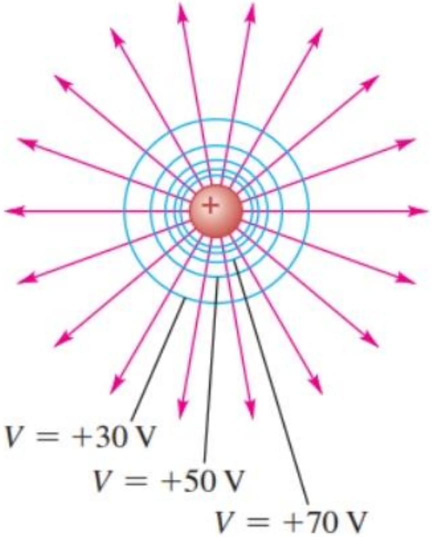
UCLouvain
École polytechnique de Louvain

LEPL1201
Cours 7 : Potentiel électrique



Enseignant: **D. Lederer**

Année académique 2023-24

Agenda LEPL1201

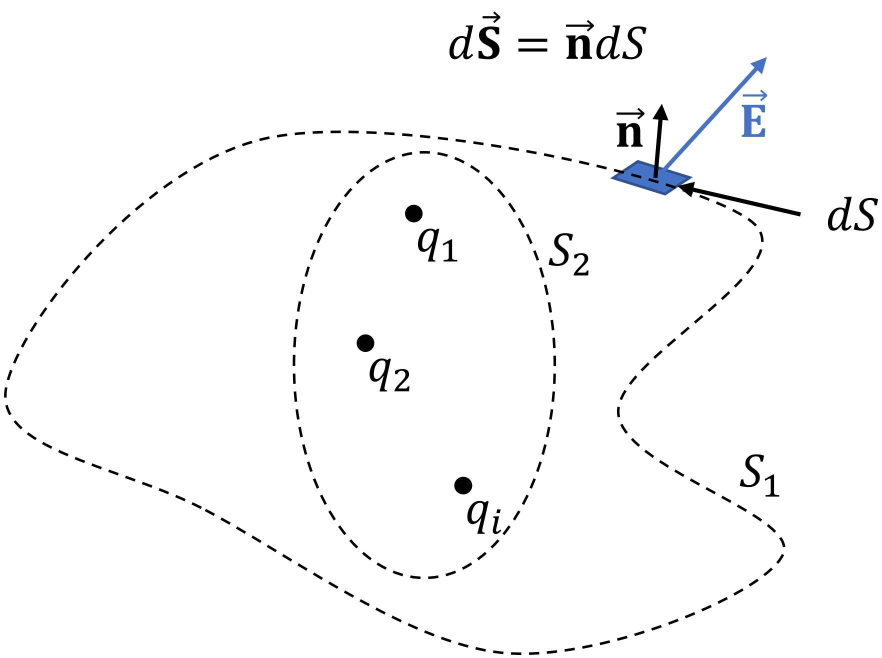
S2	Mardi 26/9	**Cours 1** : **Unités, vecteurs, cinématique** + APP le jeudi
S3	Mardi 3/10	**Cours 2** : **Lois de Newton et gravité** (I) + APP le jeudi
S4	Mardi 10/10	**Cours 3** : **Force de Coulomb** + APP le jeudi
S5	Mardi 17/10	**Cours 4** : **Loi de Gauss** + APP le jeudi
S6	Mardi 24/10	**Cours 5** : **Forces de frottement** (and co) + APP le jeudi
S7	Mardi 31/10	**Cours 6 : Travail, énergie, puissance** + APP le jeudi + **Devoir Python**
S8	Mardi 7/11	**Cours 7** : **Potentiel électrique et moments** + APP le jeudi
S9	Mardi 14/11	**Cours 8** : **Capacités et diélectriques** + APP le jeudi + **LABO 1**
S10	Mardi 21/11	**Cours 9** : **Mouvements circulaires** + APP le jeudi
S11	Mardi 28/11	**Cours 10** : **Mécanique des corps rigides** + APP le jeudi
S12	Mardi 5/12	**Cours 11** : **Courant électrique et résistance** + APP le jeudi
S13	Mardi 12/12	**Cours 12** : **Circuit RC** + APP le jeudi
S14		**LABO 2**

Agenda Cours 3

1. Rappels sur Gauss
2. Rappels sur l'énergie mécanique
3. Energie potentielle électrique: champ uniforme
4. Energie potentielle électrique: système de charges
5. Potentiel électrique
6. Equipotentielles

Rappel sur Gauss

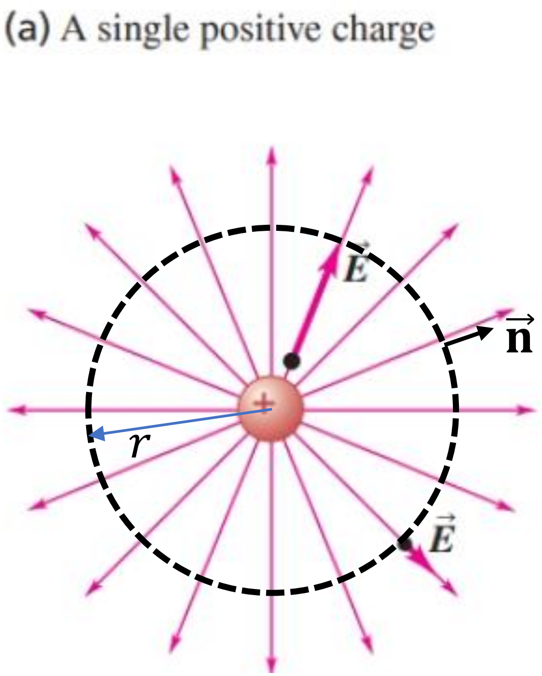
- Le théorème de Gauss lie le flux du champ $\vec{\mathbf{E}}$ au travers d'une surface **fermée quelconque** à la somme des charges contenues dans le volume délimité par cette sphère:



$$\oint_S \vec{\mathbf{E}}.\, d\vec{\mathbf{S}} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

vrai quelle que soit S !!!

Exemple 1



$$\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \oint_S \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{n}}dS = \oint_S EdS$$

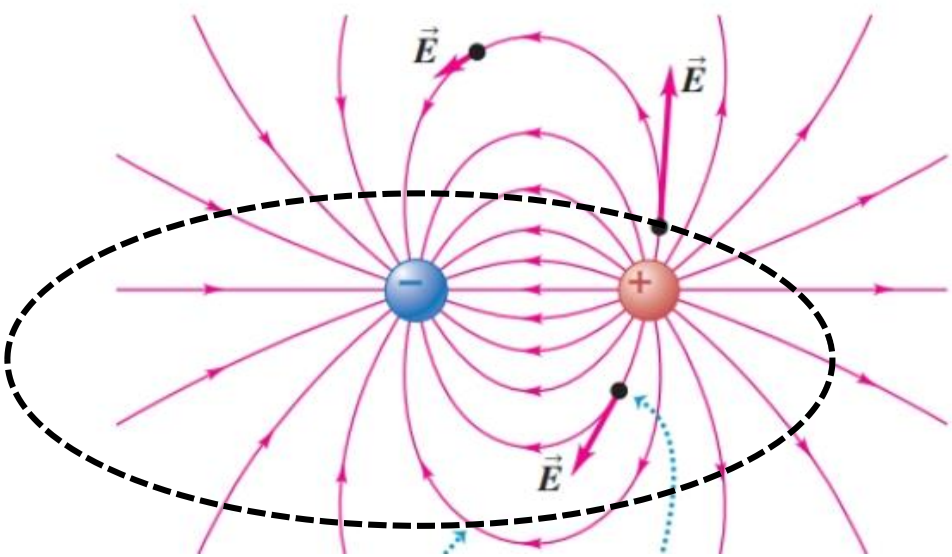
$$= E\oint_S dS = ES = E4\pi r^2$$

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{(Gauss)}$$

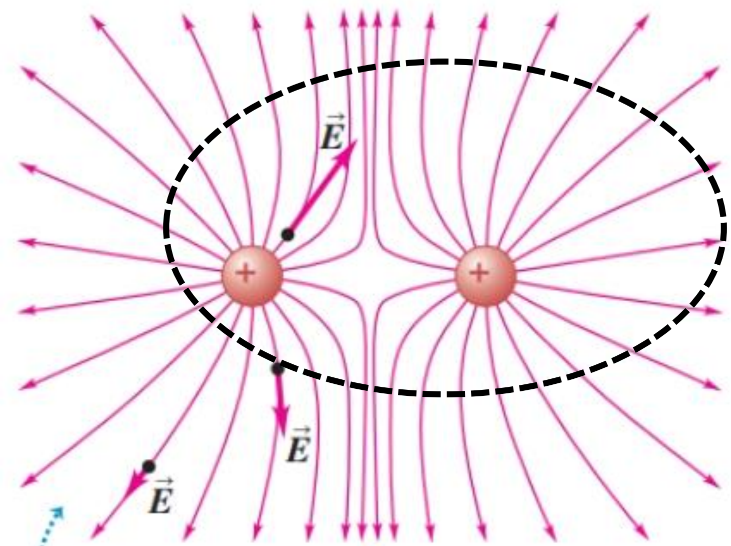
$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Exemples 2 et 3

(b) Two equal and opposite charges (a dipole)



(c) Two equal positive charges



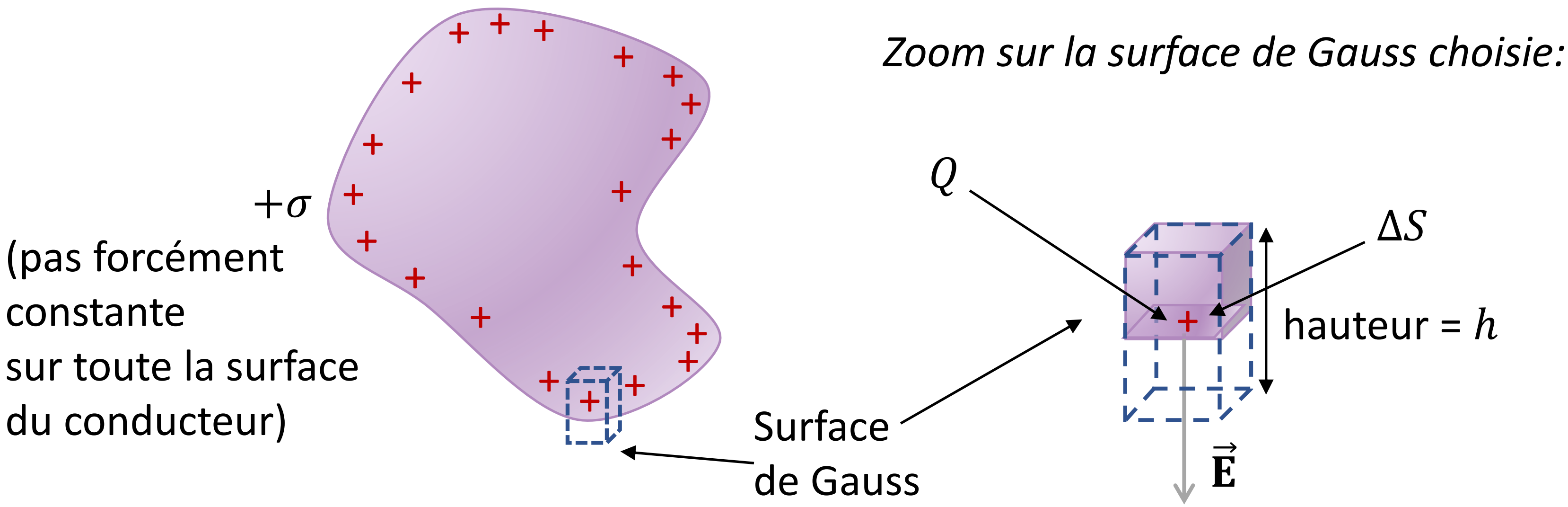
$$\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0$$

Pour chaque ligne de champ entrante, il y a une ligne sortante (flux nul)

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{2q}{\varepsilon_0} > 0$$

Le flux sortant est globalement positif

Champ en surface d'un conducteur chargé

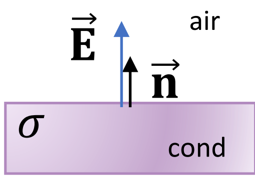


$$\oint_S \vec{\mathbf{E}}.\, d\vec{\mathbf{S}} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

(1) le champ est perpendiculaire à la surface du conducteur, et (2) nul à l'intérieur

