UCLouvain

École polytechnique de Louvain

LEPL1201

Cours 6 : Travail, énergie, puissance

Let's start saving the world !

T. Pardoen




Année académique 2023-24

Agenda LEPL1201

S2	Mardi 26/9	**Cours 1** : **Unités, vecteurs, cinématique** + APP le jeudi
S3	Mardi 3/10	**Cours 2** : **Lois de Newton et gravité** (I) + APP le jeudi
S4	Mardi 10/10	**Cours 3** : **Force de Coulomb** + APP le jeudi
S5	Mardi 17/10	**Cours 4** : **Loi de Gauss** + APP le jeudi
S6	Mardi 24/10	**Cours 5** : **Forces de frottement** (and co) + APP le jeudi
S7	Mardi 31/10	**Cours 6 : Travail, énergie, puissance** + APP le jeudi
S8	Mardi 7/11	**Cours 7** : **Potentiel électrique et moments** + APP le jeudi
S9	Mardi 14/11	**Cours 8** : **Capacités et diélectriques** + APP le jeudi + **LABO 1**
S10	Mardi 21/11	**Cours 9** : **Mouvements circulaires** + APP le jeudi
S11	Mardi 28/10	**Cours 10** : **Mécanique des corps rigides** + APP le jeudi
S12	Mardi 5/12	**Cours 11** : **Courant électrique et résistance** + APP le jeudi
S13	Mardi 12/12	**Cours 12** : **Circuit RC** + APP le jeudi
S13		**LABO 2**

Mécanique du point, versus corps rigides, versus corps déformables

Cours 1 : Unités, vecteurs, cinématique

Cours 2 : Lois de Newton et gravité

Cours 3 : Force de Coulomb

Cours 4 : Loi de Gauss

Cours 5 : Forces de frottement

Cours 6 : Travail, énergie, puissance

Cours 7 : Potentiel électrique et moments

Cours 8 : Capacités et diélectriques

Cours 9 : Mouvements circulaires

Cours 10 : Mécanique des corps rigides

Cours 11 : Courant électrique et résistance

Cours 12 : Circuit RC

LABO 2

Mécanique du point

Mécanique des corps rigides (le début)

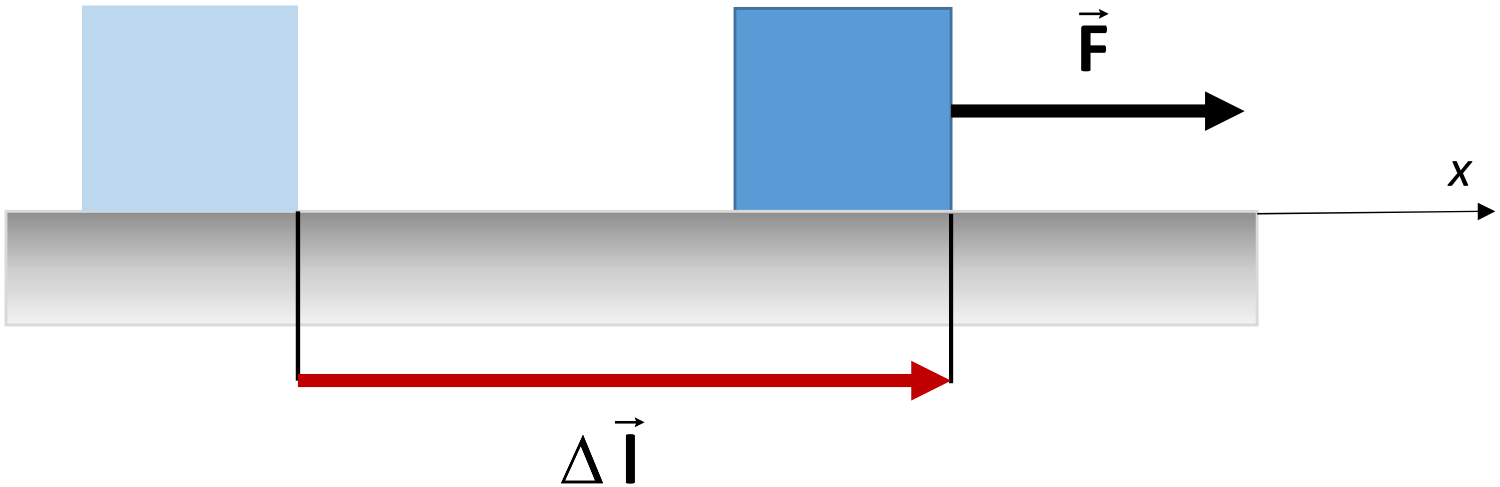
Pas de mécanique des corps déformables en LEPL1201 – pour plus tard

Agenda Cours 6

1. Le **travail mécanique**
2. (Longue) introduction sur **l'énergie et la puissance**
3. **Energie cinétique**
4. **Energie potentielle**
5. **Conservation de l'énergie mécanique**
6. **Quantité de mouvement et collisions**

Travail mécanique (I)

La mécanique, ça sert à quoi en pratique ?
Surtout à déplacer des corps (ce compris à les déformer ou à faire en sorte qu'ils supportent d'autres corps). **Quand une force déplace un corps sur une certaine distance, on dit qu'elle effectue un travail noté *W***, quantifié en joules, qui est le produit de la force par le déplacement.



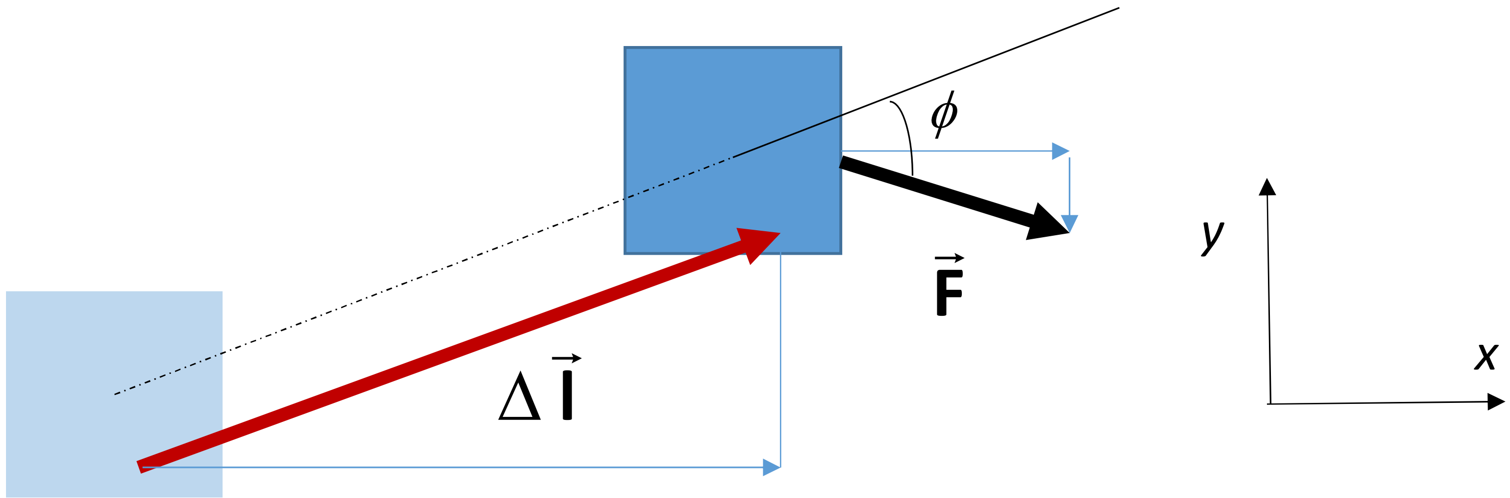
Si, comme ici, **la force est alignée avec le déplacement**, le travail est positif et est le produit de la norme de la force par la norme du déplacement.

$$W = F \Delta l$$

Unité : 1 J = 1N · m

Travail mécanique (II)

Dans un cas plus général, la trajectoire (toujours rectiligne) n'est pas nécessairement alignée avec un axe de référence et la force n'est pas nécessairement alignée avec la direction du mouvement. Dans ce cas, il faut généraliser la façon de calculer le travail.



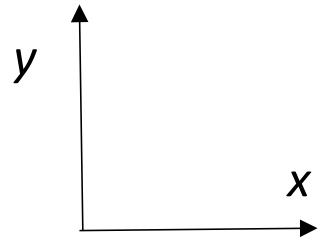
La composante x de la force fait un travail à travers le déplacement Δl_x, et idem pour F_y vis-à-vis de Δl_y; mathématiquement, cela s'écrit (en 3D)

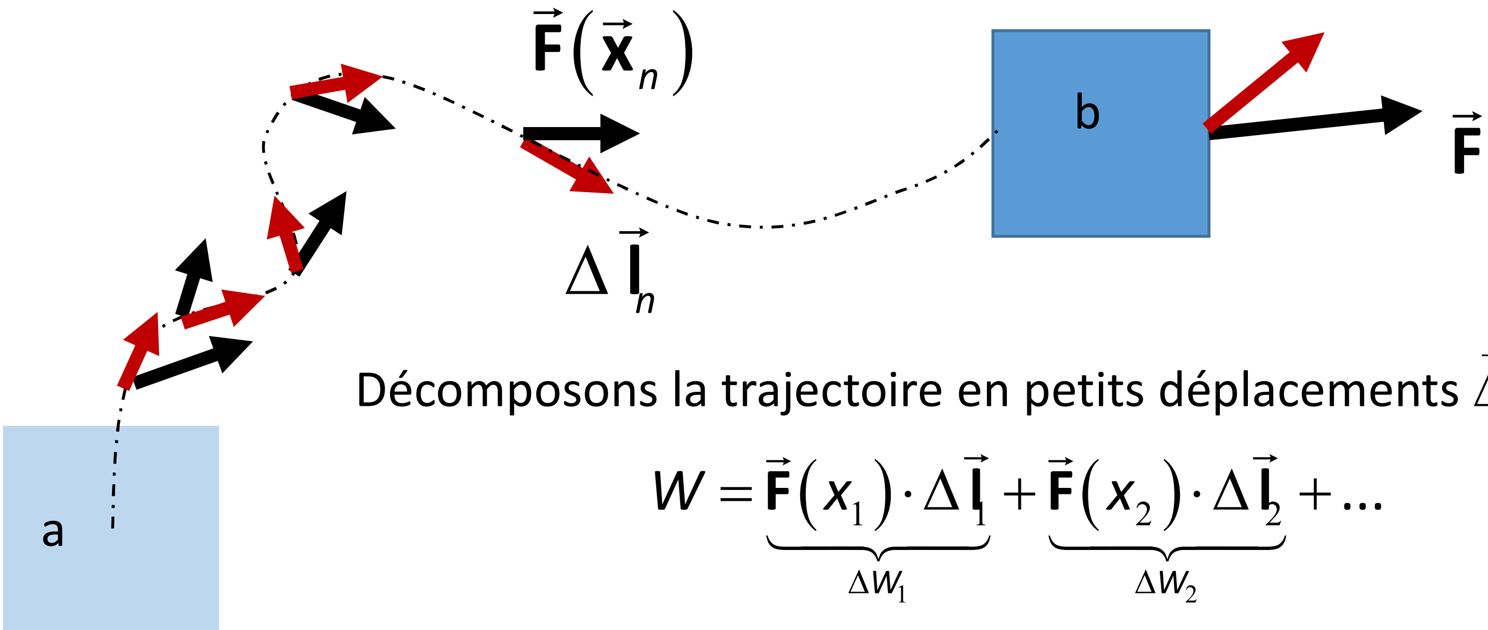
$$W = F_x \Delta l_x + F_y \Delta l_y + F_z \Delta l_z \equiv \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{l}} = F \Delta l \cos\phi$$

Votre première application du produit scalaire en méca !

Travail mécanique (III)

Dans le cas le plus général, la trajectoire (d'un point *a* à un point *b*) n'est pas nécessairement rectiligne et la force résultante pas nécessairement alignée avec le mouvement ni constante en norme. Dans ce cas, il faut encore généraliser la façon de calculer le travail.





