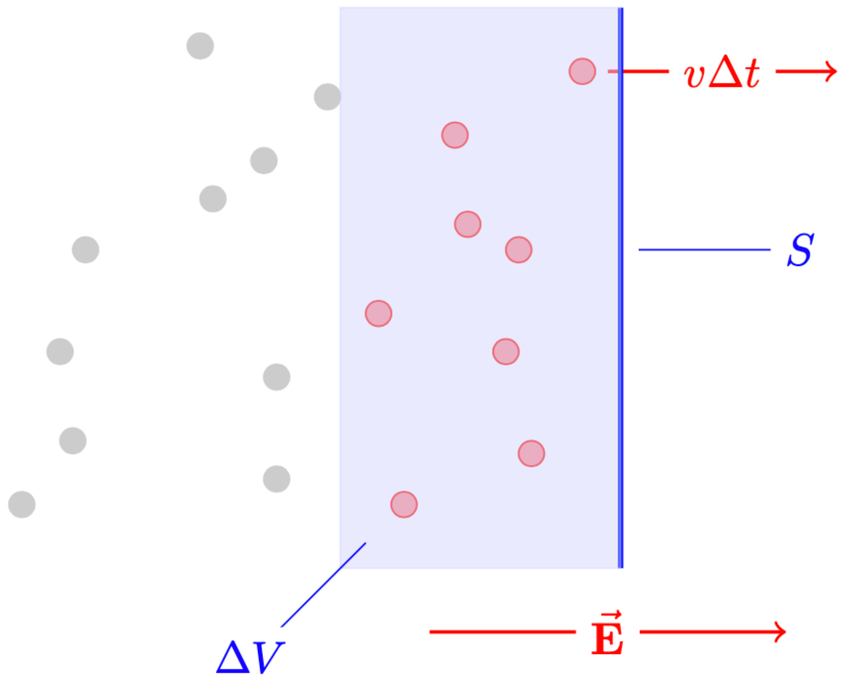



En 1D, c'est encore plus facile !
Enfin, plutôt 1,5 D :-)