On a donc pour $h \to 0$: $\oint_S \vec{\mathbf{E}}.\, d\vec{\mathbf{S}} = E \Delta S$

On en déduit la **condition limite** pour $\Delta S \to 0$: $E_\perp = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ ou encore: $\boxed{\vec{\mathbf{n}}.\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}}$



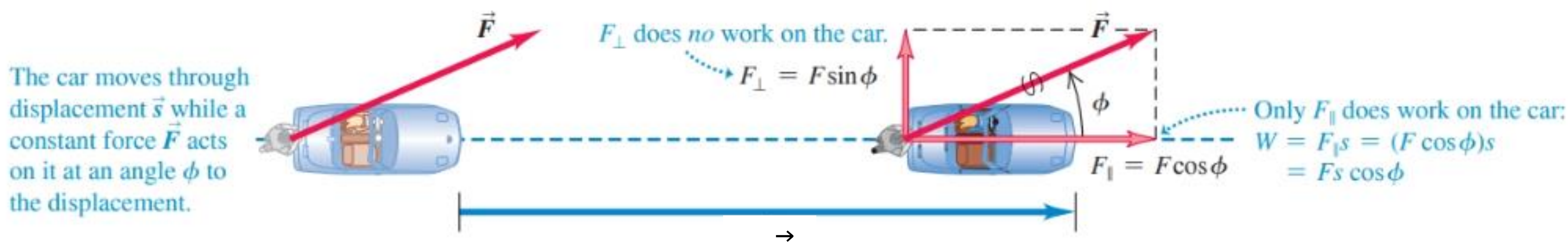
Agenda Cours 3

1. Rappels sur Gauss
2. Rappels sur l'énergie mécanique
3. L'énergie potentielle électrique: champ uniforme
4. L'énergie potentielle électrique: système de charges
5. Potentiel électrique
6. Equipotentielles

Travail d'une force (1)

- Lorsqu'une force $\vec{\mathbf{F}}$ agit sur un corps qui se déplace selon $\Delta\,\vec{\mathbf{l}}$ on définit le **travail** réalisé par $\vec{\mathbf{F}}$ comme étant:

$$W = \vec{\mathbf{F}}.\Delta\vec{\mathbf{l}} \qquad \text{[Joules]}$$



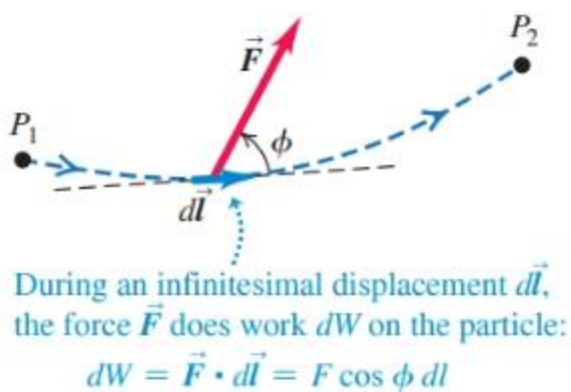
$\Delta\vec{\mathbf{l}}$

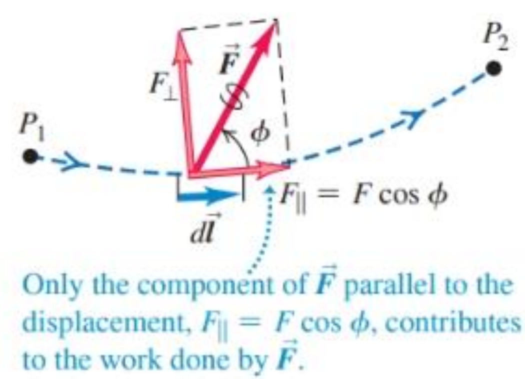
- Cette definition implique un **déplacement**, et donc une position **initiale** et une **position** finale.
- Le travail est exprimé en **joules** et est un **scalaire**.
- Il peut être **positif**, **nul** ou **négatif**.

Travail d’une force (2)

- Que se passe-t-il si le déplacement n’est pas rectiligne?
- Dans ce cas, on décompose la trajectoire en petits **déplacements infinitésimaux** $d\vec{\mathbf{l}}$, et on calcule le travail total comme étant la **somme** des **travaux infinitésimaux** dW associés à chaque petit déplacement:

$$dW = \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{l}} \quad \Rightarrow \quad W_{1\to 2} = \int_{P_1}^{P_2} dW = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{l}}$$

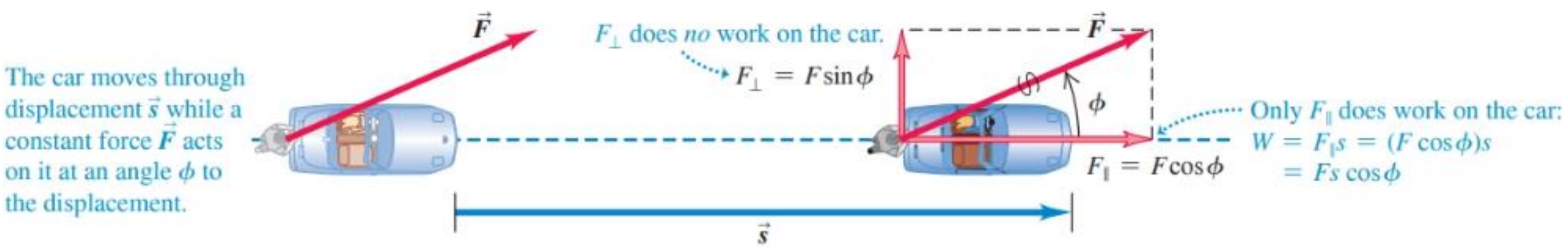




Energie cinétique et théorème de l'énergie cinétique

- Le travail effectué par des forces sur un objet correspond directement à sa **variation d'énergie cinétique**:

$$W = \Delta K = K_2 - K_1$$



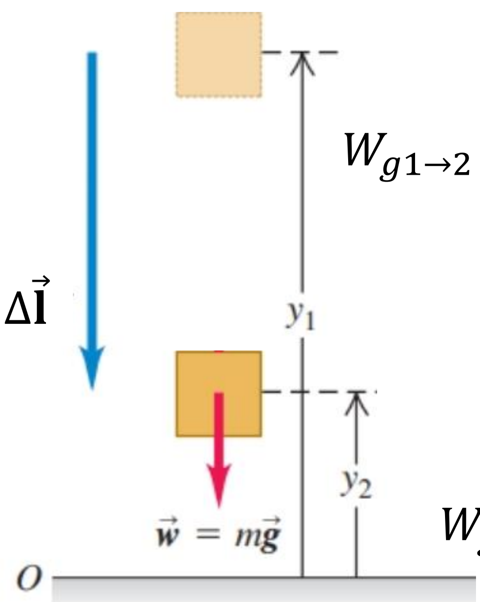
$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad\qquad K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

- Cette variation peut être **nulle, positive ou négative**.
- Ceci reste **vrai** même si le **déplacement n'est pas rectiligne**.

Cas de la gravité

- Imaginons le cas particulier d'un objet se déplaçant **verticalement**, et sous l'effet de la **gravité** (on ignore les forces de frottement). Intéressons-nous au **travail effectué par la force de gravité**.

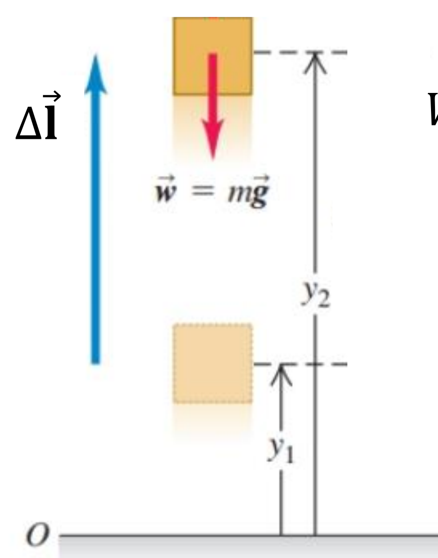
Objet en chute libre:



$$W_{g1\to2} = m\vec{\mathbf{g}}.\Delta\vec{\mathbf{l}}$$
$$= mg(y_1 - y_2)$$

$$W_{g1\to2} = \Delta K > 0$$

Objet qui monte:



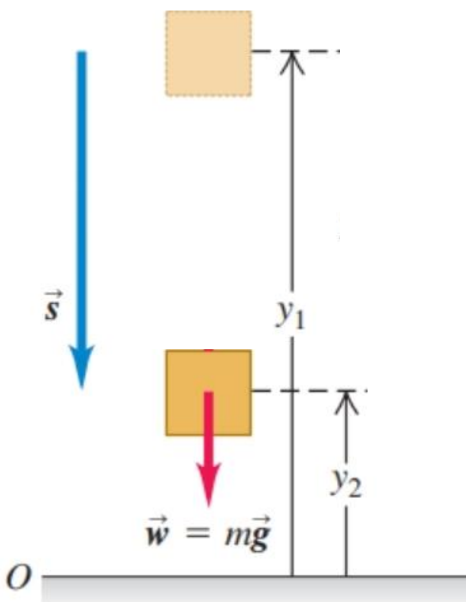
$$W_{g1\to2} = m\vec{\mathbf{g}}.\Delta\vec{\mathbf{l}}$$
$$= -mg(y_2 - y_1)$$
$$= mg(y_1 - y_2)$$

$$W_{g1\to2} = \Delta K < 0$$

Energie potentielle gravitationnelle

- On définit **l'énergie potentielle gravitationnelle**: $U_g \triangleq mgy + U_0 [\mathrm{J}]$
- Cette énergie dépend de la **position**.
- Sa valeur dépend d'une **référence** (U_0) **choisie arbitrairement**.

Travail et force de gravité:



$$W_g = mgy_1 - mgy_2 = -\left(U_{g2} - U_{g1}\right)$$

$$\boxed{W_g = -\Delta U_g}$$

Le travail effectué par la force gravitationnelle sur un objet se déplaçant entre deux points est l'opposé de la variation de son énergie potentielle entre ces points.

$W_g > 0$ et $\Delta U_g < 0$ si l'objet descend.

$W_g < 0$ et $\Delta U_g > 0$ si l'objet monte.

Gravité et conservation de l'énergie mécanique (1)

- Le théorème de l'énergie cinétique nous enseigne que:

$$W = \Delta K = K_2 - K_1$$

- Si le travail effectué est celui lié à la force gravitationnelle:

$$W = W_g = -\Delta U_g$$

- On en déduit donc que :

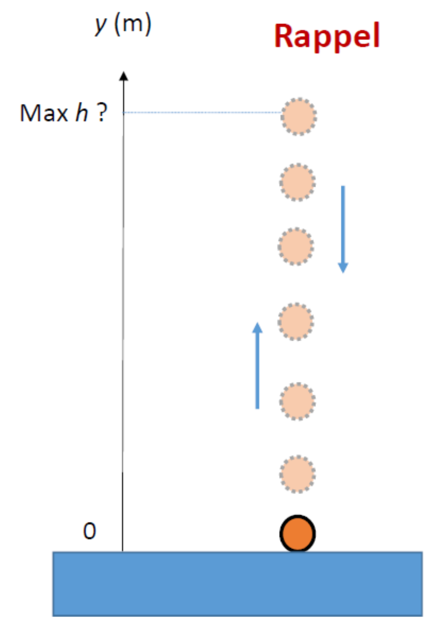
$$\Delta K = -\Delta U_g \qquad \text{ou} \qquad \Delta K + \Delta U_g = 0$$

- Ou encore:

$$K_2 - K_1 + U_{g2} - U_{g1} = 0$$

- Et finalement:

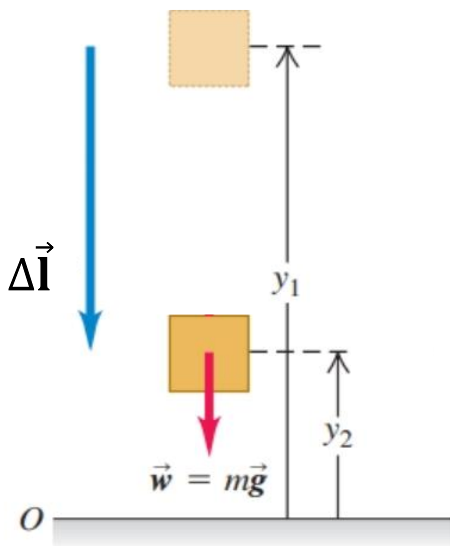
$$(K_2 + U_{g2}) = (K_1 + U_{g1}) = E_m = cst$$



Gravité et conservation de l'énergie mécanique (2)

- Puisque E_m est constante, si U_g diminue K augmente et vice-versa.
- L'énergie potentielle est un **réservoir d'énergie**, qui se consomme et se **transforme en énergie cinétique** durant le déplacement.