Décomposons la trajectoire en petits déplacements $\Delta\vec{\mathbf{l}}$

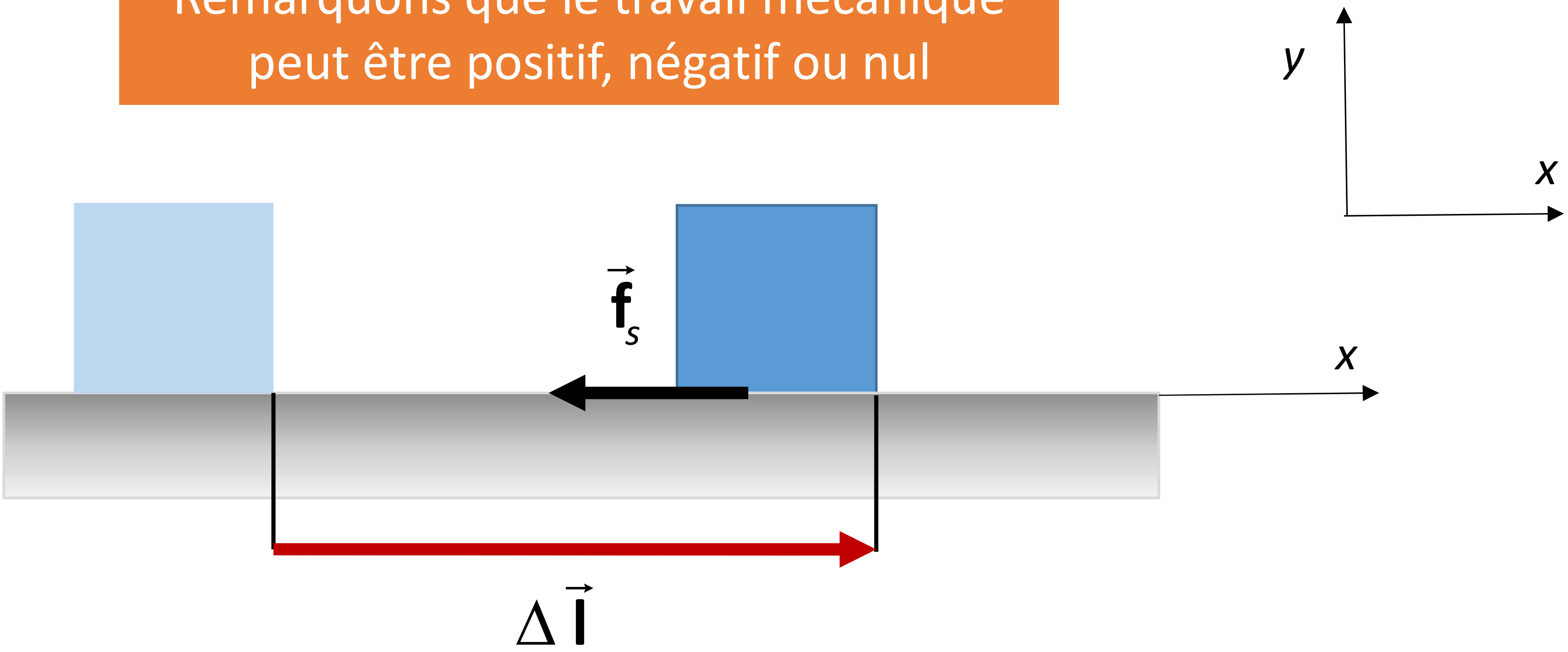
$$W = \underbrace{\vec{\mathbf{F}}(x_1)\cdot\Delta\vec{\mathbf{l}}_1}_{\Delta W_1} + \underbrace{\vec{\mathbf{F}}(x_2)\cdot\Delta\vec{\mathbf{l}}_2}_{\Delta W_2} + \ldots$$

Et en passant à la limite de tous petits segments :

$$W = \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{l}}$$

Travail mécanique (IV)

Remarquons que le travail mécanique peut être positif, négatif ou nul

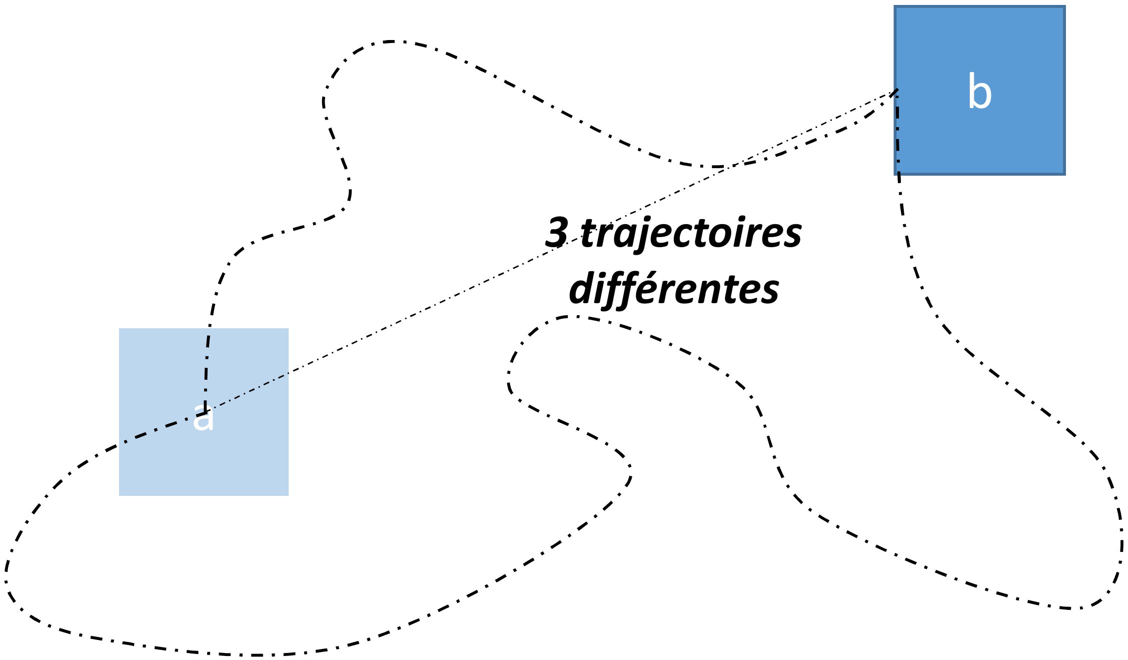


$$W_s \equiv \int_a^b \vec{\mathbf{f}}_s \cdot d\vec{\mathbf{l}} \leq 0$$

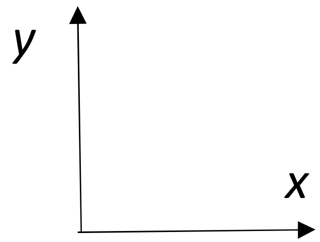
Par exemple, **le travail des forces de frottement est toujours négatif**, vu que les forces de frottement s'opposent au mouvement.

Travail mécanique (V)

Dans certains cas, le travail effectué ne dépend pas du chemin et dans d'autres cas bien. **Les forces sont dites conservatives quand le travail ne dépend pas du chemin, et non-conservatives sinon.**

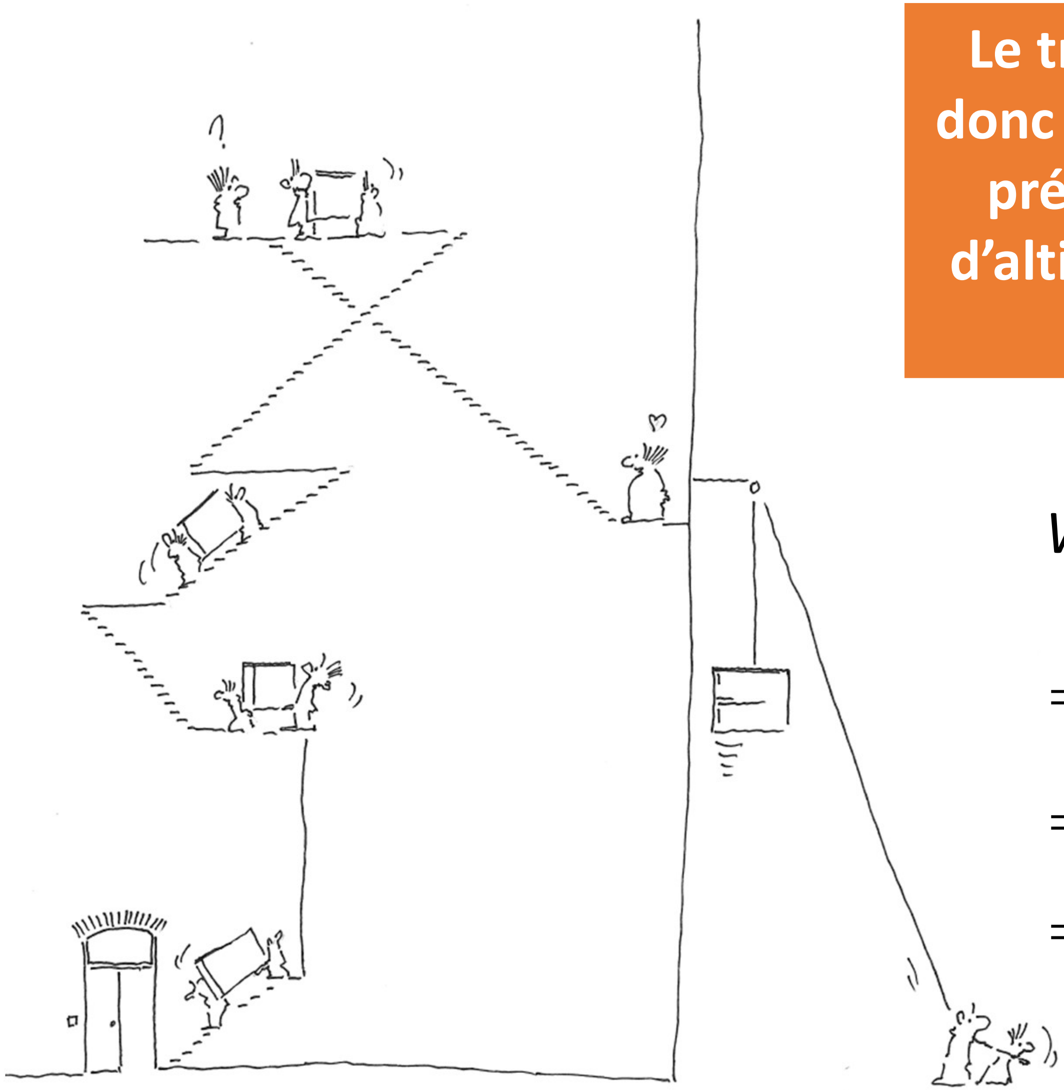


$$W = \int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}}$$



Les forces conservatives comprennent les forces gravitationnelles et électriques, ainsi que le travail effectué par un ressort parfait. Par contre, **les forces de frottement et visqueuses sont non conservatives** – dans ce cas, plus le chemin est long, plus il faut faire de travail (qui est dissipé en chaleur).

Travail mécanique (VI)



Le travail de la force de gravité ne dépend donc que des positions finale et initiale, plus précisément, seulement de la différence d'altitude ! La force de gravité est une force conservative.

$$W = \int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_a^b m\vec{\mathbf{g}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = m\vec{\mathbf{g}} \cdot \int_a^b d\vec{\mathbf{l}}$$

$$= m\vec{\mathbf{g}} \cdot \left(\vec{\mathbf{l}}_b - \vec{\mathbf{l}}_a \right)$$

$$= m\Big(0\left(l_{bx} - l_{ax}\right) - g\left(l_{by} - l_{ay}\right) + 0\left(l_{bz} - l_{az}\right)\Big)$$

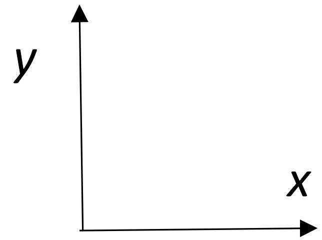
$$= -mg\Delta h$$

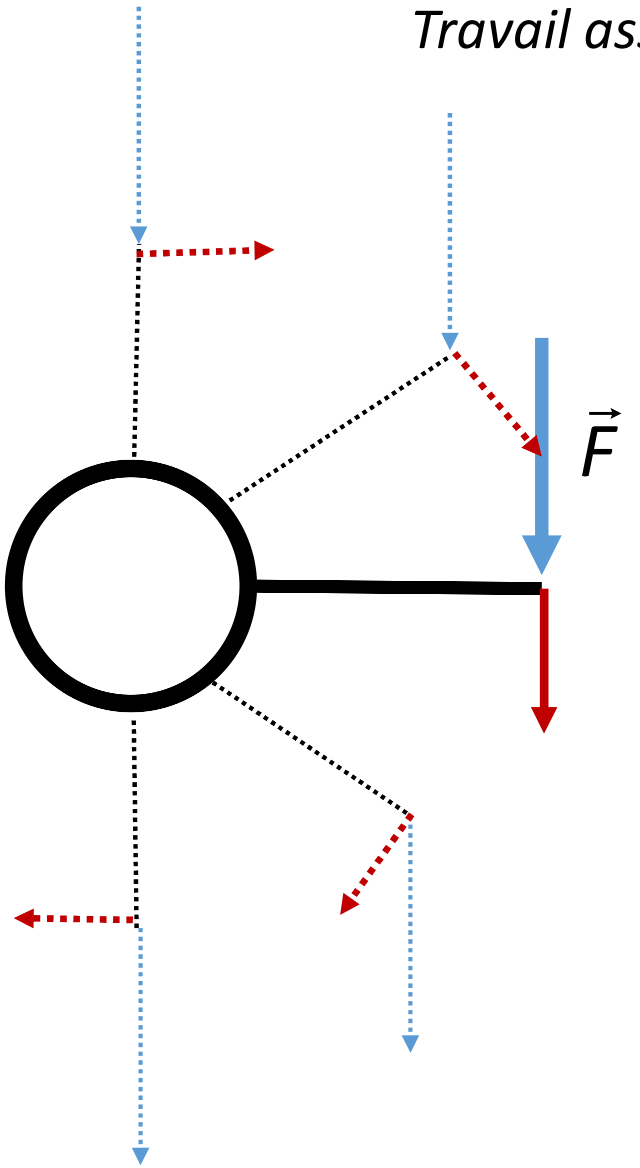
$$W = \int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}}$$

Travail mécanique (VII)

Application

Travail associé à un coup de pédale





Vous aborderez plus rigoureusement les mouvements tournants au cours 9 – on peut toutefois y regarder approximativement:

force par exemple = 250N qui va déplacer son point d'application de ~20 cm; donc, travail d'un coup de pédale ici 50 J (mais on peut certainement produire un travail 10 fois moindre ou 5 fois supérieur – si c'est Wout ou Remco) … maintenant, ce qui compte aussi, c'est le rythme de pédalage … voir juste après

Puissance

La puissance *P* c'est le travail effectué par unité de temps. Elle s'exprime donc en Joule par seconde, ou Watt : 1 W = 1 J/s =1 Nm/s.