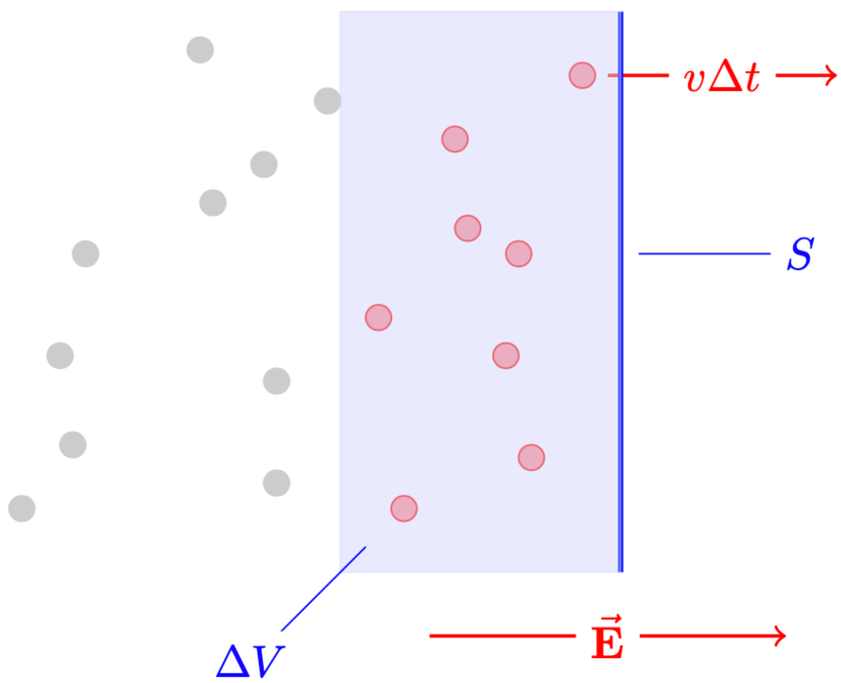
# Démarrons le chronomètre…



# Et calculons le flux…



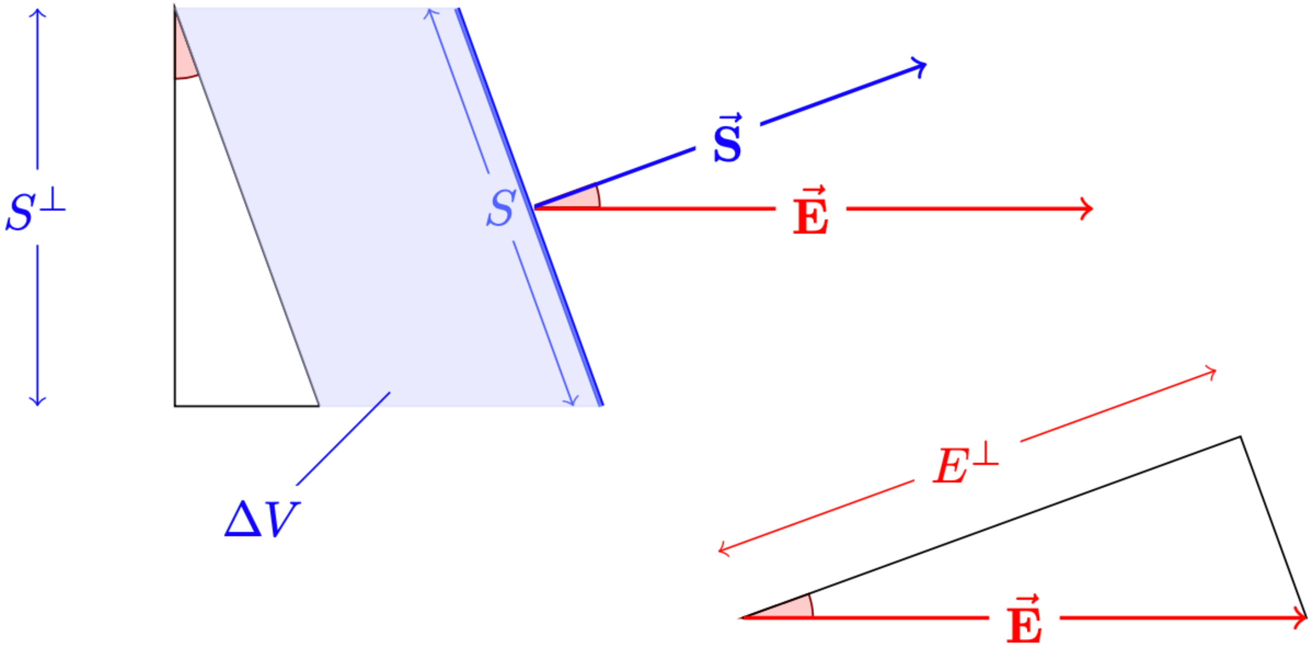
# Et calculons le flux…



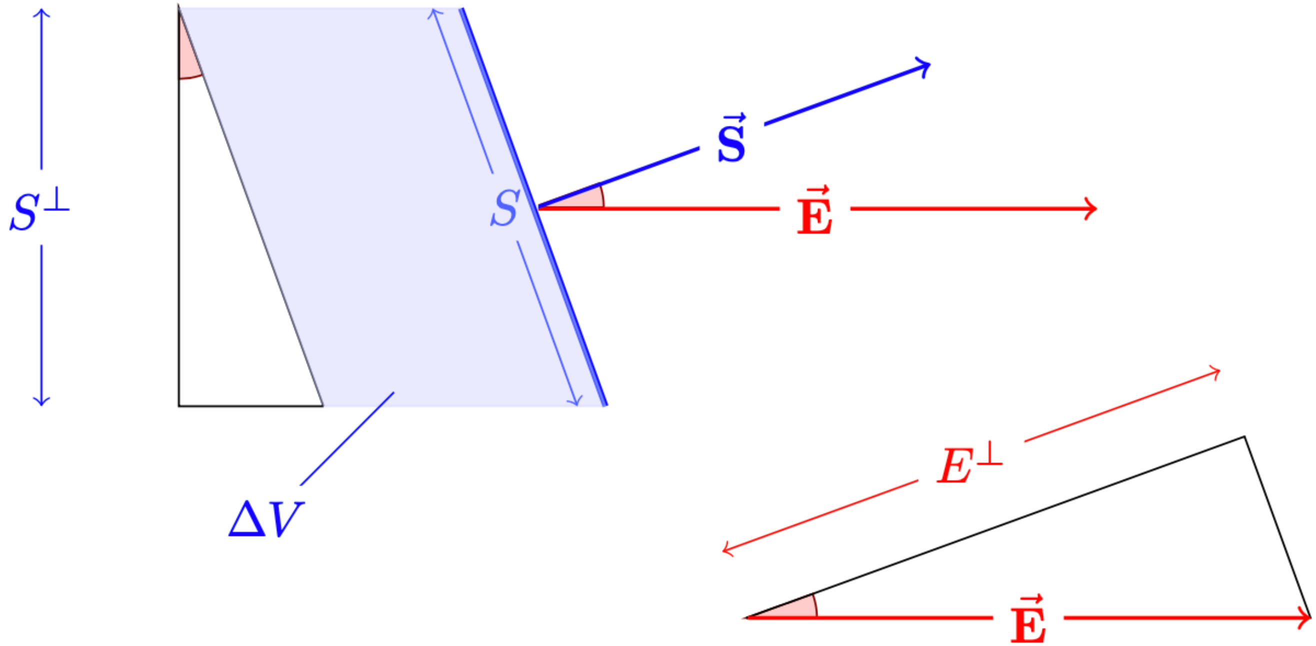

$$\text{Flux} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \underbrace{\eta\ v}_{E}\ S = E\ S$$

$$\rho = m\,\underbrace{\frac{\Delta n}{\Delta V}}_{\eta}$$

# Inclinons la paroi…

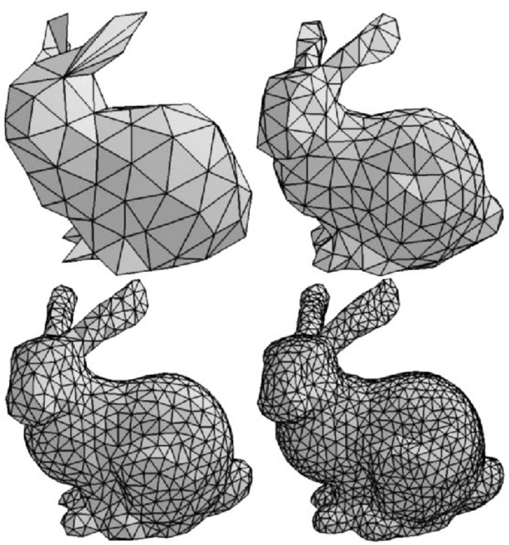


# Inclinons la paroi…




$$\text{Flux} = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{S}} = E\ S\cos(\theta) = E\ S^{\perp} = E^{\perp} S$$