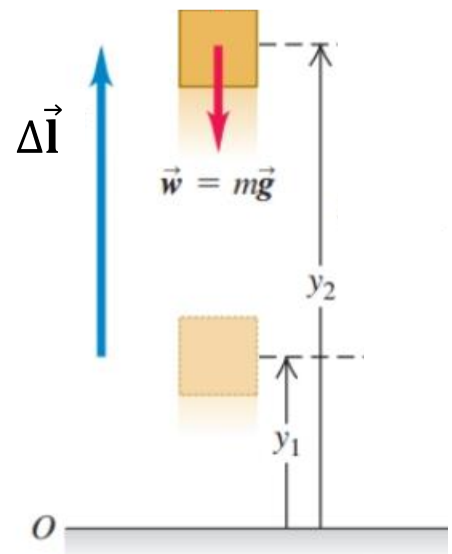
Objet en chute libre:



U_g diminue, K augmente

$U_g + K = cst$

Objet qui monte



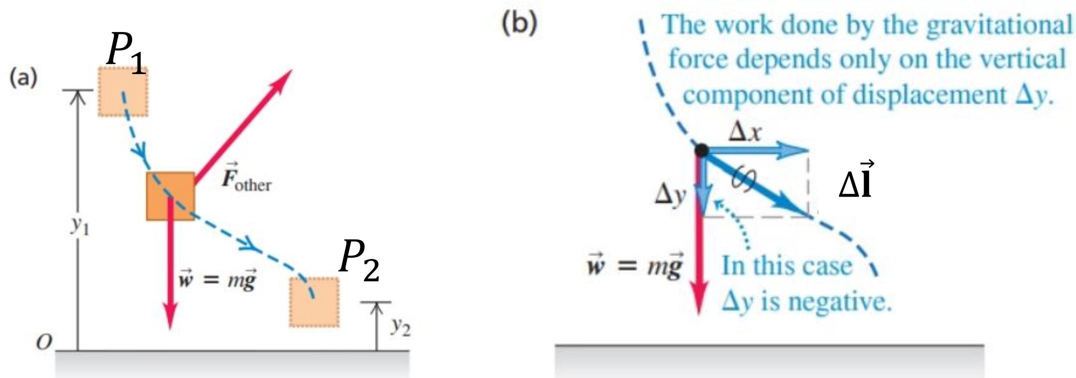
U_g augmente, K diminue

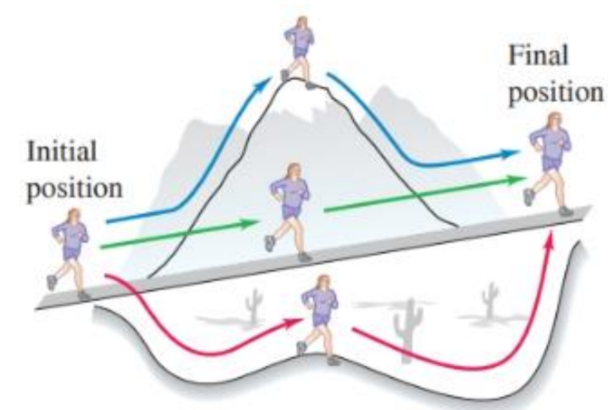
$U_g + K = cst$

Cas d’une trajectoire curviligne

- Que vaut le travail effectué par la force gravitationnelle dans le cas d’une **trajectoire curviligne**?
- On peut **décomposer** la trajectoire en une série de **petits déplacements**.
- Pour chacun de ces petits déplacements on peut écrire:

$$\Delta W = \vec{\mathbf{F}}.\Delta\vec{\mathbf{l}} = -mg\Delta y$$



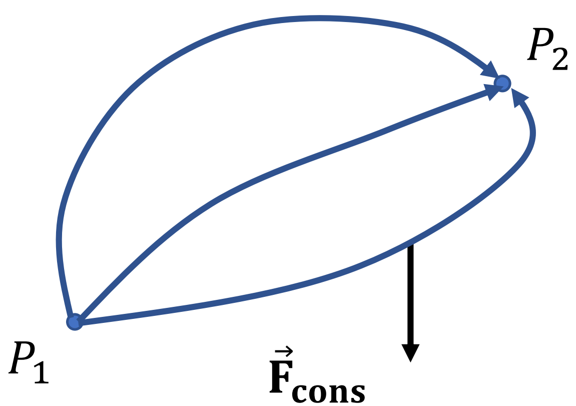


- $W_{g1\rightarrow 2} = \int_{P_1}^{P_2} dW = -mg\int_{P_1}^{P_2} dy = -mg(y_2 - y_1) = -\Delta U_g$

Ne dépend pas du chemin parcouru !

Force conservative (1)

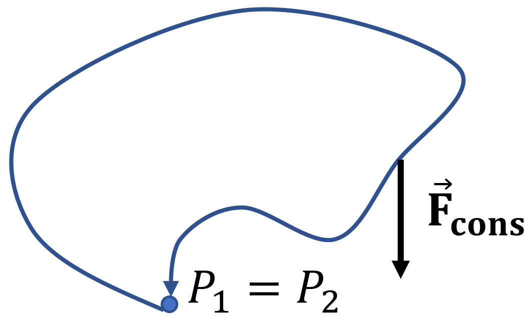
- Une force pour laquelle on peut dériver une énergie potentielle telle que, lorsqu'un corps se déplace sous l'action unique de cette force, l'énergie mécanique totale de ce corps est constante est dite **conservative**.
- Pour une telle force, le travail effectué sur un corps lorsqu'il se déplace entre deux points est **l'opposé de la variation d'énergie potentielle** entre ces deux points, et **ne dépend pas du trajet** parcouru.



$$W_{1\to 2} = \int_{P_1}^{P_2} dW = -(U_2 - U_1)$$

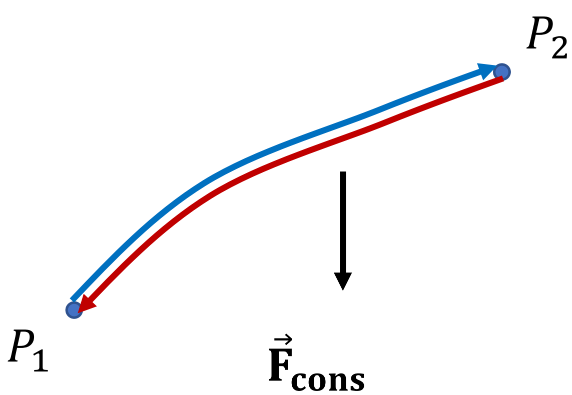
Force conservative (2)

- Si l'objet revient à son point de départ ($P_1 = P_2$), le travail effectué est nul :



$$W_{1\to 1} = -\Delta U = -(U_1 - U_1) = 0$$

- Le travail effectué par $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{cons}}$ durant le trajet P_1 - P_2 est l'opposé de celui effectué durant le trajet P_2 - P_1 :



$$W_{1\to 2} = \int_{P_1}^{P_2} dW = -(U_2 - U_1)$$

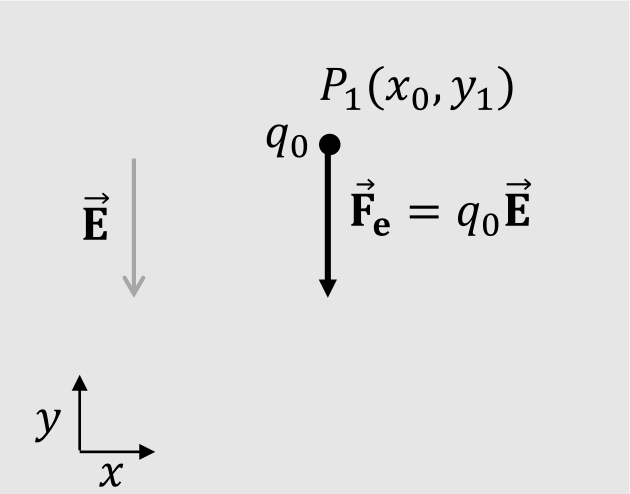
$$W_{2\to 1} = \int_{P_2}^{P_1} dW = -(U_1 - U_2) = -\mathrm{W}_{1\to 2}$$

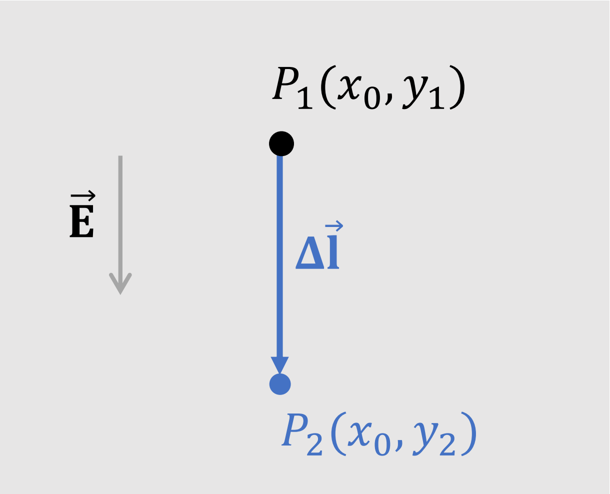
Agenda Cours 3

1. Rappels sur Gauss
2. Rappels sur l’énergie mécanique
3. Energie potentielle électrique: champ uniforme
4. Energie potentielle électrique: système de charges
5. Potentiel électrique
6. Equipotentielles

Energie potentielle électrique dans un champ uniforme (1)

- Imaginons un **champ électrique uniforme** vertical orienté vers le bas:



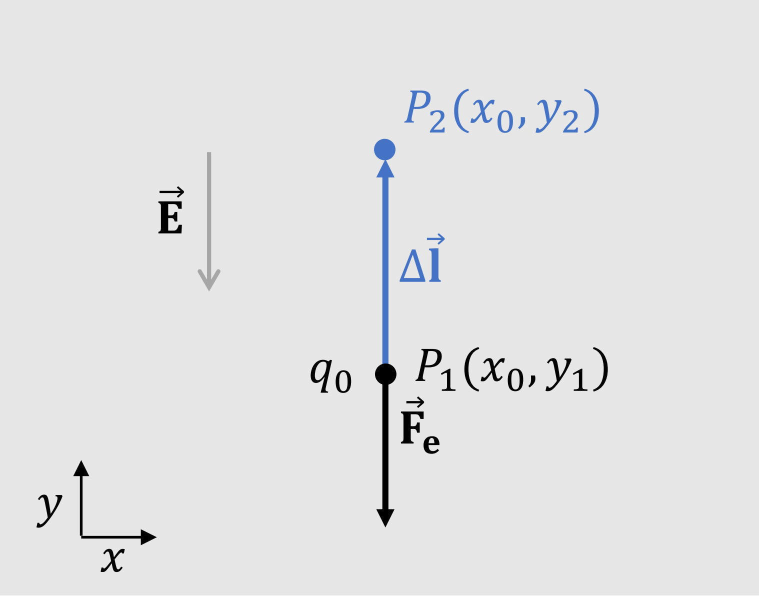


- Si une charge q_0 (>0) se **déplace vers le bas** en présence de la force électrostatique $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}$, le travail effectué par $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}$ vaut:

$$W_{e1\rightarrow 2} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}.\Delta\vec{\mathbf{l}} = F_e\Delta l = q_0E(y_1-y_2)$$ => $W_{e1\rightarrow 2}$ **positif**

Energie potentielle électrique dans un champ uniforme (2)