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta \vec{\mathbf{l}}}{\Delta t} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{l}}}{\Delta t} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

La puissance instantanée associée à une force qui déplace sont point d'application à une certaine vitesse est donc le produit scalaire de la force par la vitesse.

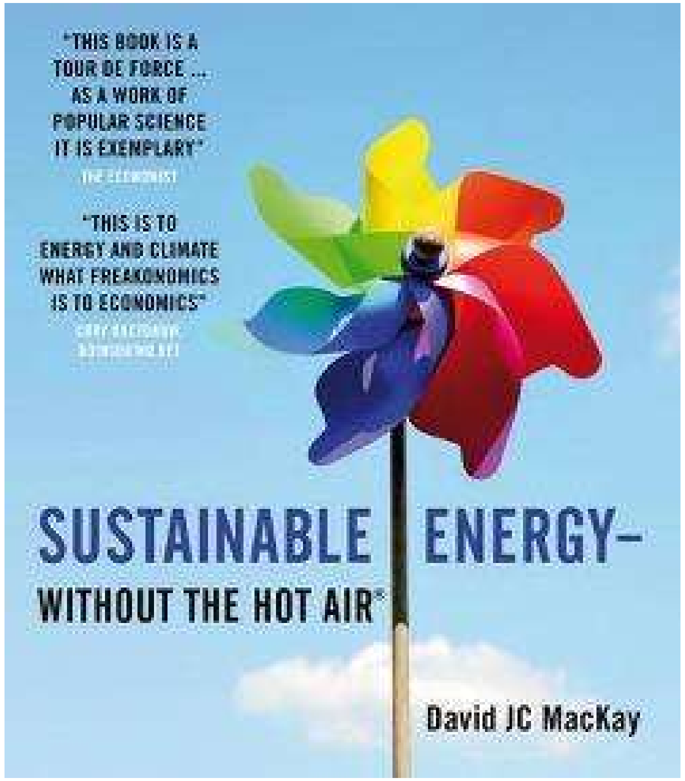
Tout comme pour le travail, la puissance développée par une force de frottement est négative ou nulle.

On voir aussi que la puissance développée par une force normale à la vitesse est nulle.

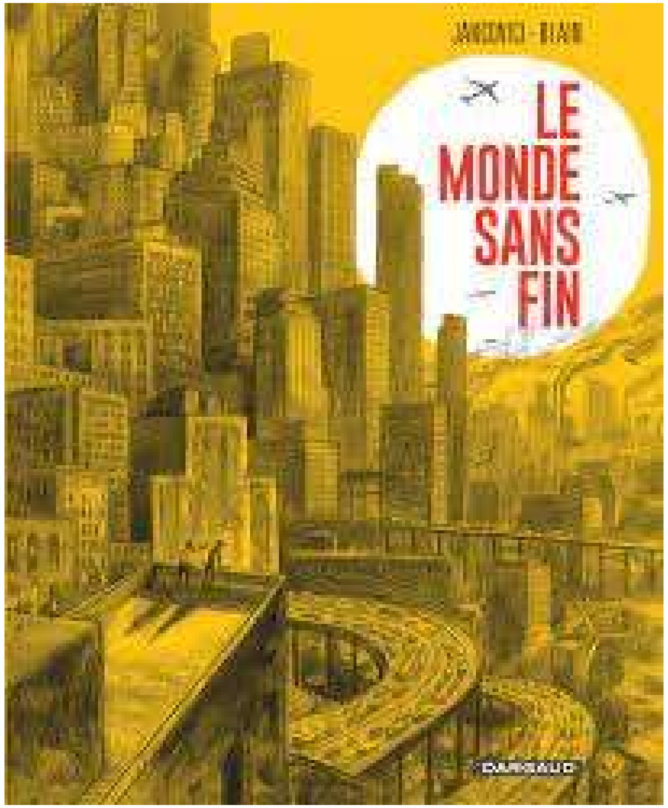
Agenda Cours 6

1. Le **travail mécanique**
2. Introduction sur **l’énergie et la puissance**
3. **Energie cinétique**
4. **Energie potentielle**
5. **Conservation de l’énergie mécanique**
6. **Quantité de mouvement et collisions**

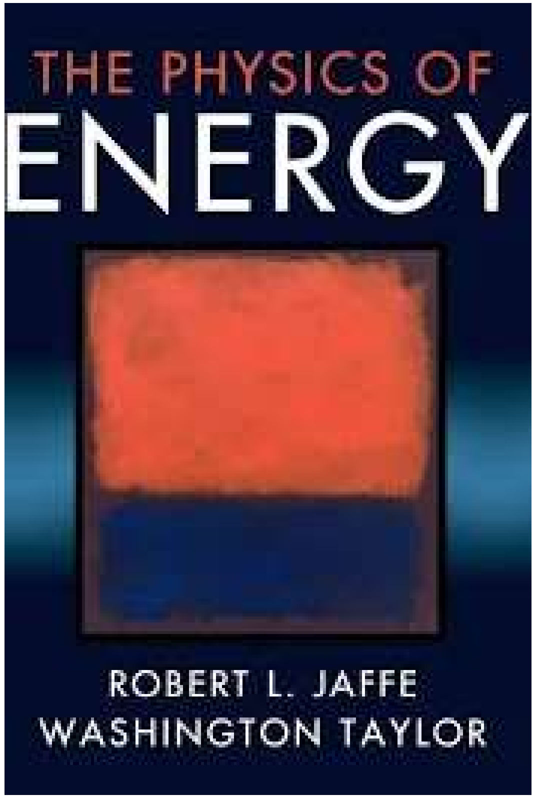
Mes sources préférées pour le thème de l'énergie



Accès libre sur internet, D. MacKay fait, à la main, plein de petits calculs et analyses simples pour voir comment on pourrait vivre (en UK) sans énergie fossile, en jouant à la fois du côté production et consommation.



Un must pour comprendre simplement tous les enjeux techniques, les limites de l'épure fixées par la nature et aborder le versant technologique de la crise énergétique.



Un vrai bon bouquin technique complet et très bien illustré sur tous les aspects de l'énergie – niveau physique assez avancé (mais il y a pire !)

Intro énergie (I)

Pour effectuer un travail mécanique, il faut de l'énergie.
L'énergie est un concept très général et abstrait, même si l'énergie permet de réaliser des actions très concrètes *(et bien d'autres choses que du travail mécanique)*.

L'énergie est une quantité associée à l'évolution d'un système physique dans le temps. **Tout système isolé décrit par des lois physiques qui ne changent pas dans le temps possède une quantité qui se conserve, appelée énergie.** *Vous abordez le concept d'énergie de façon plus large et rigoureuse dans vos cours de chimie et thermodynamique.*

L'énergie c'est ce qui permet de faire évoluer les systèmes vivants ou inerte (la nature) d'un état à un autre. L'énergie est donc la capacité d'exécuter un travail. *Mais on peut faire autre chose avec l'énergie qu'exécuter un travail mécanique* **…**

L'énergie est de même nature que le travail, avec le Joule comme unité.

Intro énergie (II)

1J ce n’est pas beaucoup du tout !

1J permet de déplacer 100g un mètre plus haut.

1J au niveau thermique, permet de changer la T° de 1 litre d’eau de 0.00025 °C

1J permet de faire fonctionner une ampoule d’éclairage classique pendant une fraction de seconde.

1J permet de faire avancer une Tesla de 1.6 mm.

Intro énergie (III)

1J ce n’est vraiment pas beaucoup du tout (bis)

Un **citoyen belge** consomme par an ~20 10^{10}J d’énergie primaire (voir après), et donc, **~ 5 10^8 J / par jour**
(= 500 000 000 J = un demi milliard de joules par jour !!)

Donc, on utilise souvent comme unité des kJ (mille J), MJ (1 million de J), GJ (1 milliard de J), mais aussi d’autres unités.

Retour sur la puissance

On utilise souvent le kW, le MW ou GW **car un Watt, ce n'est donc pas beaucoup non plus** (pour les besoins humains) – pas suffisant pour allumer une lampe LED économique.

On utilise souvent une unité d'énergie appelée **kilowatt-heure**, **notée kWh**.

1 kWh = 1000 W x 1 heure = 1000 J/s x 3600s = 3600000 J = 3.6 MJ

En effet, beaucoup de nos besoins quotidiens font appel à des technologies qui ont des puissances plus souvent autour d'une fraction à quelques kW (sèche-cheveux, four, auto, vélo électrique, etc etc).

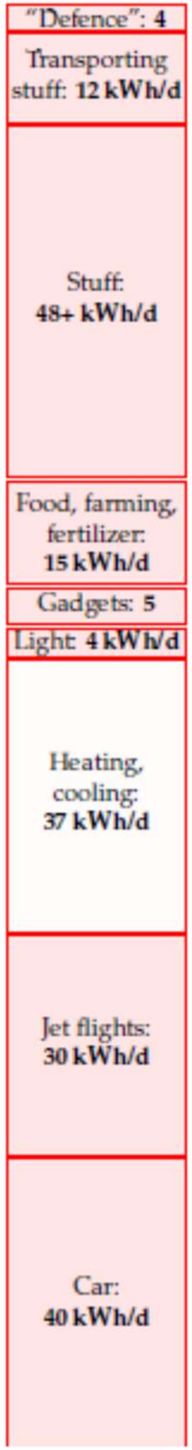
Intro énergie (IV)

Nos besoins énergétiques sont énormes

Un citoyen belge a besoin de 500 MJ par jour. **Combien de temps doit il rouler en vélo** (relié à un mécanisme de récupération/transformation d'énergie) **pour produire toute l'énergie dont il a besoin en un jour ?**

Un (très) bon cycliste produit en pédalant (*vélo d'appartement*):

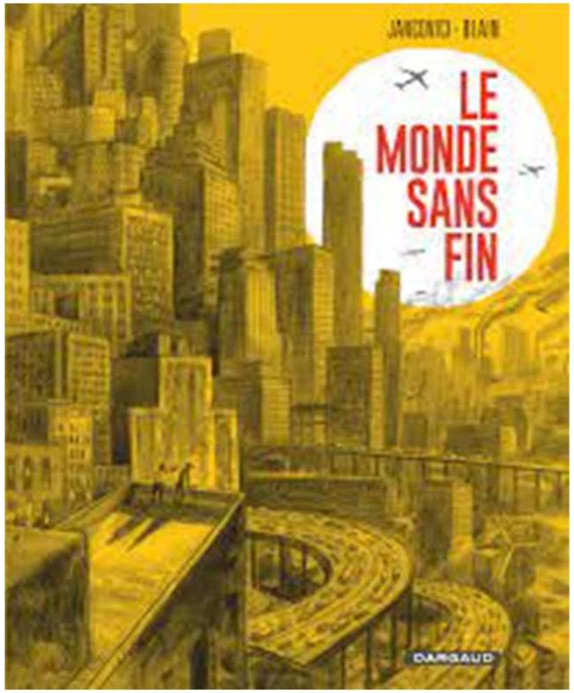
- 100 W = 100 J/s environ en continu (= 250 N – ou 25kg – pour déplacer la pédale d'environ 0.20 m toutes les demi secondes)
- donc 3600 x 100J chaque heure = 360 000 J
- en 24h : 8 640 000 J = 8.64 MJ – c'est loin des 500 MJ
- Il faut donc plus de 50 cyclistes roulant tout le temps pour produire l'énergie nécessaire à une journée de vie (et ils doivent se nourrir et donc consommer de l'énergie – donc il en faut plus) !