# Et le flux à travers une surface quelconque…

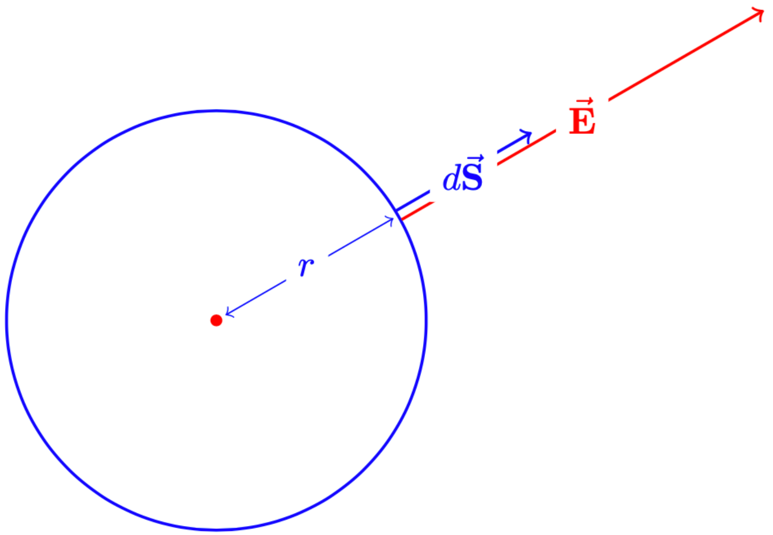


$$\text{Flux} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \Delta\vec{\mathbf{S}}_i$$

En considérant un nombre indénombrable de toutes petites surfaces infinitésimales...

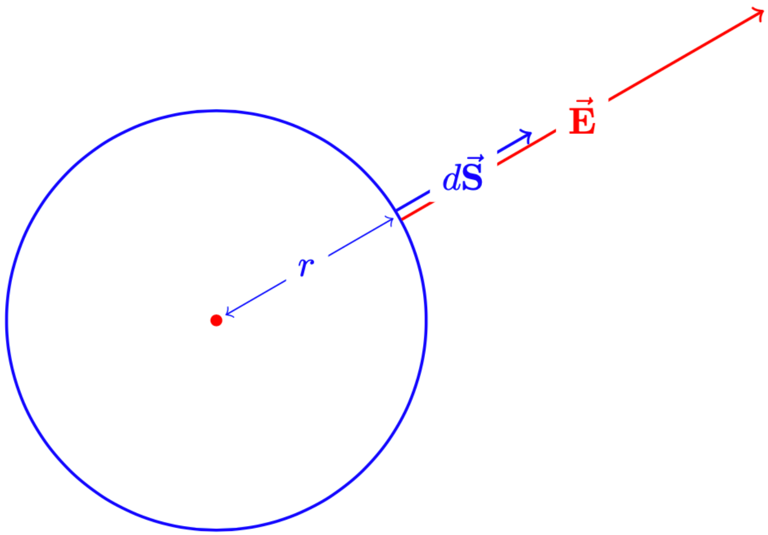
$$= \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

Sur la sphère
c'est évident…




La démonstration
du théorème de Gauss !

# Sur la sphère c'est évident…




$$\text{Flux} = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

En observant que le vecteur $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{q}{r^2}\,\vec{\mathbf{e}}_r$ et est normal à la sphère

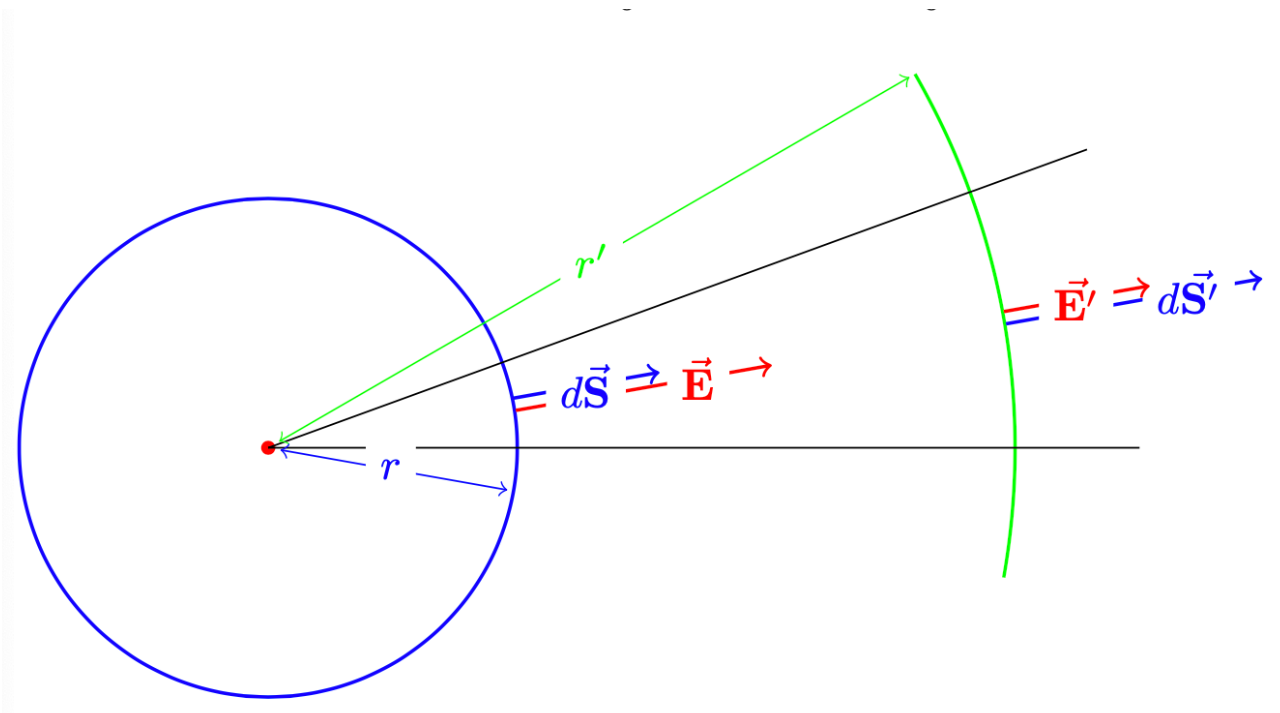
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\int_S dS$$