- Si la charge se **déplace vers le haut:**

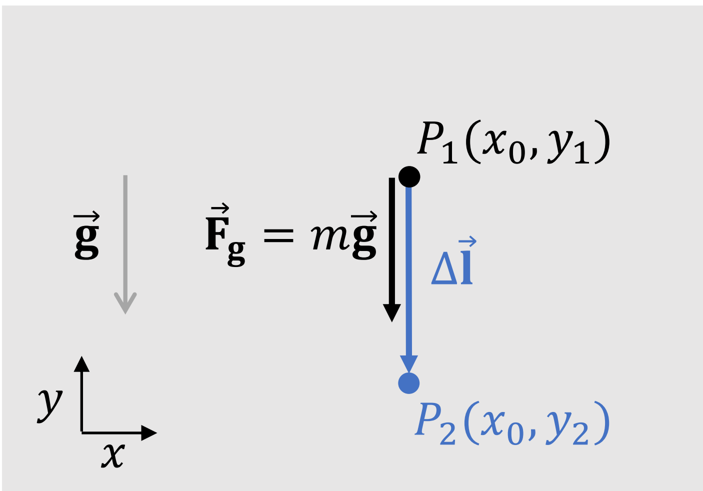


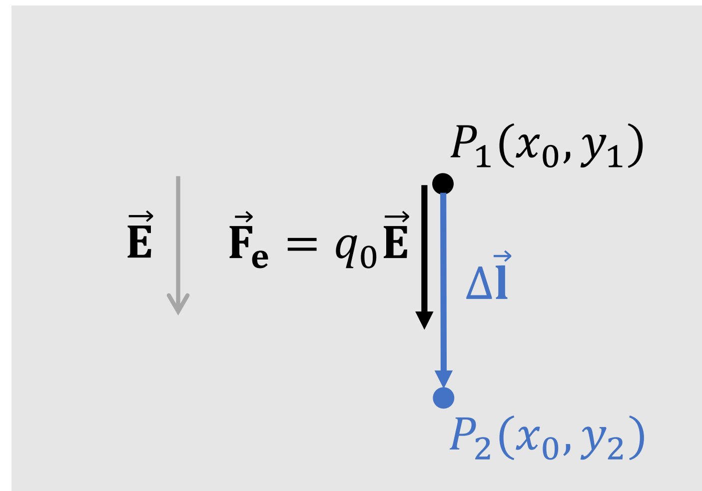
- Dans ce cas le **travail** effectué vaut:

$$W_{e1\to2} = \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{e}.\Delta\vec{\mathbf{l}} = -F_e\Delta l = q_0E(y_1 - y_2)$$ => $W_{e1\to2}$ **négatif**

Energie potentielle électrique dans un champ uniforme (3)

- Analogie avec la force gravitationnelle:





$$W_{g1\to 2} = mg(y_1 - y_2)$$

$$U_g = mgy + U_{g0}$$

$$\Rightarrow \quad W_{g1\to 2} = -\Delta U_g$$

$$W_{e1\to 2} = q_0 E(y_1 - y_2)$$

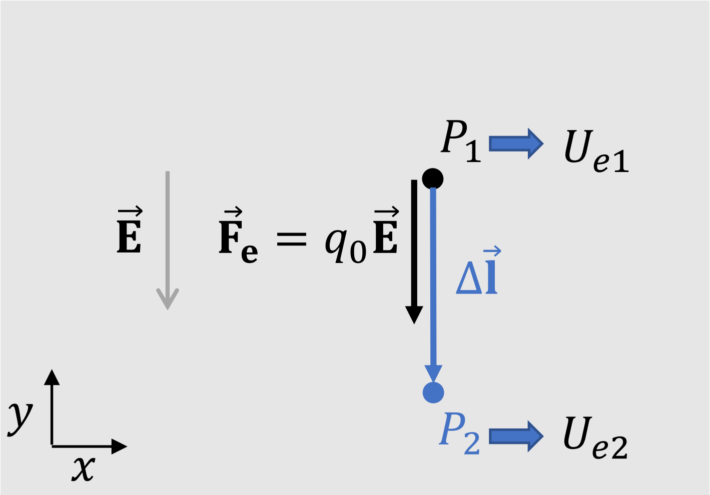
$$U_e \triangleq q_0 E y + U_{e0}$$

$$\Rightarrow \quad W_{e1\to 2} = -\Delta U_e$$

- Par analogie, on en déduit que la **force électrostatique** est aussi **conservative**.

Energie potentielle électrique dans un champ uniforme (4)

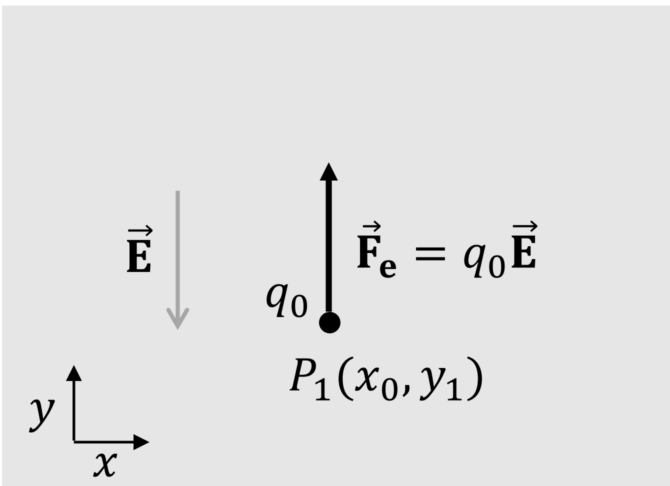
- On peut donc associer à tout point dans l'espace un **niveau d'énergie potentielle électrique U_e** :

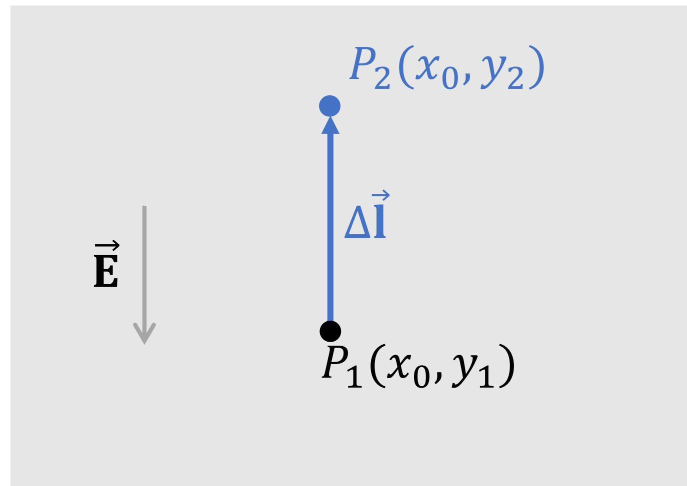


- Si la charge se déplace vers le bas, $W_e > 0 \Rightarrow \Delta U_e < 0 \ \Rightarrow \ U_{e2} < U_{e1}$
- De manière générale, **l'énergie potentielle** de l'objet **augmente** si la charge se déplace dans un **sens opposé** à la force. Ceci est vrai aussi pour une charge négative.

Energie potentielle électrique dans un champ uniforme: charge négative

- Si q_0 est négative, $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}$ est orientée vers le haut !

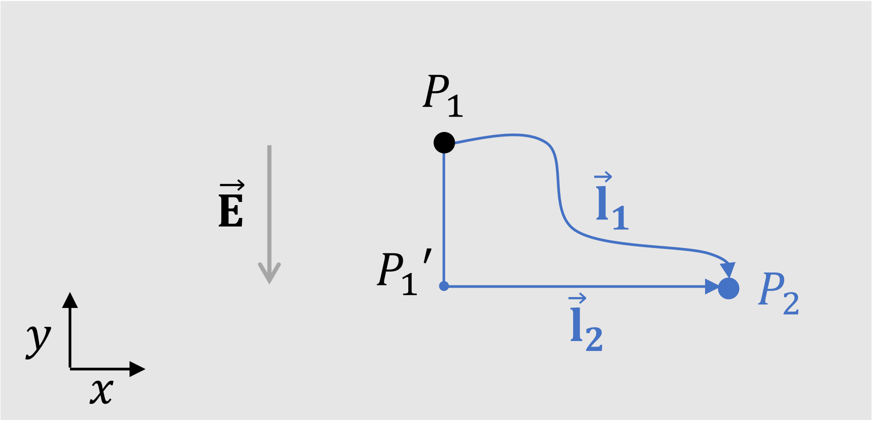




- Si la charge se déplace vers le **haut**, son énergie potentielle **diminue**:
  $W_e > 0 \Rightarrow \Delta U_e < 0 \;\Rightarrow\; U_{e2} < U_{e1}$
- En effet: $\Delta U_e = q_0 E(y_2 - y_1) < 0$ car $q_0 < 0$

Energie potentielle électrique dans un champ uniforme: points non alignés avec $\vec{\mathbf{E}}$

- Si P_1 et P_2 ne sont pas alignés avec $\vec{\mathbf{E}}$:



$$W_{e1\rightarrow 2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{F}}_\mathrm{e}.\, d\vec{\mathbf{l}}_1 = -(U_{e2} - U_{e1})$$

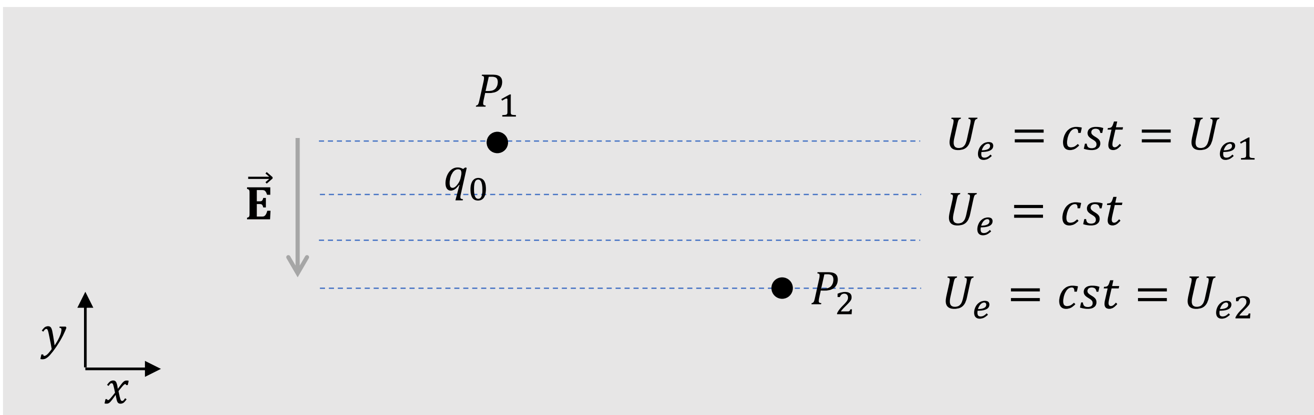
- Comme $\vec{\mathbf{F}}_\mathrm{e}$ est conservative, $W_{e1\rightarrow 2}$ne dépend pas du chemin parcouru. On peut donc choisir un chemin arbitraire, prenons $\vec{\mathbf{l}}_2$, pour caculer plus facilement $W_{e1\rightarrow 2}$:

$$W_{e1\rightarrow 2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{F}}_\mathrm{e}.\, d\vec{\mathbf{l}}_2 = \int_{P_1}^{P_1{}'} \vec{\mathbf{F}}_\mathrm{e}.\, d\vec{\mathbf{l}}_2 + \int_{P_1{}'}^{P_2} \vec{\mathbf{F}}_\mathrm{e}.\, d\vec{\mathbf{l}}_2 = q_0 E(y_1 - y_1') + 0$$

- On en déduit: $W_{e1\rightarrow 2} = W_{e1\rightarrow 1'} \Rightarrow U_{e2} = U_{e1'}$

Energie potentielle électrique dans un champ uniforme: équipotentielles

- Si q_0 se déplace **perpendiculairement** à $\vec{\mathbf{E}}$, la force électrique n'effectue **pas de travail** et q_0 ne subit donc **pas de variation d'énergie potent**ielle.
- Pour un y donné, U_e est constante quel que soit x: $U_e = q_0 E y$



- A chaque ligne horizontale correspond un niveau d'énergie potentielle électrique qui dépend de y. On appelle ces lignes des **équipotentielles**.