McKay

Intro énergie (V)

Les besoins énergétiques de l'humanité sont énormes

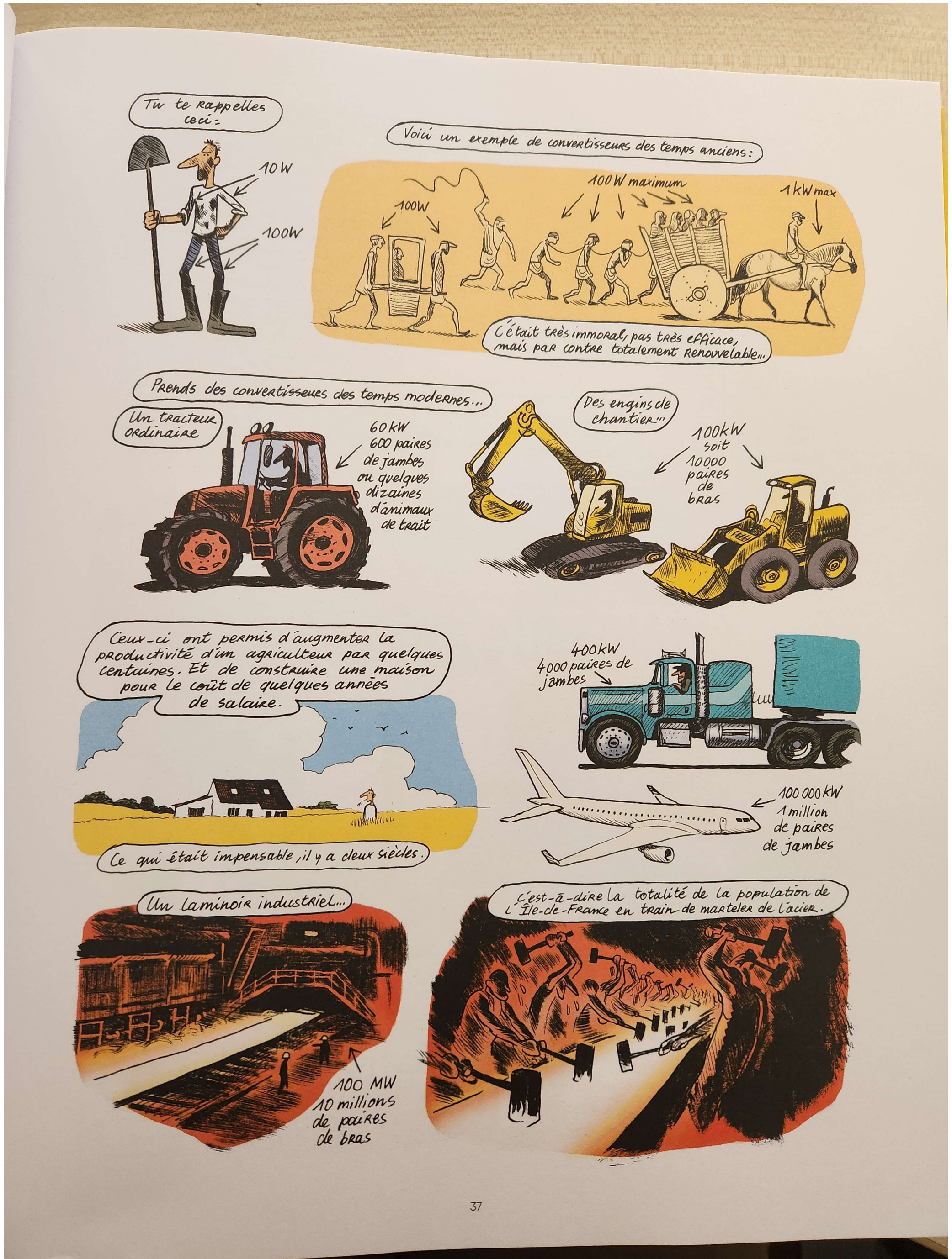


Intro énergie (VI)

Les besoins énergétiques de l'humanité sont énormes

La force musculaire est donc bien limitée pour produire l'énergie nécessaire à l'humanité.

C'est cela la révolution industrielle : la mise à disposition de grandes quantités d'énergie permettant de s'affranchir de la force des bras (ou des jambes du cheval). Le grand truc : le pétrole (qui a suivi le charbon).



Intro énergie (VII)

5 types d'énergie

1. Mécanique
2. Chimique
3. Electromagnétique (dont électrique)
4. Nucléaire
5. Thermique

Intro énergie (VIII)

Transformation de l'énergie et rendements

Le point de départ est une source d'énergie primaire disponible telle quelle dans la nature

surtout chimique, un peu du nucléaire, un petit rien de mécanique, thermique et électrique.

En fait, **bien souvent cette énergie primaire n'est pas disponible sans une première étape "d'extraction"**

casser les molécules chimiques, casser les noyaux des atomes, récupérer le vent et le courant de l'eau, la chaleur du sol etc. rarement l'énergie est utilisée telle quelle (voyez vous des exemples où vous utilisez l'énergie telle qu'elle?)

L'énergie qui sort de cette première étape est souvent sous une autre forme/nature que sa nature initiale.

Intro énergie (IX)

Transformation de l'énergie et rendements

L'humanité a surtout besoin d'énergie mécanique (pour le mouvement) et de chaleur, et un peu d'électricité directement (pour les ordinateurs et la lumière).

Pourquoi parle t'on tant de l'électricité alors ?
La force de l'électricité (voir details après) est qu'elle se transporte extrêmement bien, quasi sans perte et très vite. Donc, on part de formes primaires disponibles et on les transforme souvent en électricité (et de plus en plus) pour transporter l'énergie (jusqu'à la maison par ex.) pour ensuite faire subir à l'électricité de nouvelles transformations en mécanique ou chaleur (qui, elles, se transportent moins bien)

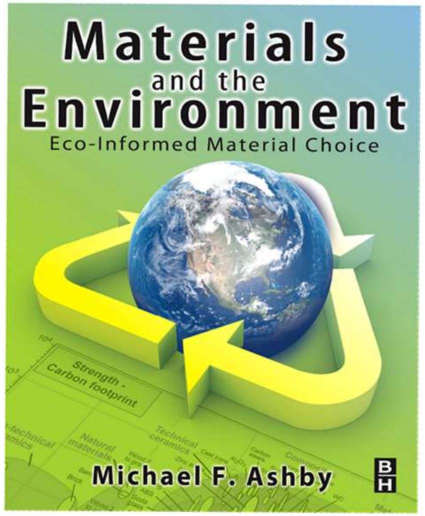
Intro énergie (X)

Transformation de l'énergie et rendements

Mauvaise nouvelle : l'énergie se transforme plus ou moins facilement d'une forme à une autre mais toujours avec **des pertes** – on parle **du rendement de la transformation**.

Table 2.1 Some approximate efficiency factors for energy conversion

Energy conversion path	Efficiency, direct conversion (%)	Efficiency relative to oil equivalence (%)	Associated carbon (kg CO_2 per useful MJ)
Fossil fuel to thermal, enclosed system	100	100	0.07
Fossil fuel to thermal, vented system	65–75	70	0.10
Fossil fuel to electric	33–39	35	0.20
Fossil fuel to mechanical, steam turbine	28–42	40	0.17
Fossil fuel to mechanical, gas turbine	46–50	48	0.15
Electric to thermal	100	35	0.20
Electric to mechanical, electric motors	85–93	31	0.23
Electric to chemical, lead-acid battery	80–85	29	0.24
Electric to chemical, advanced battery	85–90	31	0.23
Electric to em radiation, incandescent lamp	15–20	6	1.17
Electric to em radiation, LED	80–85	30	0.23
Light to electric, solar cell	10–20	—	0

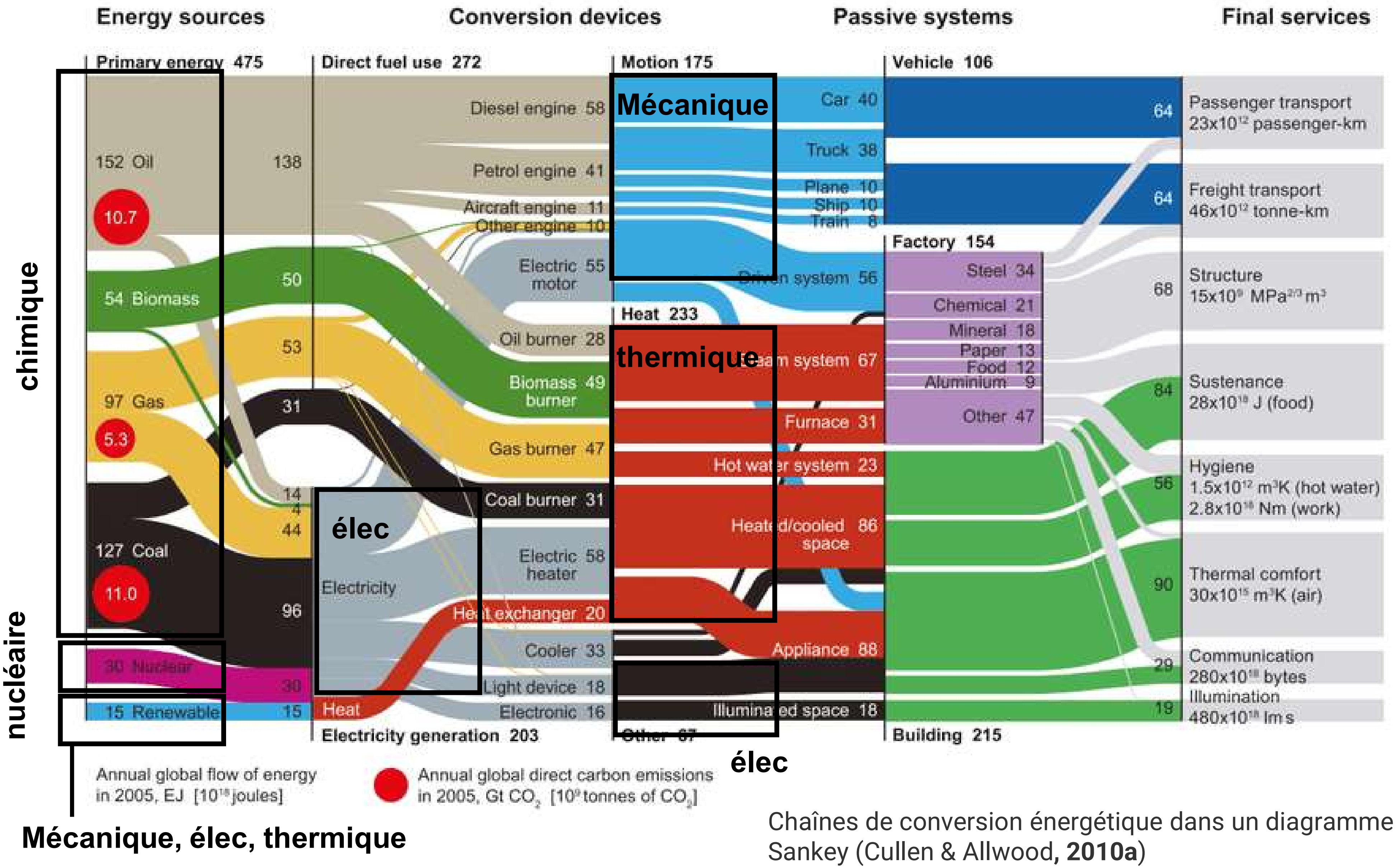


Donc, non seulement, on a besoin de beaucoup d'énergie mais on tend à perdre souvent bien plus que la moitié en la "cultivant" !

Intro énergie (XI)

1. Mécanique
2. Chimique
3. Electromagnétique (dont électrique)
4. Nucléaire
5. Thermique

The big picture



Chaînes de conversion énergétique dans un diagramme de Sankey (Cullen & Allwood, **2010a**)

Intro énergie (XII)

Dans ce cours, on ne s'intéresse qu'à deux formes d'énergie: (1) l'énergie mécanique et (2) l'énergie électrique/électromagnétique.

(1) **L'énergie mécanique** ne peut se trouver que sous deux formes

a) **Dans des corps en mouvement – on parle d'énergie cinétique;**
b) **Sous forme potentielle, dans des corps stockant la capacité de pouvoir libérer du travail (gravité – ressort) – on parle d'énergie (mécanique) potentielle.**

Cette énergie mécanique va permettre d'effectuer un travail (les autres formes d'énergie aussi).

Soit, cette énergie mécanique est présente dans la nature et on peut l'utiliser telle quelle ou en la transformant pour produire un travail.

Soit cette énergie mécanique est le fruit d'une autre transformation (par exemple depuis un moteur électrique).

Intro énergie (XIII)

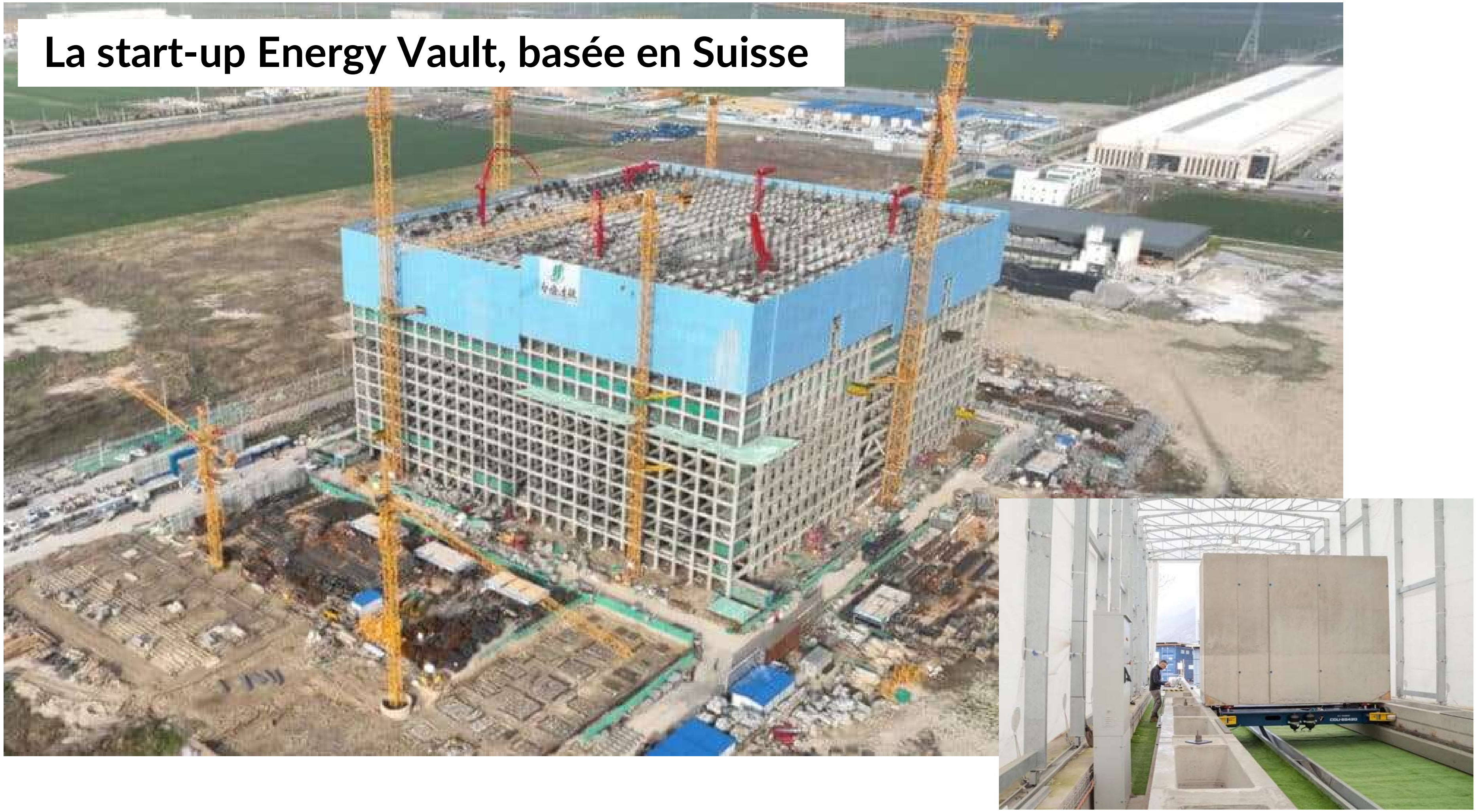
Sources d'énergie cinétique disponibles (*quelque chose en mouvement naturellement*) **ou de l'énergie potentielle disponible directement** (*quelque chose en hauteur ou comprimé naturellement*)