Et tenant compte que $\int_S dS$ est la surface de la sphère !

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

**La démonstration du théorème de Gauss !**

# Et sur une surface quelconque…




**La démonstration du théorème de Gauss !**

Les classiques applications usuelles !

# Un conducteur dans un champ électrique

$$\boxed{\oint_{\partial\Omega} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \;=\; \frac{1}{\epsilon_0}\int_{\Omega} \rho \, dV}$$

# Forme locale du théorème de Gauss


Un petit mot
d'analyse pour anticiper
ce que François va vous raconter !

# Forme locale du théorème de Gauss

$$\boxed{\oint_{\partial\Omega} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \;=\; \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho \, dV}$$

$$\Big[E_x(x+dx,y) - E_x(x,y)\Big]dy + \Big[E_y(x,y+dy) - E_y(x,y)\Big]dx \;=\; \frac{\rho}{\epsilon_0}\, dx\, dy$$

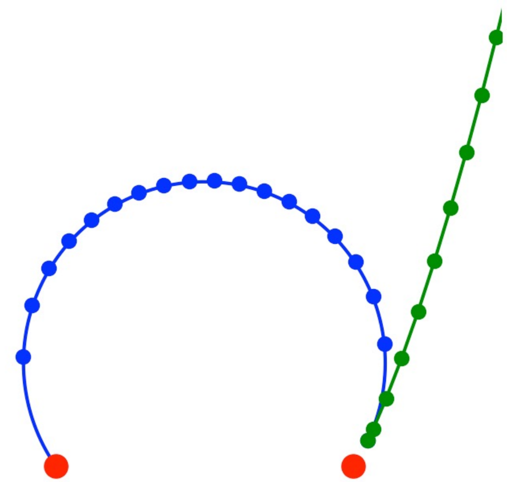
$\Big\downarrow$ En divisant par $dx\ dy$ !

$$\frac{E_x(x+dx,y) - E_x(x,y)}{dx} + \frac{E_y(x,y+dy) - E_y(x,y)}{dy} \;=\; \frac{\rho(x,y)}{\epsilon_0}$$

$\Big\downarrow$ En faisant tendre $dx$ et $dy$ vers zéro !

$$\frac{\partial E_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y)}{\partial y} \;=\; \frac{\rho(x,y)}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \;=\; \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$




- **Le flux électrique est une mesure de l'écoulement du champ électrique à travers une surface.**

- **Le flux sortant à travers une surface fermée est proportionnelle aux charges englobées par la surface.**

- **Les lignes des champs électrique ou gravitationnel ne sont quasiment jamais des trajectoires !**