Agenda Cours 3

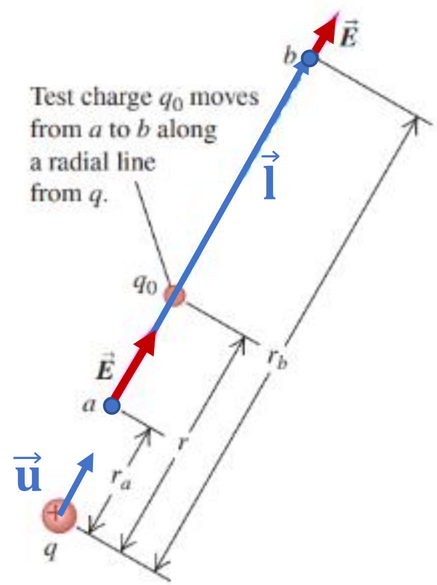
1. Rappels sur Gauss
2. Rappels sur l’énergie mécanique
3. L’énergie potentielle électrique: champ uniforme
4. L’énergie potentielle électrique: système de charges
5. Potentiel électrique
6. Equipotentielles

Energie potentielle électrique: cas de deux charges ponctuelles (1)

- Si q_0 se déplace de a à b de manière radiale:

$$W_{ea\to b} = \int_a^b \vec{\mathbf{F}}_\mathrm{e}.\, d\vec{\mathbf{l}} \quad \text{avec:}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_\mathrm{e} = k\frac{qq_0}{r^2}\vec{\mathbf{u}} \quad \text{et} \qquad d\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{u}}dr$$



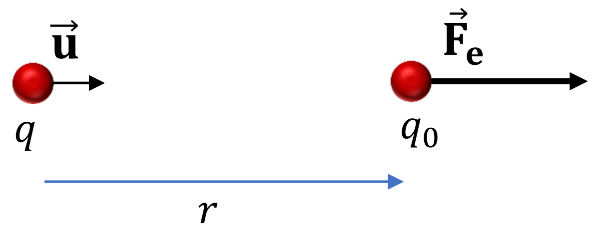
Cette fois, $\vec{\mathbf{F}}_\mathrm{e}$ n'est pas constante !

$$W_{ea\to b} = \int_a^b \left(k\frac{qq_0}{r^2}\vec{\mathbf{u}}\right).(\vec{\mathbf{u}}dr) = kqq_0\int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$= kqq_0\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

- On définit **l'énergie potentielle** dans le cas de deux charges: $U_e(r) \triangleq k\frac{qq_0}{r} + U_0$
- Ce qui permet d'écrire: $W_{ea\to b} = -(U_{eb} - U_{ea}) = -\Delta U_e$

Energie potentielle électrique: cas de deux charges ponctuelles (2)



- L'énergie potentielle due à deux charges dépend de la position:

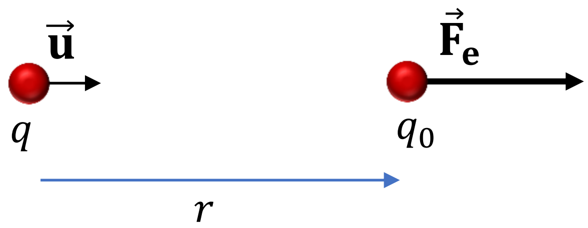
$$U_e(r) \triangleq k\frac{qq_0}{r} + U_0$$

- En $r = +\infty$, on choisit souvent $U_e(+\infty) = 0$. Ceci impose $U_0 = 0$

$$U_e(r) = k\frac{qq_0}{r}$$

Energie potentielle électrique: cas de deux charges ponctuelles (3)

$$U_e(r) = k\frac{qq_0}{r}$$



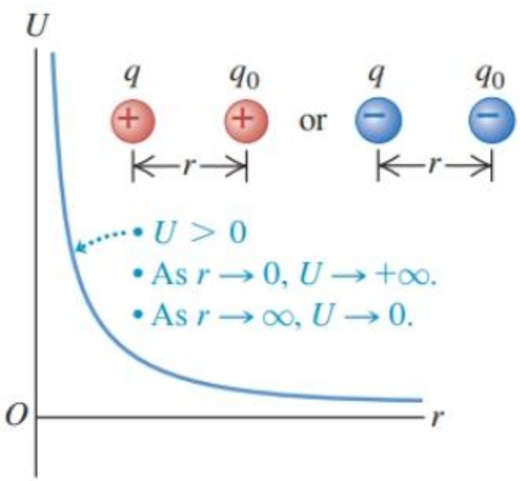
- Si les deux charges sont **positives** (ou négatives) la force est **répulsive**. Dans ce cas:

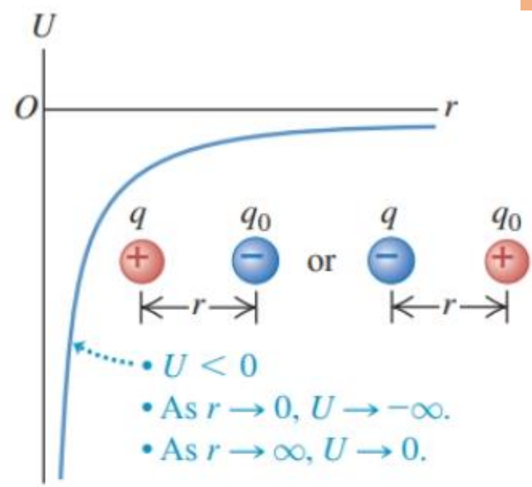
$$U_e(r) = k\frac{qq_0}{r} = -\big(U_e(+\infty) - U_e(r)\big) = W_{r\infty}$$

- L'énergie potentielle électrique en un point représente le travail qui serait effectué par $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{e}$ sur q_0 si q_0 se déplaçait de ce point jusque **l'infini**.
- C'est aussi le travail que devrait fournir une **force extérieure** pour amener la charge q_0 de l'infini au point considéré.

Energie potentielle électrique: cas de deux charges ponctuelles (4)

- L'énergie potentielle due à deux charges dépend de la position: $U_e(r) = k\frac{qq_0}{r}$

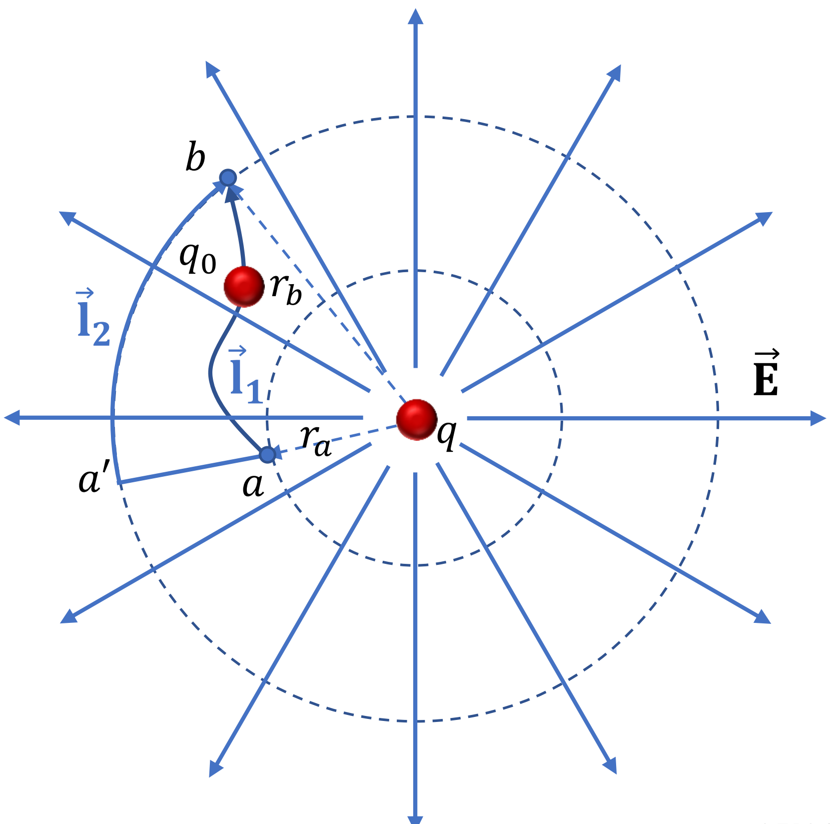




- Lorsque les deux charges sont de signes opposés $U_e(r) < 0$. C'est une convention qui ne doit pas effrayer, ce qui nous intéresse en général est la **différence d'énergie potentielle** entre deux points.

Energie potentielle électrique: cas de deux charges ponctuelles (5)

- Si q_0 se déplace d'un point a à un point b **non alignés radialement**:



$$W_{ea\to b} = \int_a^b \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{e} . d\vec{\mathbf{l}}_\mathbf{1} = -(U_{eb} - U_{ea})$$

Comme $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{e}$ est conservative:

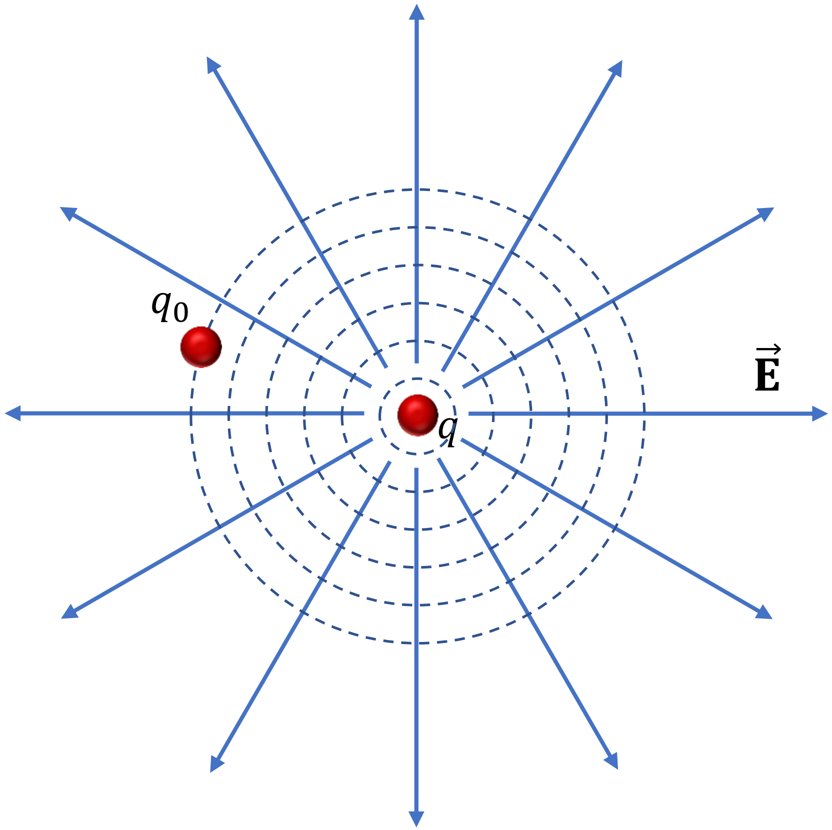
$$W_{ea\to b} = \int_a^{a'} \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{e} . d\vec{\mathbf{l}}_\mathbf{2} + \int_{a'}^b \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{e} . d\vec{\mathbf{l}}_\mathbf{2}$$

$$W_{ea\to b} = kqq_0\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_{a'}}\right) + 0$$

$$\Rightarrow\ W_{ea\to b} = -(U_{ea'} - U_{ea})$$
$$\Rightarrow\ U_{ea'} = U_{eb}$$

Energie potentielle électrique: cas de deux charges ponctuelles: équipotentielles

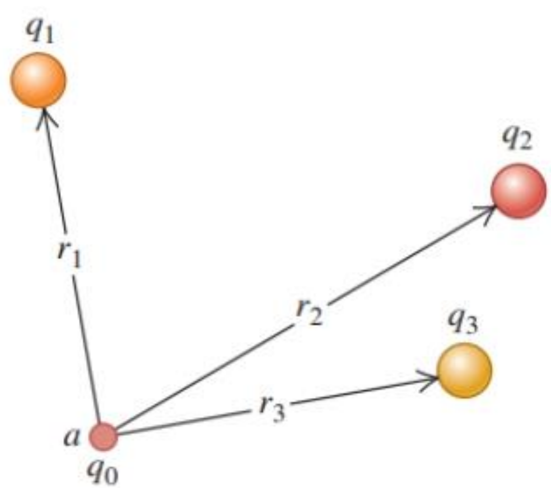
- Puisque $U_e(r) = k\,\frac{qq_0}{r}$, $\boldsymbol{U_e}$ **est constante sur une sphère de rayon** $\boldsymbol{r}$ **donnée.**



Si la charge q_0 se déplace sur une sphère centrée sur q son énergie potentielle reste constante. Le travail effectué par la force électrostatique est nul.

Energie potentielle en présence d'un système de charges

- Lorsque q_0 se déplace dans un système de **plusieurs charges**, chaque charge en présence est responsable d'une force qui effectue un travail sur q_0. **L'énergie potentielle** de q_0 est donc la **somme des énergies potentielles** associées à chaque charge:



$$U_e = kq_0\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \ \dots\right) = kq_0 \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

U_e existe donc pour **toute distribution de charges**.

La force électrostatique est donc toujours conservative.