1. **Le vent**: une masse d'air qui se déplace (horizontalement surtout) à une vitesse *v*
2. **Les marées**: une masse d'eau qui se déplace horizontalement à une vitesse *v* (va-et-vient)
3. **La houle**: une masse d'eau qui se déplace de haut en bas
4. **L'écoulement d'eau** (fleuves, rivières etc): masse d'eau qui se déplace
5. **De l'eau en hauteur** (barrages): masse d'eau qui contient de l'énergie potentielle recupérable via transformation en énergie cinétique
6. **Mouvement d'êtres vivants** (chevaux, cyclistes, etc)
7. Peu d'exemples de solides inertes possédant naturellement de l'énergie mécanique utile (ex. une grosse pierre sur une colline)

Intro énergie (XIV)

Exemple récent de stockage gravitaire

La start-up Energy Vault, basée en Suisse



Intro énergie (XV)

Dans ce cours, on ne s'intéresse qu'à deux formes d'énergie: (1) l'énergie mécanique et (2) l'énergie électrique/électromagnétique.

Vous verrez plus tard dans le cours qu'au niveau électrique/électromagnétique, on a des concepts équivalents d'énergie potentielle et cinétique, liées au potentiel électrique et au mouvement des charges.

Intro énergie (XVI)

L'énergie d'un système isolé se conserve – on le montre en thermodynamique. Mais ici, dans le cours 6, on ne considère que l'énergie mécanique (cinétique + potentielle) qui ne sera pas toujours conservée; *on va analyser cela en détail un peu plus loin.*

Agenda Cours 6

1. Le **travail mécanique**
2. Introduction sur **l'énergie et la puissance**
3. **Energie cinétique**
4. **Energie potentielle**
5. **Conservation de l'énergie mécanique**
6. **Quantité de mouvement et collisions**

Creusons maintenant l'énergie cinétique

Energie cinétique (I)

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

Repartons de la première loi de Newton

$$m\vec{\mathbf{a}}(t) = \Sigma\vec{\mathbf{F}}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \Sigma\vec{\mathbf{F}} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(m\vec{\mathbf{v}}) = \Sigma\vec{\mathbf{F}}}$$

Truc: on multiplie membre de gauche et droite (en produit scalaire) par la vitesse

$$\boxed{\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(m\vec{\mathbf{v}})\cdot\vec{\mathbf{v}} = (\Sigma\vec{\mathbf{F}})\cdot\vec{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = (\Sigma\vec{\mathbf{F}})\cdot\vec{\mathbf{v}}}$$

$$\frac{d\left(m\vec{\mathbf{v}}\right)}{dt}\cdot\vec{\mathbf{v}} = m\left(\frac{dv_x}{dt}v_x + \frac{dv_y}{dt}v_y + \frac{dv_x}{dt}v_y\right)$$
$$= m\left(\frac{1}{2}\frac{dv_x^2}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dv_y^2}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dv_z^2}{dt}\right)$$
$$= \frac{1}{2}m\frac{d\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{dv^2}{dt}$$

C’est un scalaire et, pour rappel,

$$v \equiv \|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}$$

La puissance des forces correspond à une variation de l’énergie cinétique

Ensuite, on prend l'intégrale de a à b de chaque côté

Energie cinétique (II)

$$\Leftrightarrow \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) dt = \int_a^b \left(\Sigma\vec{\mathbf{F}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}}\,dt = \Sigma\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\,dt = \Sigma\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}dt$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) dt = \Sigma\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{mv^2}{2}\right]_a^b = W_{a\to b}$$

$$\Leftrightarrow \Delta K_{cin} = W_{a\to b}$$

Ainsi donc, le travail effectué sur le corps de masse *m* par la résultante des forces en le déplaçant de *a* à *b* va permettre un changement de la quantité d'énergie associée à cette masse en mouvement. C'est l'énergie cinétique qui s'écrit:

$$K_{cin} = \frac{mv^2}{2}$$

Energie cinétique (III)

Un corps de masse *m* se déplaçant à une vitesse *v* contient une certaine quantité d'énergie, appelée énergie cinétique, qui est proportionnelle à la masse et au carré de la vitesse.

$$K_{cin} = \frac{mv^2}{2} \equiv \frac{m\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{2}$$

Voilà qui explique pourquoi on est si strict sur les limites de vitesse en auto. Lors d'un accident, l'énergie cinétique est transformée surtout en énergie d'impact/déformation de la voiture. A 100km/h, l'énergie cinétique est 4 fois supérieure à celle emmagasinée à 50km/h.

Agenda Cours 6

1. Le **travail mécanique**
2. Introduction sur **l'énergie et la puissance**
3. **Energie cinétique**
4. **Energie potentielle**
5. **Conservation de l'énergie mécanique**
6. **Impulsions et collisions**

Creusons maintenant l'énergie potentielle

Energie potentielle (I)

L'énergie potentielle *U* est une grandeur définie uniquement par rapport à des forces conservatives. L'énergie potentielle est attribuable aux positions relatives d'un (ou plusieurs) corps, sa valeur est donc toujours relative à une position de référence et donc donnée à une constante près. **La variation de *U*, ΔU, est uniquement associée au travail des forces conservatives.**

$$\Delta U = -W_{cons}$$

Energie potentielle (II)

U associée au champ gravitationnel

La force de gravitation est conservative. Le travail de la force de gravité pour un changement de position de *a* à *b* s'écrit (en utilisant l'axe *y* comme l'axe vertical et Δh la variation d'altitude):

$$W = \int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_a^b m\vec{\mathbf{g}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = m\vec{\mathbf{g}} \cdot \int_a^b d\vec{\mathbf{l}} = m\vec{\mathbf{g}} \cdot \left(\vec{\mathbf{l}}_b - \vec{\mathbf{l}}_a\right)$$

$$= m\left(0\left(l_{bx} - l_{ax}\right) - g\left(l_{by} - l_{ay}\right) + 0\left(l_{bz} - l_{az}\right)\right)$$

$$= -mg\Delta h$$

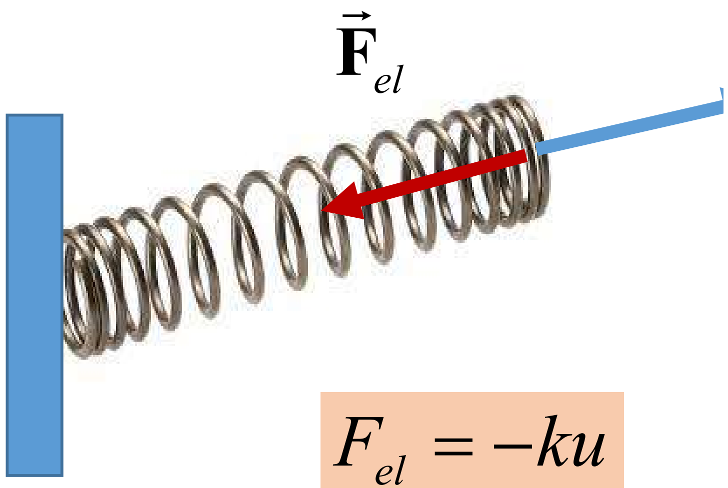
$$\boxed{\Delta U = -W_{cons}}$$

$$\boxed{\Delta U = mg\Delta h}$$

$$\boxed{U = \underbrace{U_0}_{\substack{\text{référence} \\ \text{prise à altitude zéro} \\ \text{par convention} \\ \text{et donc =0}}} + mgh = mgh}$$

Energie potentielle (III)

U associée à un ressort



$$F_{el} = -ku$$

Attention erreur au cours 5: un signe moins manquait

$$W = \int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{u}} \underbrace{=}_{\text{car force et dépl sont alignés}} \int_a^b F du = \int_a^b -kudu$$

$$= -\left[k\frac{u^2}{2} \right]_a^b = -\frac{1}{2}k\left(u_b^2 - u_a^2\right)$$

$$\Delta U = -W_{cons}$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}k\left(u_b^2 - u_a^2\right)$$

$$U = \underbrace{U_0}_{\substack{\text{souvent pris égale à 0} \\ \text{quand le ressort est déchargé}}} + \frac{1}{2}ku^2 = \frac{1}{2}ku^2$$

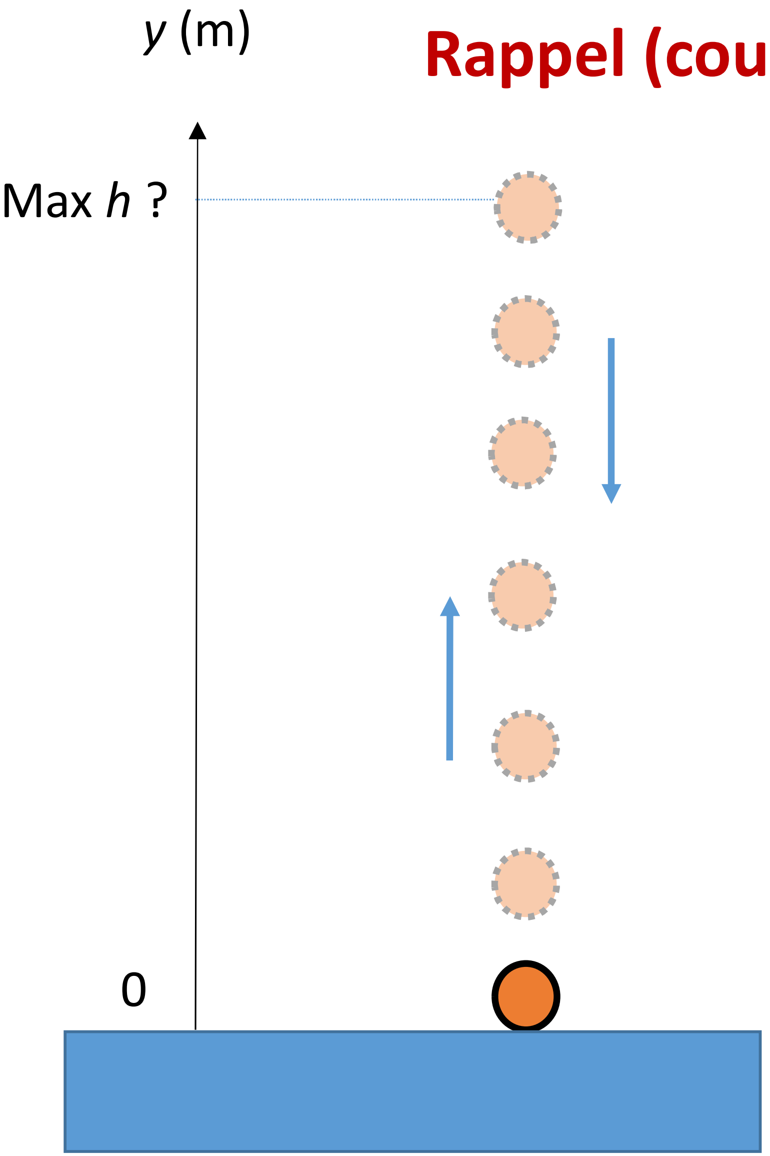
1ère application énergie potentielle versus énergie cinétique

Le jet d'un caillou vers le haut

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2r(t)}{dt^2}$$

$$v(t)=\frac{dr(t)}{dt}$$

Rappel (cours 1)



L'objet est lancé à partir du sol avec une vitesse v_0 sous une accélération de –g.

Quelle est l'évolution de la vitesse et de la position avec le temps, en particulier la hauteur maximum?

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}\Leftrightarrow dv(t)=a(t)dt$$

$$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t a\,dt\Leftrightarrow v-v_0=\left[-gt\right]_0^t\Leftrightarrow \boxed{v(t)=v_0-gt}$$

$$dy(t)=v(t)dt\Leftrightarrow\int_0^y dy=\int_0^t(v_0-gt)dt$$

$$\Leftrightarrow y=\left[v_0t-\frac{gt^2}{2}\right]_0^t\Leftrightarrow \boxed{y(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}}$$

1ère application énergie potentielle versus énergie cinétique

Le jet d'un caillou vers le haut

$$y(t)=v_0 t-\frac{gt^2}{2} \qquad v(t)=v_0-gt$$

Énergie cinétique :

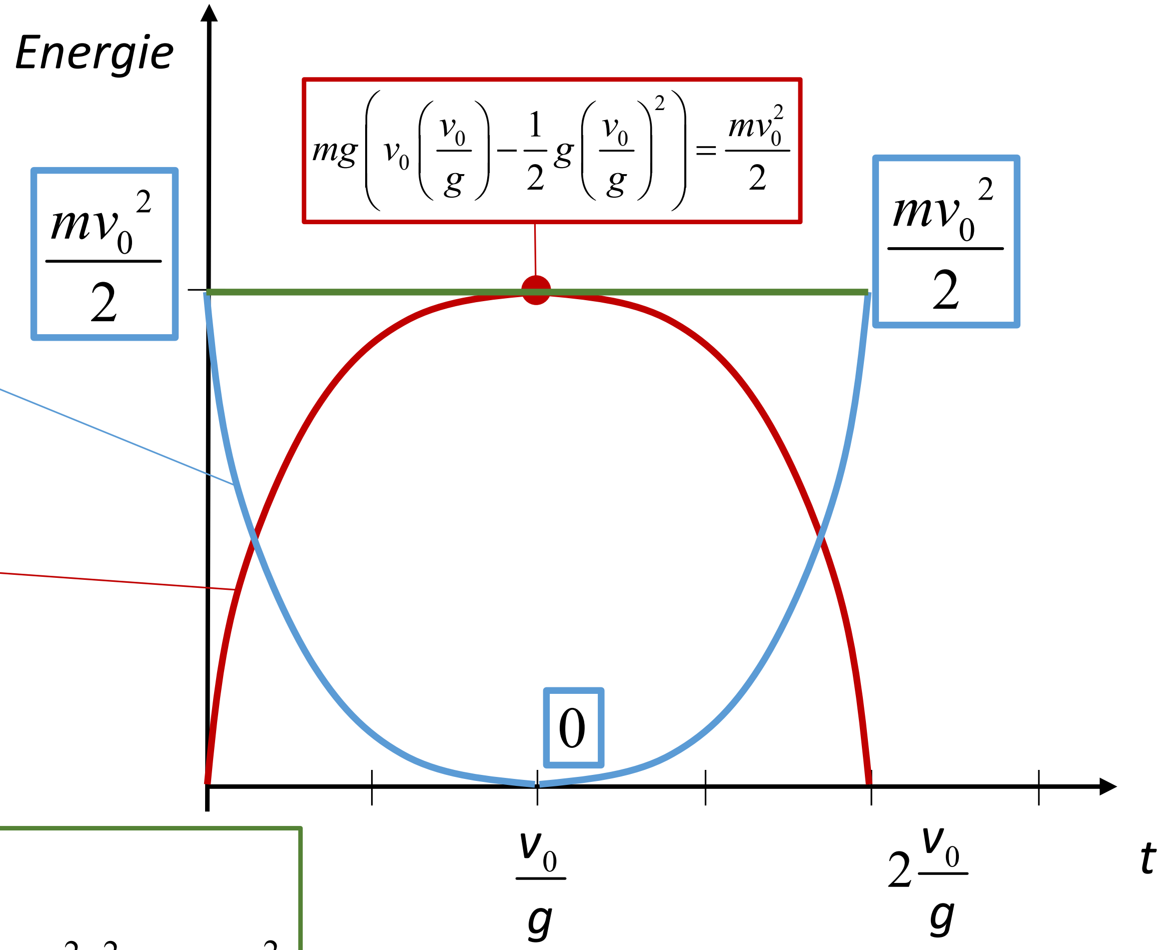
$$\boxed{K_{cin}=\frac{m\left(v_0-gt\right)^2}{2}}$$

Energie potentielle :

$$\boxed{U_{pot}=mg\underbrace{\left(v_0 t-\frac{gt^2}{2}\right)}_{h}}$$

Energie mécanique totale :

$$\boxed{\begin{aligned}&E_{mech}=K_{cin}+U_{pot}\\&=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{mg^2t^2}{2}-\frac{2mv_0gt}{2}+mgv_0t-\frac{mg^2t^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}\end{aligned}}$$



1ère application énergie potentielle versus énergie cinétique

Le jet d'un caillou vers le haut

2 constats

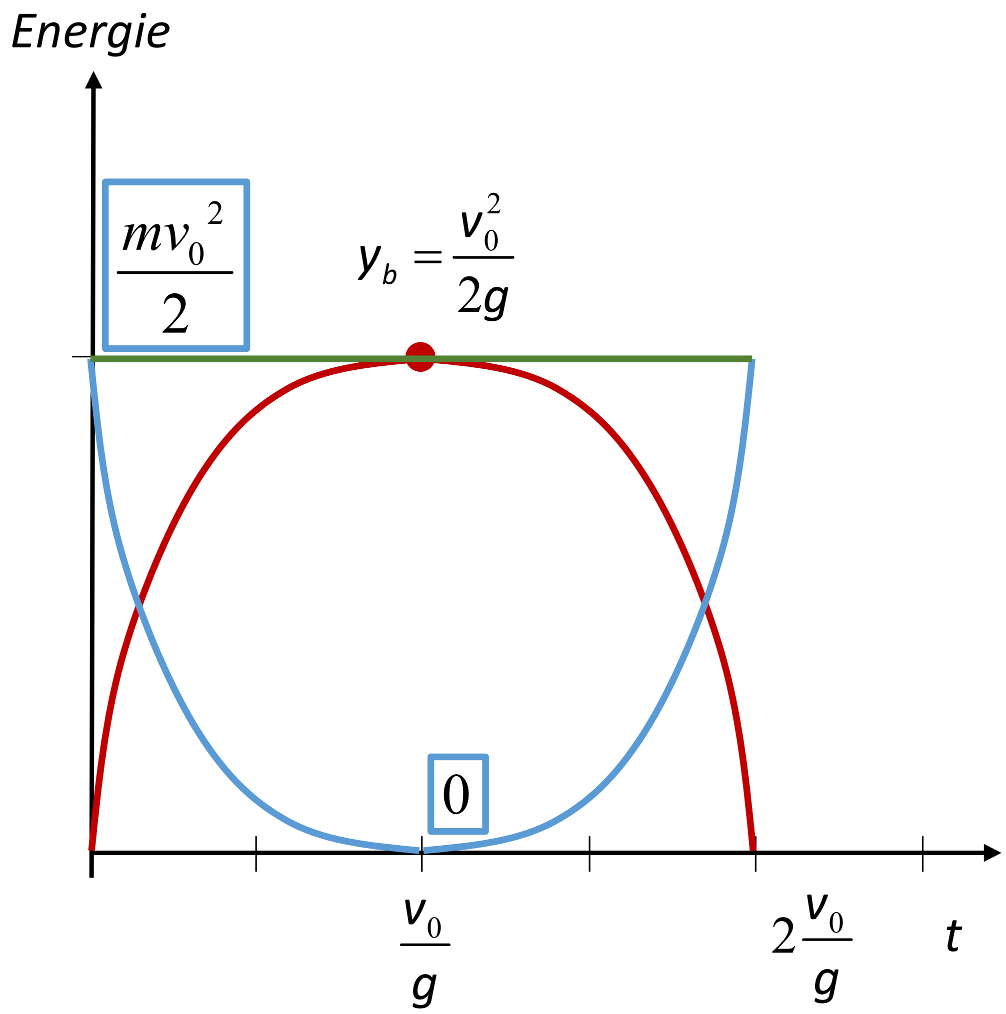
(1) **Le travail effectué par la force de gravité** sur le caillou durant la montée pour passer de $y_a = 0$ à y_b(max) est égal à

$$W_{a\to b} = F\left(y_b - y_a\right) = -mg\frac{v_0^2}{2g} = -\frac{mv_0^2}{2}$$

ce qui **correspond bien au changement d'énergie cinétique de *a* à *b***.

(2) **L'énergie mécanique totale est ici conservée**

$$\boxed{E_{mech} = K_{cin} + U_{pot} = \frac{mv_0^2}{2}}$$



Agenda Cours 6

1. Le **travail mécanique**
2. Introduction sur **l'énergie et la puissance**
3. **Energie cinétique**
4. **Energie potentielle**
5. **Conservation de l'énergie mécanique**
6. **Quantité de mouvement et collisions**

Conservation de l'énergie mécanique (I)

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

$E_{mech} = K_{cin} + U_{pot}$ en raccourci $E = K + U$

Une **variation d'énergie mécanique** associée à passer d'un état *a* à un état *b*, s'écrit

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U$$

La variation d'énergie cinétique est égale au travail des forces effectué pour passer de *a* à *b* (voir section 3):

$$\Delta K = W$$

Le travail des forces est la somme des travaux des forces conservatives et non conservatives

$$W = W_{cons} + W_{noncons}$$

On oublie le travail des forces qui ne travaillent pas !

Conservation de l'énergie mécanique (II)

On vient de voir que $$\Delta E = W_{cons} + W_{noncons} + \Delta U$$

comme $$\Delta U = -W_{cons}$$

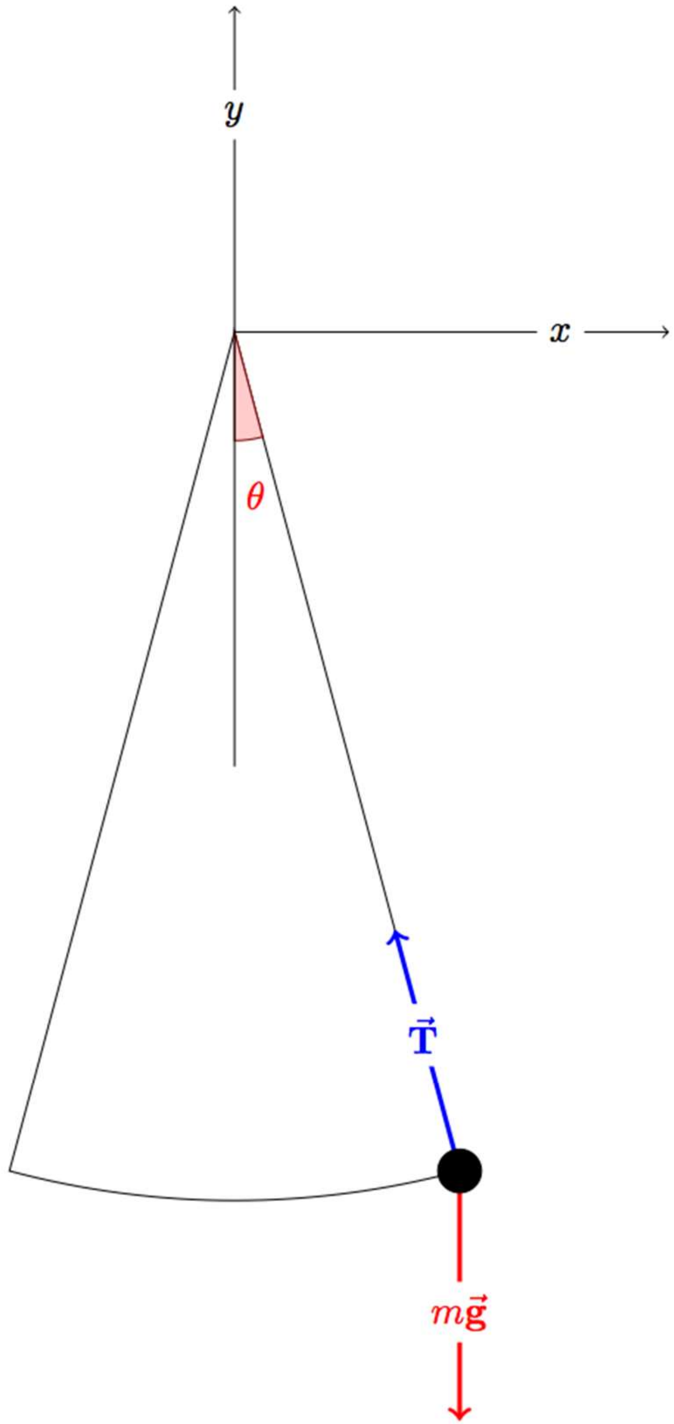
on a que $$\boxed{\Delta E = W_{noncons}}$$

La variation d'énergie mécanique correspond uniquement au travail des forces non conservatives. S'il n'y a pas de forces non conservatives, l'énergie mécanique est conservée et $\Delta E = 0$

$2^{ème}$ application énergie potentielle versus énergie cinétique – conservation énergie mécanique