Agenda Cours 3

1. Rappels sur Gauss
2. Rappels sur l'énergie mécanique
3. L'énergie potentielle électrique: champ uniforme
4. L'énergie potentielle électrique: système de charges
5. Potentiel électrique
6. Equipotentielles

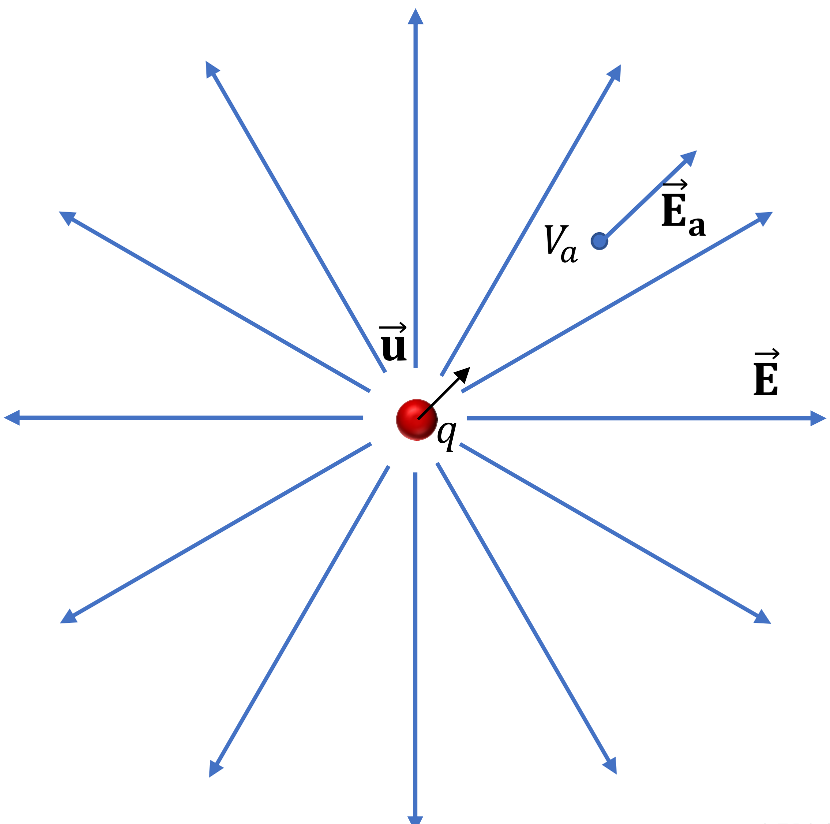
Potentiel électrique

- Pour un champ uniforme: $U_e = q_0 E y + U_0$
- Pour deux charges ponctuelles: $U_e = k q_0 \frac{q}{r} + U_0$
- Pour un système de charges ponctuelles: $U_e = k q_0 \sum_i \frac{q_i}{r_i} + U_0$
- Dans chaque cas:
  - U_e dépend de la position dans l'espace,
  - U_e est proportionnelle à q_0.
- On définit une nouvelle quantité **indépendante** de q_0, le **potentiel électrique** V, telle que: $U_e = V q_0$ => V [J/C]
- 1 J/C = 1 Volt = 1 V

Potentiel électrique d'une charge ponctuelle

- Dans le cas d'une charge ponctuelle:

$$V(r) = k\frac{q}{r} + V_0$$



- En tout point a, on a:

$$\vec{\mathbf{E}}_\mathbf{a} = k\frac{q}{r_a^2}\vec{\mathbf{u}}$$

$$V_a = k\frac{q}{r_a} + V_0$$

- On choisit en général :

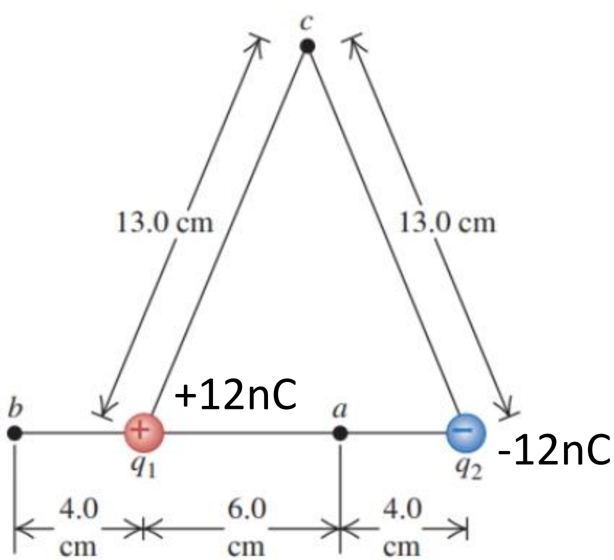
$$V(\infty) = 0 \Rightarrow V_0 = 0$$

$$V_a = k\frac{q}{r_a}$$

Potentiel électrique d'un système de charges (1)

❑ Pour un système de charges ponctuelles : $V(r) = k\sum_i \frac{q_i}{r_i}$

Figure 23.13 What are the potentials at points *a*, *b*, and *c* due to this electric dipole?



$$V(r) = k\frac{q_1}{r_1} + k\frac{q_2}{r_2}$$

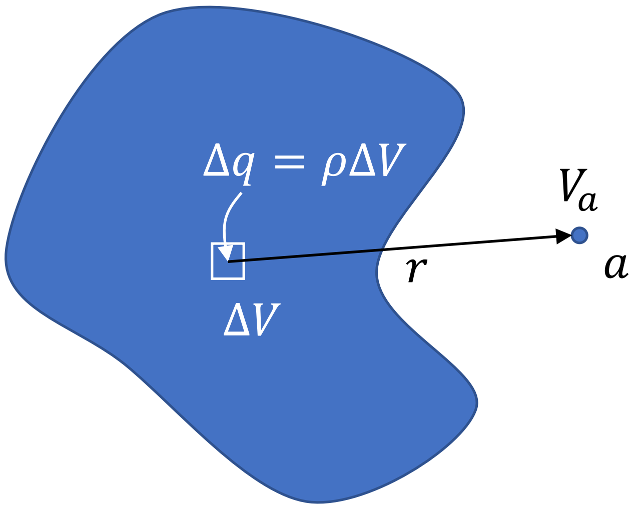
$$V_a = 9.10^9\,\frac{12.10^{-9}}{0.06} + 9.10^9\,\frac{(-12.10^{-9})}{0.04} = -900\ V$$

$$V_b = 1930\ V$$

$$V_c = 0\ V$$

Potentiel électrique d'un système de charges (2)

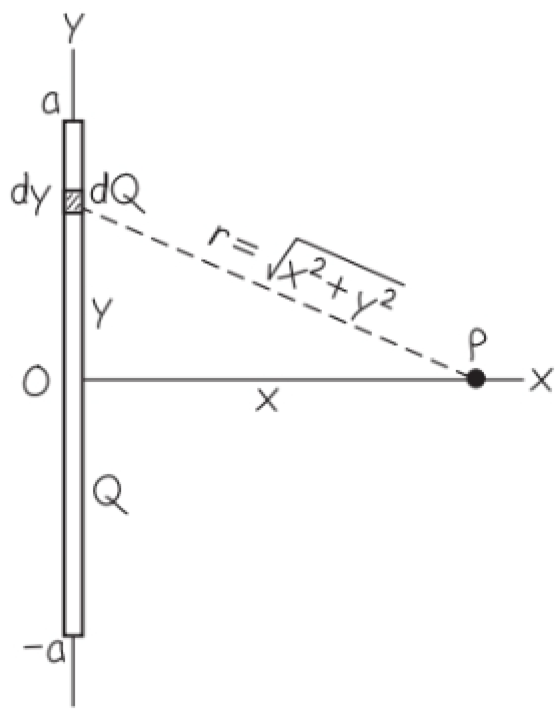
- Pour une densité charge $\rho(r)$ distribuée sur un volume V_{tot}:



$$V = k \int_Q \frac{dq}{r} = k \int_V \rho(r) \frac{dV}{r}$$

Potentiel électrique d'un système de charges (3)

- Exemple 23.12 (barreau chargé). Que vaut V au point P?



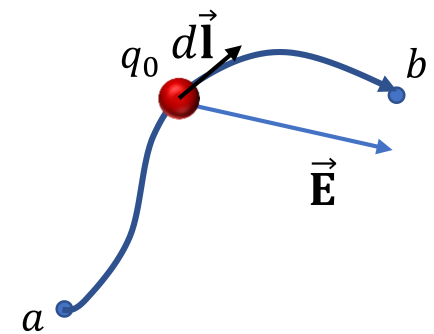
$$V = k \int_{Q} \frac{dq}{r} = k \int_{-a}^{a} \lambda \frac{dy}{r}$$

…

$$V = k \frac{Q}{2\text{a}} \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{\sqrt{a^2+x^2}-a}\right)$$

Relation entre champ E et potentiel électrique (1)

- Dans certains cas, il est plus facile de calculer le potentiel électrique en un point de l'espace à partir du **champ électrique**.
- Il existe en effet un **lien** entre les deux grandeurs:



$$W_{ea\to b} = \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\,.\,d\vec{\mathbf{l}} = \int_a^b q_0\vec{\mathbf{E}}\,.\,d\vec{\mathbf{l}} = -(U_b - U_a)$$

- Il en résulte:

$$\int_a^b \vec{\mathbf{E}}\,.\,d\vec{\mathbf{l}} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) = -(V_b - V_a) = V_a - V_b$$

- ***L'intégrale de ligne de $\vec{\mathbf{E}}$ entre deux points de l'espace est l'opposée de la différence de potentiel entre ces deux points (quel que soit le chemin !)***.
- Cette relation montre que $\vec{\mathbf{E}}$ s'exprime également en [V/m] (1 N/C = 1 V/m)

Relation entre champ E et potentiel électrique (2)

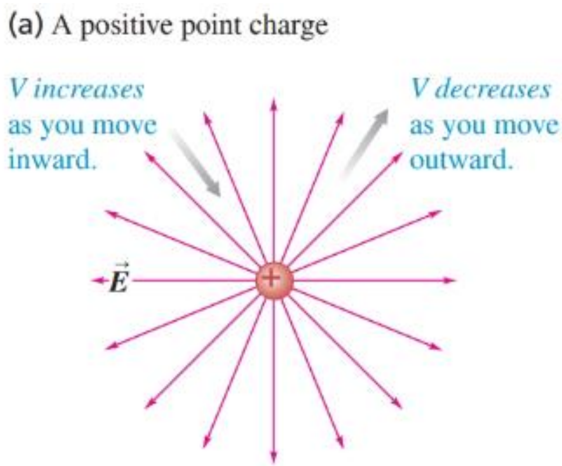
$$\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \, . \, d\vec{\mathbf{l}} = V_a - V_b$$

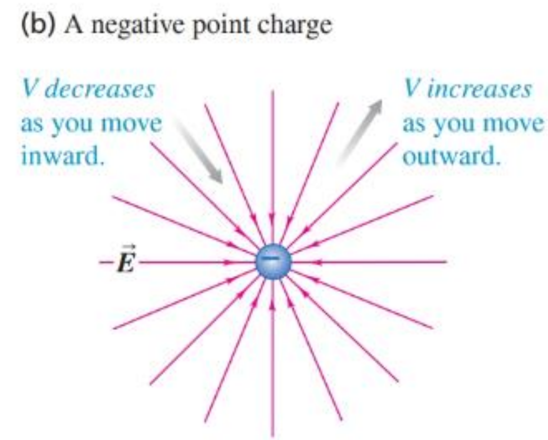
- Si l'intégrale est positive (ie, si le chemin suit une ligne de champ):

$$V_a > V_b$$

- Si l'intégrale est négative (ie, si le chemin remonte une ligne de champ):

$$V_a < V_b$$

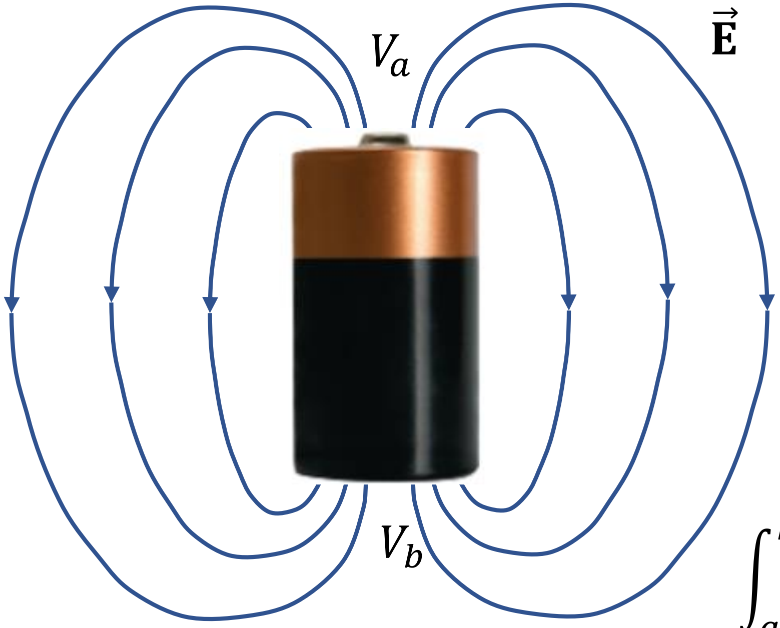




Relation entre champ E et potentiel électrique (3)

$$\int_a^b \vec{\mathbf{E}}\,.\,d\vec{\mathbf{l}} = V_a - V_b$$

- Ex: pile



$$\int_a^b \vec{\mathbf{E}}\,.\,d\vec{\mathbf{l}} = V_a - V_b = 1{,}5\ V$$

Gradient du potentiel électrique (1)

- La différence de potentiel entre deux points est donnée par:

$$\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \, . \, d\vec{\mathbf{l}} = V_a - V_b$$

- Si on connait $\vec{\mathbf{E}}$ en tout point et V en un point, on peut determiner V en tout point de l'espace.
- Est-il également possible de déterminer $\vec{\mathbf{E}}$ en tout point de l'espace si l'on connait V en tout point ?