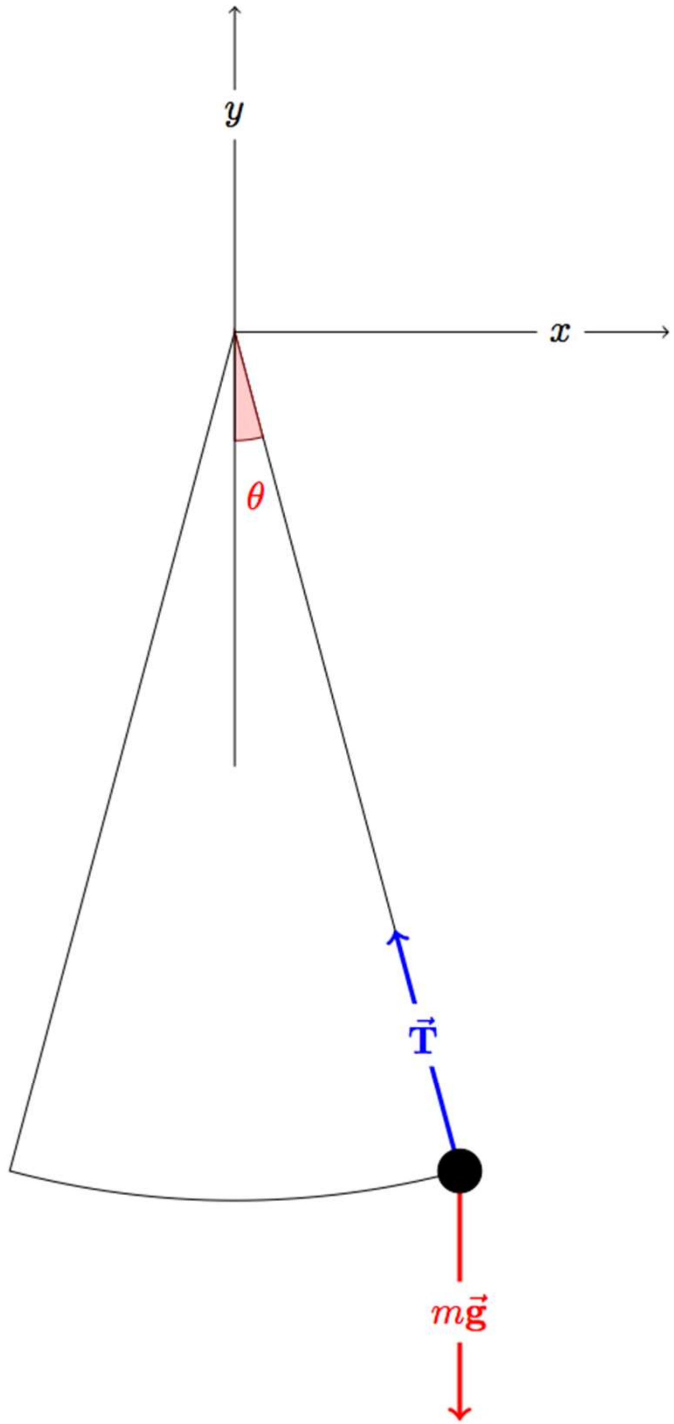
Le ressort et le pendule - mouvement harmonique

Un pendule
cela oscille !



Dynamique du pendule !

$$\begin{cases} m\,\dfrac{d^2x}{dt^2}(t) & = & -T\sin(\theta(t)) \\[2ex] m\,\dfrac{d^2y}{dt^2}(t) & = & T\cos(\theta(t)) - mg \end{cases}$$



Pour des petits angles
- pas si petits d'ailleurs -
on peut simplifier !

$$\begin{cases} m\,\dfrac{d^2x}{dt^2}(t) & = & -T\,\overbrace{\sin(\theta(t))}^{=\frac{x(t)}{L}} \\ m\,\underbrace{\dfrac{d^2y}{dt^2}(t)}_{\approx 0} & = & T\,\underbrace{\cos(\theta(t))}_{\approx 1} - mg \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}(t) \quad = \quad -\frac{g}{L}\,x(t)}$$

$$\boxed{T \quad = \quad 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\frac{g}{L}\,x(t)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Le pendule

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\frac{k}{m}\,x(t)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Le ressort

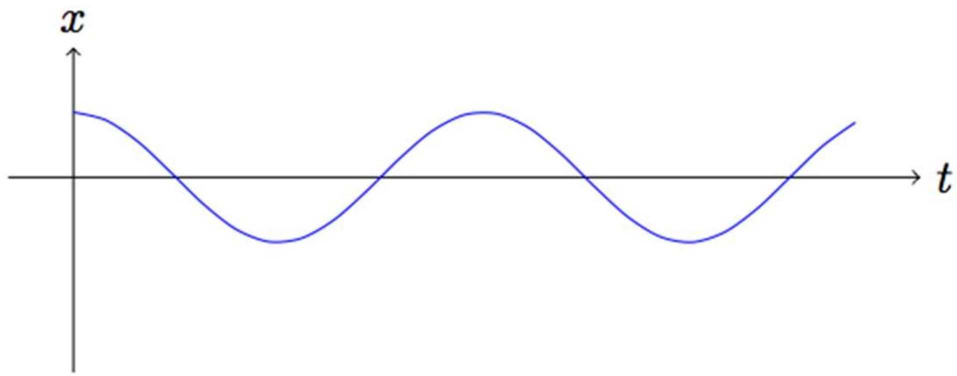
La force de rappel du ressort est conservative

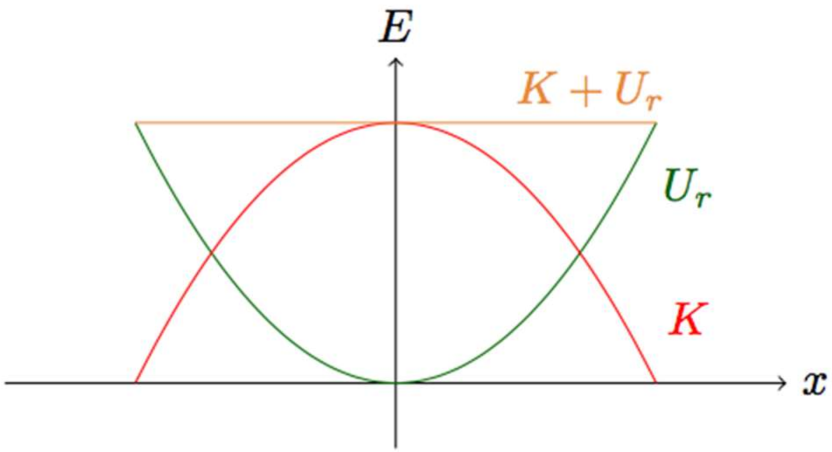
$$\underbrace{\left[\frac{1}{2}\,mv^2\right]_a^b}_{\Delta K} = \underbrace{\int_a^b -kx\;dx}_{W_r} = -\underbrace{\left[\frac{1}{2}\,kx^2\right]_a^b}_{\Delta U_r}$$

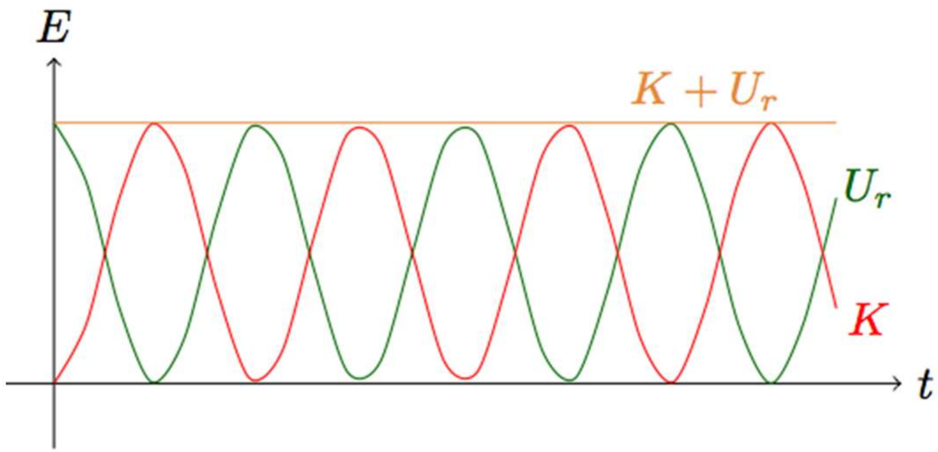
Energie cinétique

Energie potentielle

On conserve l'énergie mécanique pour le ressort





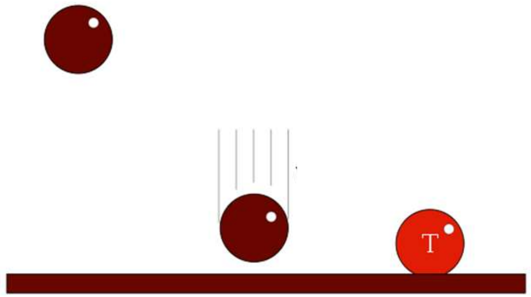


$$\underbrace{\left[\frac{1}{2}\,mv^2\right]_a^b}_{\Delta K} = \underbrace{\int_a^b -kx\,dx}_{W_r} = -\underbrace{\left[\frac{1}{2}\,kx^2\right]_a^b}_{\Delta U_r}$$

Energie cinétique

Energie potentielle

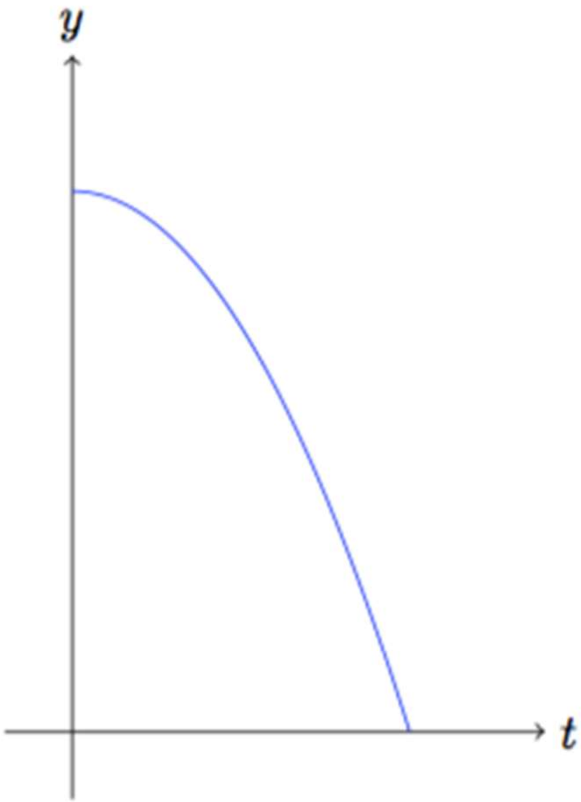
La force de gravité est conservative



$$\underbrace{\left[\tfrac{1}{2}\, mv^2\right]_a^b}_{\Delta K} = \underbrace{\int_a^b -mg\; dy}_{W_g} = \underbrace{-\left[\, mg\; y\right]_a^b}_{\Delta U_g}$$

Energie cinétique

Energie potentielle

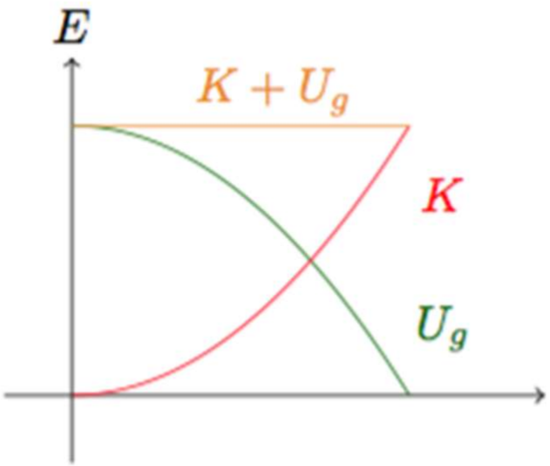


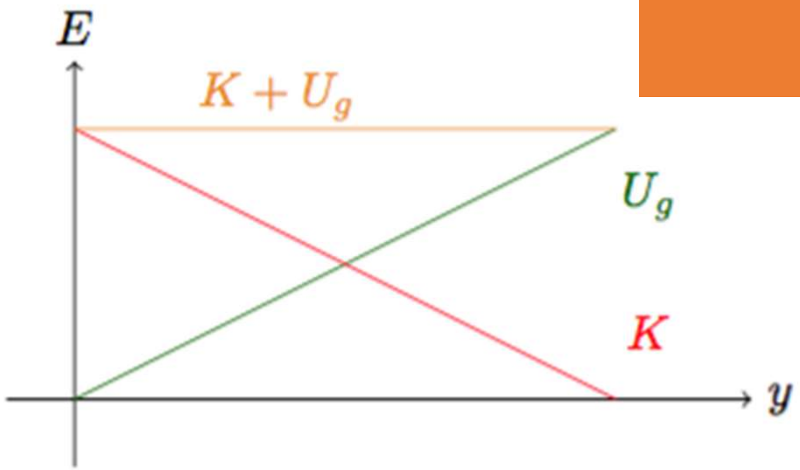
$$\underbrace{\left[\tfrac{1}{2}\, mv^2\right]_a^b}_{\Delta K} = \underbrace{\int_a^b -mg\; dy}_{W_g} = -\underbrace{\left[\, mg\; y\right]_a^b}_{\Delta U_g}$$

Energie cinétique

Energie potentielle

On conserve l'énergie mécanique
…. Et de même pour le pendule





Agenda Cours 6

1. Le **travail mécanique**
2. Introduction sur **l'énergie et la puissance**
3. **Energie cinétique**
4. **Energie potentielle**
5. **Conservation de l'énergie mécanique**
6. **Quantité de mouvement et collisions**

Quantité de mouvement (I)

La quantité de mouvement est un concept important en mécanique, qu'il faut absolument introduire à ce stade. **La quantité de mouvement $\vec{P}$ d'un point matériel (ou particule) est un vecteur, produit de la masse par la vitesse à un temps *t* donné.**

$$\vec{\mathbf{P}}(t) = m\vec{\mathbf{v}}(t)$$

Dans le cas d'un système de *n* points matériels de masses m_i (à priori différentes) la quantité de mouvement du système est définie comme

$$\vec{\mathbf{P}}_{tot}(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i(t)$$

Quantité de mouvement (II)

Pour un système de corps, il est utile de définir la notion de **centre de masse** comme étant la position $\vec{r}_{CM}$ d'une masse virtuelle M_{CM} égale à la somme de toutes les masses m_i avec une position et une vitesse « bien » moyennées.

$$\vec{\mathbf{P}}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i = M_{CM} \vec{\mathbf{v}}_{CM}$$

En définissant la position comme la position moyenne pondérée par la masse :

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM}(t) = \frac{m_1 \vec{\mathbf{r}}_1(t) + m_2 \vec{\mathbf{r}}_2(t) + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{1}{M_{CM}} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i(t)$$

on a

$$\vec{\mathbf{v}}_{CM}(t) = \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{r}}_{CM}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M_{CM}} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i(t) \right) = \frac{1}{M_{CM}} \sum_{i=1}^{n} m_i \underbrace{\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{r}}_i(t)}_{\vec{\mathbf{v}}_i(t)} = \frac{1}{M_{CM}} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i(t)$$

et on trouve le résultat espéré.

Vous verrez plus tard comment étendre ce concept de centre de masse à des corps étendus

Quantité de mouvement (III)

Regardons maintenant comment varie la quantité de mouvement d'un tel système fait de n masses. Commençons par dériver la quantité de mouvement d'une des masses m_i

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_i\vec{\mathbf{v}}_i\right) = m_i\frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = m_i\vec{\mathbf{a}}_i = \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{agissant sur i}}$$

On voit, via la loi de Newton, que la variation de la quantité de mouvement de la masse m_i est égale à la somme de toutes les forces agissant sur elle. Ces forces sont de deux types, les forces extérieures qui agissent sur le système et les forces provenant des autres masses (soit par contact soit à distance par gravité):

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{agissant sur i}} = \vec{\mathbf{F}}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_{ij}$$

avec F_i, la résultante des forces imposées de l'extérieur du système et agissant sur la masse i et les F_{ij} la force entre la masse i et j.

Quantité de mouvement (IV)

Pour une seule masse
$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}_i}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_{ij}$$

Pour tout le système
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\mathbf{P}}_i}{dt}}_{\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\mathbf{F}}_i\right)}_{\vec{\mathbf{F}}_{external}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_{ij}\right)}_{0}$$

C'est la somme de toutes les paires d'action-réaction qui s'annulent l'une l'autre – 3ème loi de N. Vous pouvez vérifier par exemple avec 3 masses pour vous rassurer.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_{external}}$$

Sans force extérieure ($\vec{\mathbf{F}}$=0) sur un système de *n* masses, la quantité de mouvement totale du système est conservée ($\Delta\vec{\mathbf{P}}$=0).

Collisions (I)

Une **collision** entre corps est un événement qui se passe dans un **intervalle de temps Δt très bref** (idéalement Δt vers 0). Imaginons que le contact commence en t_0- $\Delta t/2$ et se termine en t_0+ $\Delta t/2$, on a alors

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_{external} \Leftrightarrow \int_{t_0-\Delta t/2}^{t_0+\Delta t/2} \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} dt = \int_{t_0-\Delta t/2}^{t_0+\Delta t/2} \vec{\mathbf{F}}_{ext} dt \Leftrightarrow \vec{\mathbf{P}}_{t_0+\Delta t/2} - \vec{\mathbf{P}}_{t_0-\Delta t/2} = \int_{t_0-\Delta t/2}^{t_0+\Delta t/2} \vec{\mathbf{F}}_{ext} dt$$

$$\vec{\mathbf{P}}_{t_0^+} - \vec{\mathbf{P}}_{t_0^-} = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{t_0-\Delta t/2}^{t_0+\Delta t/2} \vec{\mathbf{F}}_{ext} dt = 0$$

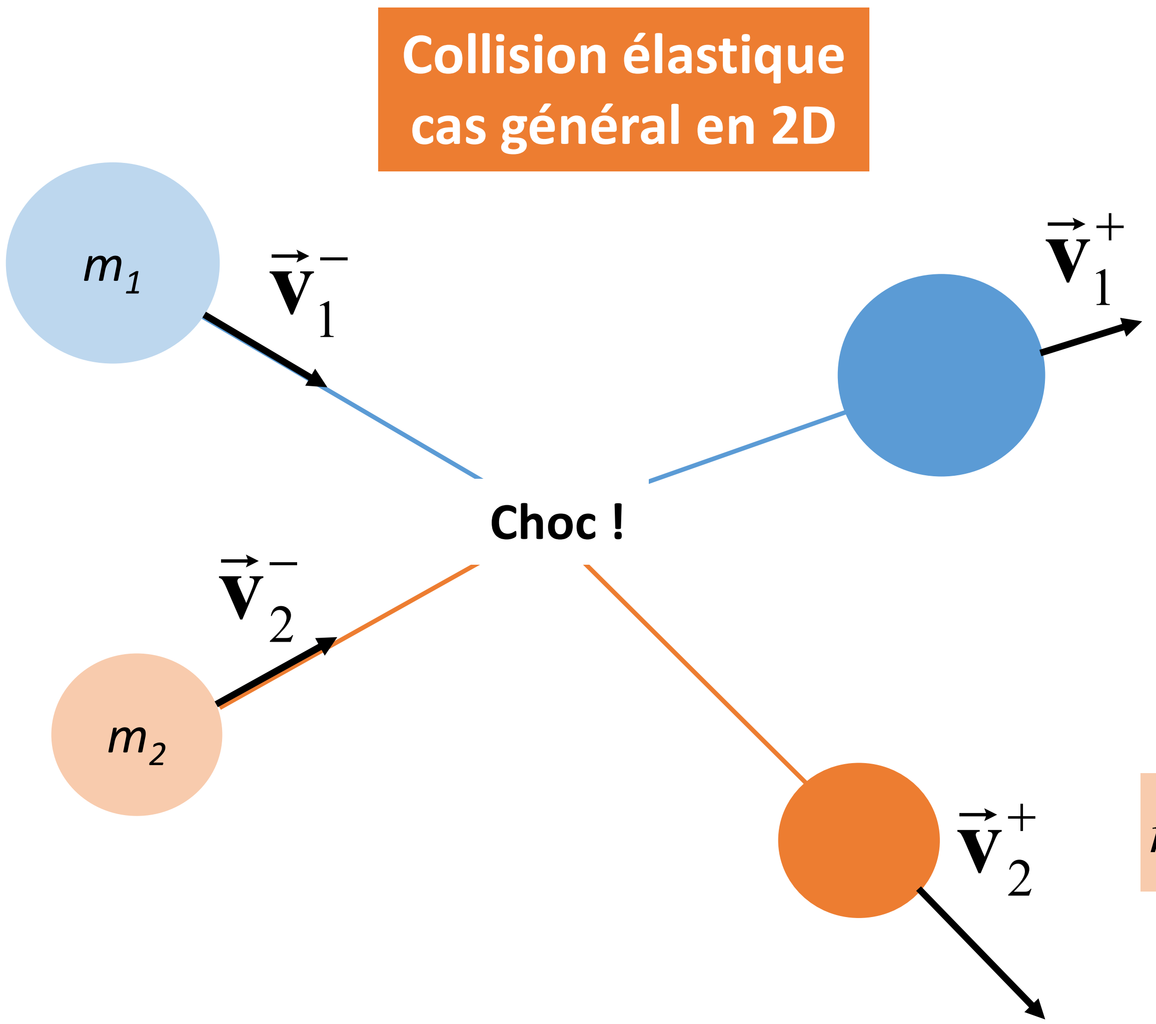
La brièveté de la collision fait que les forces externes ne peuvent modifier la quantité de mouvement. Ce qui est important est que même en présence de forces externes non nulles lors d'une collision, on peut faire l'hypothèse de conservation de la quantité de mouvement.

Collisions (II)

PAR CONTRE, lors d'une collision entre particules en mouvement, l'énergie cinétique ne se conserve pas nécessairement. On a différents types de collisions :

1. **Collision élastique**: les particules participant au choc peuvent subir une déformation mais elle restituée immédiatement – l'énergie cinétique totale est conservée *(déformation élastique … un peu d'énergie cinétique devient de l'énergie potentielle qui redevient tout de suite de l'énergie cinétique).*
2. **Collision inélastique**: les particules participant au choc subissent une déformation qui n'est pas réversible, dissipant entre autre de la chaleur – l'énergie cinétique totale varie … et c'est très complexe de prédire cette variation.
3. **Collision parfaitement inélastique**: les particules participant au choc restent liées après le choc. Les choses sont alors plus facile à nouveau.

Collisions (III)



Conservation quantité de mouvement en *x*

$$m_1 v_{1x}^- + m_2 v_{2x}^- = m_1 v_{1x}^+ + m_2 v_{2x}^+$$

Conservation quantité de mouvement en *y*

$$m_1 v_{1y}^- + m_2 v_{2y}^- = m_1 v_{1y}^+ + m_2 v_{2y}^+$$

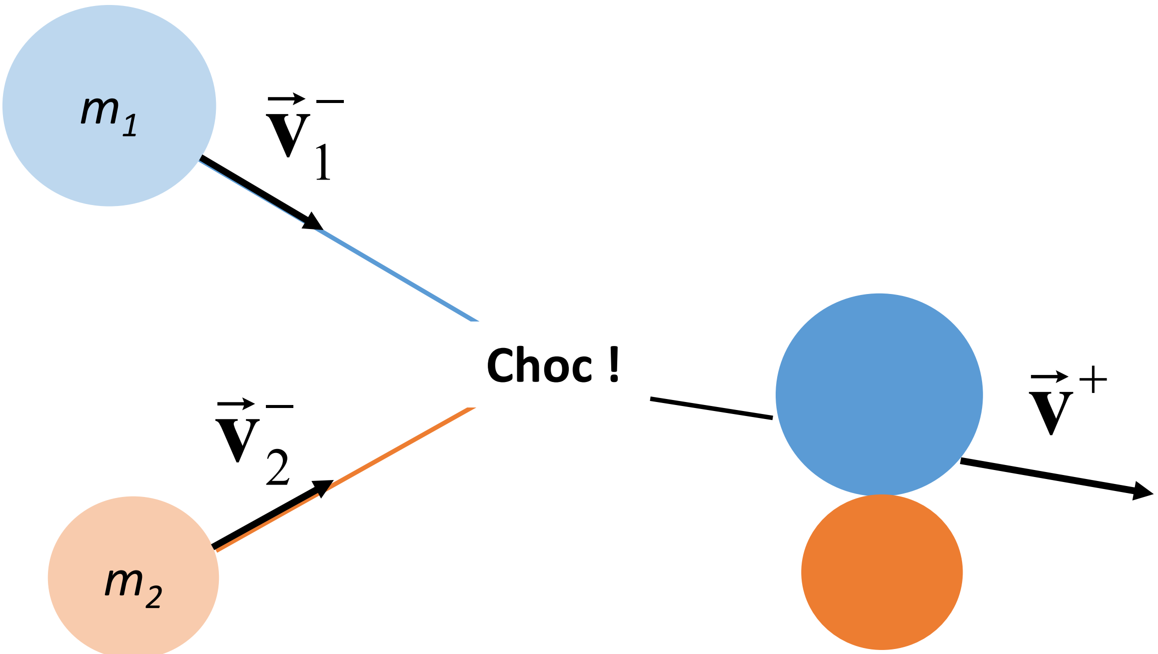
Conservation de l'énergie mécanique -
(seulement énergie cinétique ici)

$$m_1 \left(v_1^-\right)^2 + m_2 \left(v_2^-\right)^2 = m_1 \left(v_1^+\right)^2 + m_2 \left(v_2^+\right)^2$$

Trois équations mais normalement 4 inconnues (soit les vitesses avant le choc ou après le choc) … si pas plus d'infos (symétries, cas plus particulier, …), pas soluble ! Le cas parfaitement inélastique est lui soluble – voir les exercices

Collisions (IV)

Collision parfaitement inélastique cas général en 2D



Conservation quantité de mouvement en *x*

$$m_1 v_{1x}^- + m_2 v_{2x}^- = \left(m_1 + m_2\right) v_x^+$$

Conservation quantité de mouvement en *y*

$$m_1 v_{1y}^- + m_2 v_{2y}^- = \left(m_1 + m_2\right) v_y^+$$

Deux équations et deux inconnues : piece of cake !

Agenda Cours 6

1. Le **travail mécanique**
2. Introduction sur **l'énergie et la puissance**
3. **Energie cinétique**
4. **Energie potentielle**
5. **Conservation de l'énergie mécanique**
6. **Quantité de mouvement et collisions**

Synthèse du cours 6

- **Travail** des forces $W = \int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}}$ (en **Joules** J); **Puissance** des forces $P = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ (en **Watts** W)
- **Dans un système isolé l'énergie totale est conservée.**
- L'énergie mécanique *E* comprend énergie cinétique et potentielle $\Delta E = \Delta K + \Delta U$
- L'énergie cinétique $K_{cin} = \frac{mv^2}{2}$ varie suivant la puissance des forces $\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = (\Sigma\vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{v}}$
- La variation d'**énergie potentielle** seulement pour forces conservatives:

  $\Delta U = -W_{cons}$ $\quad U_{gravité} = mgh$ $\quad U_{ressort} = \frac{1}{2}ku^2$
- **La variation d'énergie mécanique dans un système isolé est égale au travail des forces non conservatives** $\Delta E = W_{noncons}$
- **La quantité de mouvement** d'un système défini comme $\vec{\mathbf{P}}_{tot}(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i(t)$ varie comme $\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_{external}$ montrant qu'en l'absence de force externe, elle se conserve.