Gradient du potentiel électrique (2)

- Par définition de l'intégrale:

$$V_b - V_a = \int_a^b dV = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \,.\, d\vec{\mathbf{l}}$$

- On a donc $dV = -\vec{\mathbf{E}}.\, d\vec{\mathbf{l}} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$
- Puisque V est une fonction de x, y et z, on a:

$$dV(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

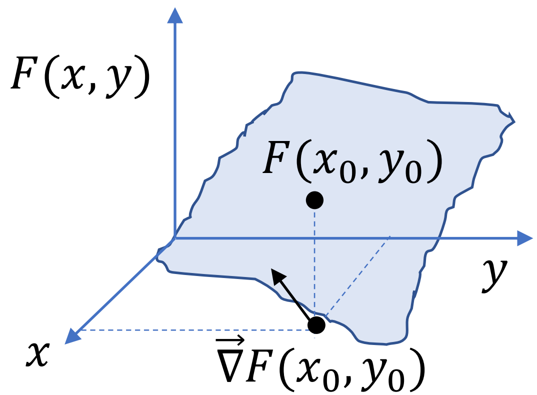
- On en déduit donc:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- Ou encore: $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V$ où $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = "\textit{gradient de}"$

Gradient du potentiel électrique (3)

- Le **gradient** d'une fonction est un vecteur qui pointe dans la direction de l'espace où cette fonction **croit le plus**. Exemple à 2 dimensions:



- Connaissant $V(x,y,z)$ on peut trouver $\vec{\mathbf{E}}(x,y,z)$ en tout point de l'espace en utilisant les relations:

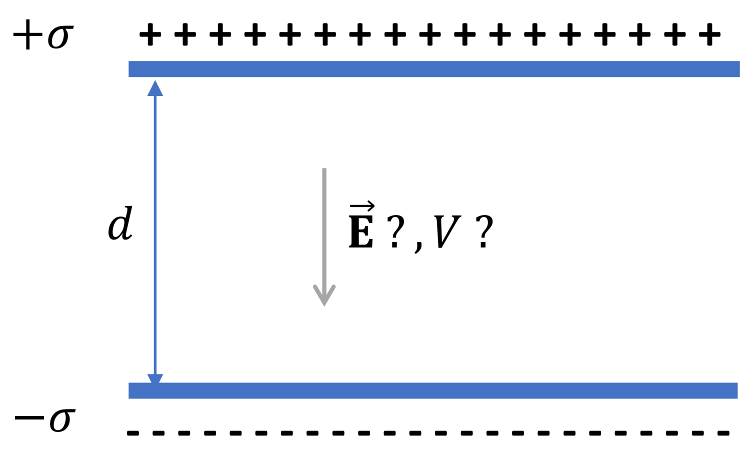
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- $\vec{\mathbf{E}}(x,y,z)$ étant "moins le gradient du potentiel", $\vec{\mathbf{E}}(x,y,z)$ pointe dans la direction de l'espace ou $V(x,y,z)$ **décroit** le plus.

Exemple: deux plaques parallèles chargées (1)

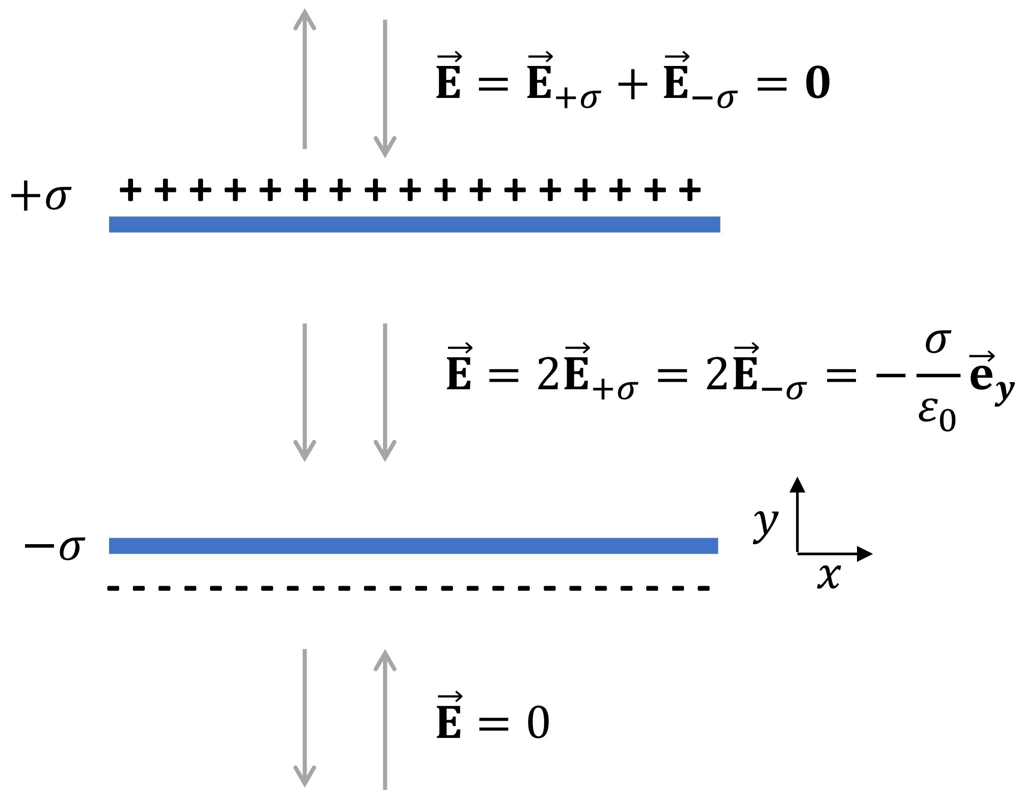
- Deux feuilles parallèles infinies séparées d'une distance d et portant respectivement une densité surfacique de charge $+\sigma$ et $-\sigma$.

1) Que valent $\vec{\mathbf{E}}(x, y)$ et $V(x, y)$?
2) Que vaut la différence de potentiel entre les deux plaques?



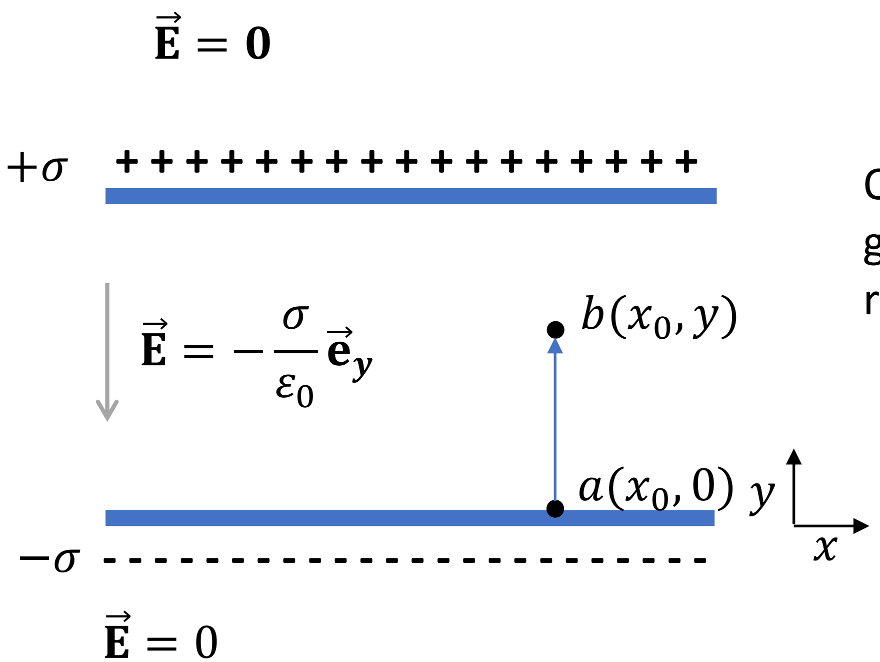
Exemple: deux plaques parallèles chargées (2)

- **Méthode**: calcul de $\vec{\mathbf{E}}$, puis intégration pour déterminer V



Exemple: deux plaques parallèles chargées (3)

- **Méthode** : calcul de $\vec{\mathbf{E}}$ puis intégration pour déterminer V



$$\int_a^b \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = V_a - V_b$$

On peut choisir a et b arbitrairement. En général, on choisit a comme étant un point de référence dont on connait la valeur du potentiel.

$$\int_0^y \left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{\mathbf{e}}_y\right).\left(dy\vec{\mathbf{e}}_y\right) = V(0) - V(y)$$

$$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^y dy = V(0) - V(y)$$

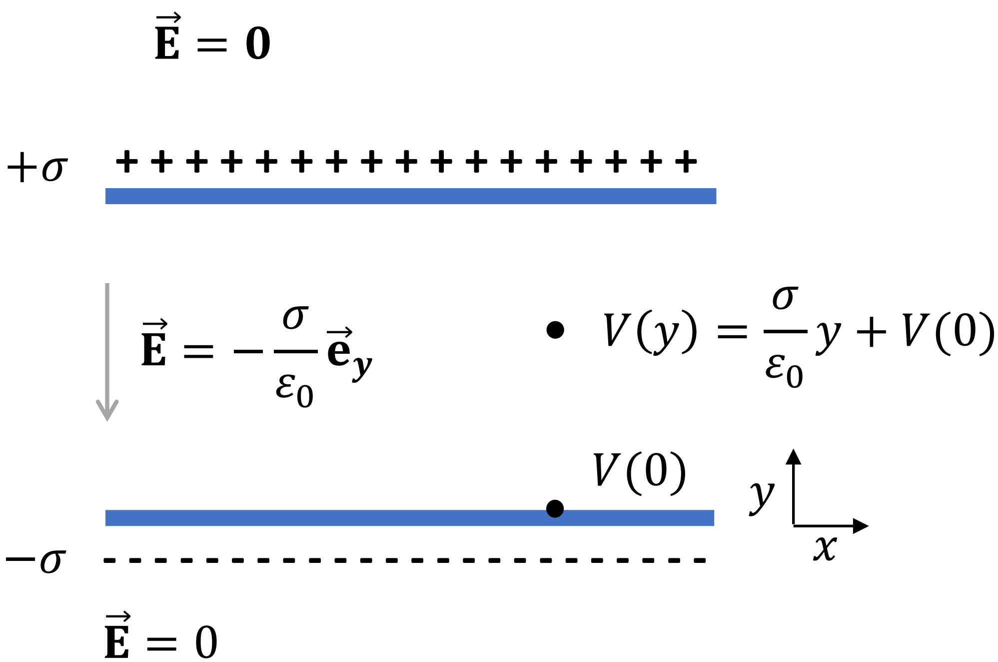
$$V(y) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}y + V(0)$$

(1) $V(y)$ défini à une constante près ! => Si on choisit $V(0) = 0$, alors: $V(y) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}y$

(2) On a bien: $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V$

Exemple: deux plaques parallèles chargées (4)

- Différence de potentiel (ΔV) entre les plaques:



Il faut calculer $V(d)$:

$$V(d) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d + V(0)$$

On obtient donc:

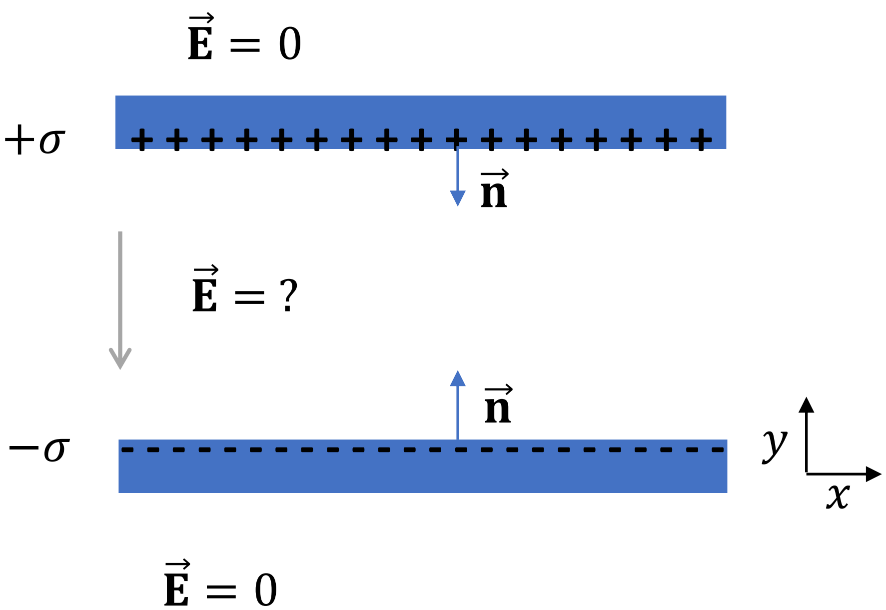
$$\Delta V = V(d) - V(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

Ou encore:

$$\Delta V = Ed$$

Exemple: deux plaques parallèles chargées (5)

- Si les feuilles sont remplacées par un conducteur parfait d'une certaine épaisseur t**:**



On peut aussi calculer le champ entre les plaques en utilisant la CL: $\vec{\mathbf{n}}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

En $y = 0$, cela donne:

$$\vec{\mathbf{n}}.\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{y}}.\left(E\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{y}}\right) = E = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{y}}$$

En $y = d$:

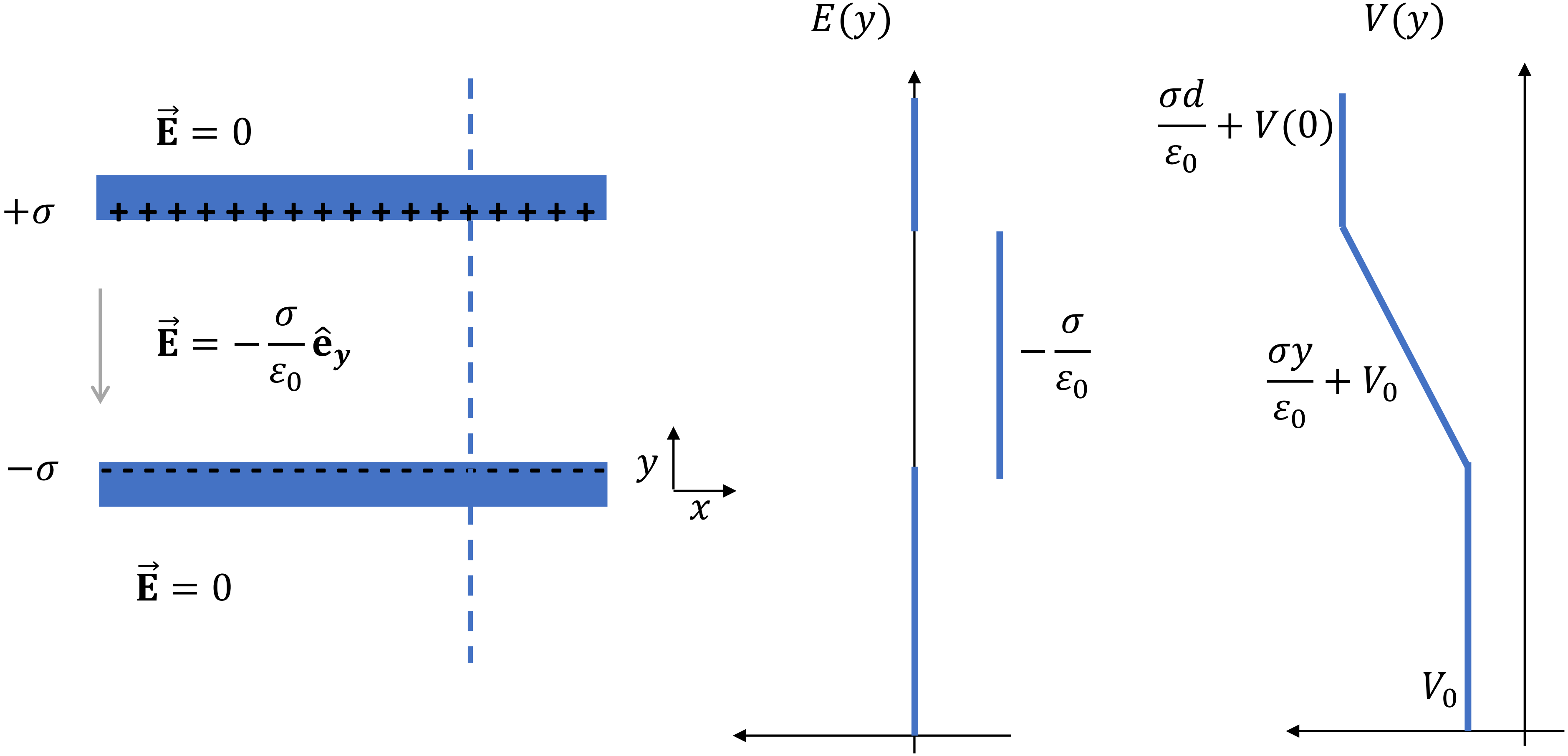
$$\vec{\mathbf{n}}.\vec{\mathbf{E}} = (-\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{y}}).\left(E\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{y}}\right) = -E = \frac{+\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{y}}$$

$\vec{\mathbf{E}}$ est constant entre les plaques (Gauss)

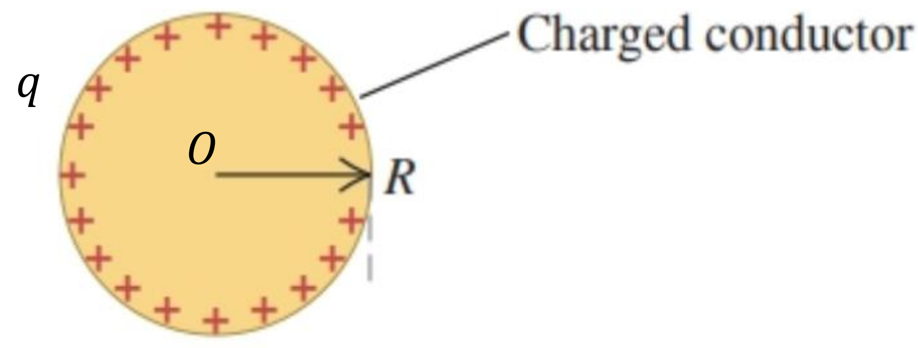
Exemple: deux plaques parallèles chargées (6)

- E et V en fonction de y



Exemple: sphère chargée (1)

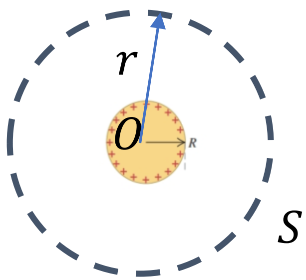
- Exemple 3.28 du livre de référence:
- Sphère conductrice de rayon R chargée par une quantité de charge q.



- Que vaut $E(r)$ et $V(r)$ pour $r < R$ et $r > R$?

Exemple: sphère chargée (2)

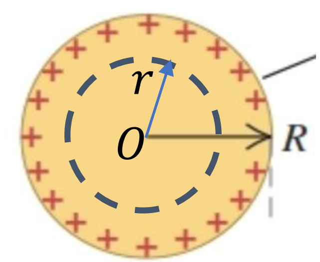
- Calcul de $E(r)$: on utilise Gauss !
  - $r > R$: on choisit une sphère centrée sur O de rayon r. Par symétrie, le champ E est radial et constant sur la sphère.



$$\int_S \vec{\mathbf{E}}(r).\,d\vec{\mathbf{s}} = SE(r) = (4\pi r^2)E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

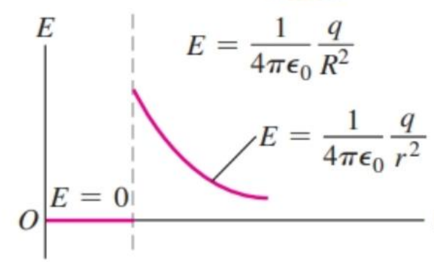
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

  - $r < R$: on choisit une sphère centrée sur O de rayon r. Par symétrie, le champ E est radial et constant sur la sphère.



$$\int_S \vec{\mathbf{E}}(r).\,d\vec{\mathbf{s}} = SE(r) = (4\pi r^2)E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0\ !$$

$$E(r) = 0\ !$$



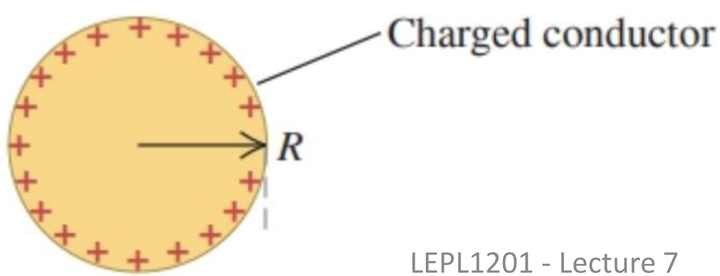
Exemple: sphère chargée (3)

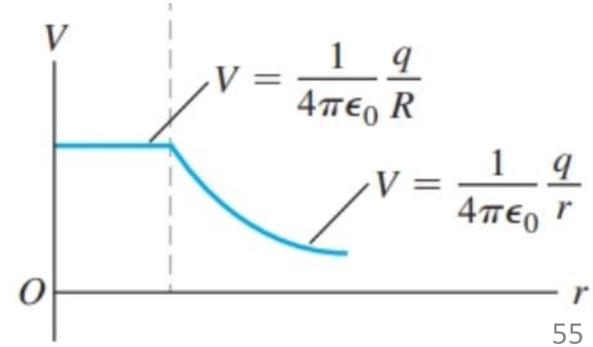
- Calcul de $V(r)$:
  - $r > R$: on peut calculer $V(r)$ connaissant $E(r)$:

$$\int_{\infty}^{r} \vec{\mathbf{E}}\,.\,d\vec{\mathbf{l}} = V_{\infty} - V(r)$$

$$\int_{\infty}^{r} \vec{\mathbf{E}}\,.\,d\vec{\mathbf{l}} = -\int_{\infty}^{r} E(r')\ dr' = -kq\int_{\infty}^{r} \frac{1}{r'^2}\,dr' = k\,\frac{q}{r}$$

  - $r < R$: on peut utiliser la même expression,
    mais vu que $E(r)$ = 0, $V(r)$ est une constante (à déterminer).
    $V(r < R) = V(R) = k\,\frac{q}{R}$





L’électron volt

- Lorsqu’une charge q se déplace d’un point de potentiel V_a à un point de potentiel V_b, elle acquiert une énergie:

$$\Delta U = U_b - U_a = q(V_b - V_a) = q\Delta V$$

- Si $q = e = 1{,}6\ 10^{-19}\ \mathrm{C}$ et $\Delta V = 1\ \mathrm{V}$, on obtient:

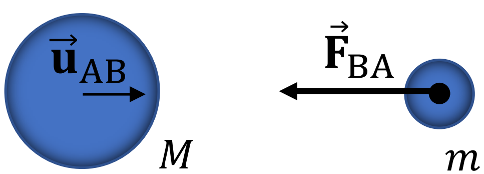
$$\Delta U = 1{,}6\ 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

- Cette quantité représente **1 électron volt [eV]**
- Elle est souvent utilisée pour exprimer l’énergie de particules élémentaires.
- Des multiples meV, keV, MeV, GeV, TeV sont aussi souvent utilisés.

Potentiel gravitationnel

- On a défini en tout point de l'espace un **potentiel électrique** $V = \frac{U_e}{q_0}$ ne dependant pas de la charge d'essai q_0 (mais bien de la/des charges sources).
- De même, on peut définir un **potentiel gravitationnel** en tout point de l'espace qui ne dépend que de la/des masses sources: $V_g = \frac{U_g}{m}$.
- Exemple pour deux masses:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{BA}} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{AB}}$$



$$U_g = -G\frac{Mm}{r} + U_{g0}$$

$$V_g = -G\frac{M}{r} + V_{g0}$$

- Peu utilisé sauf dans des problèmes d'astrophysique

Agenda Cours 3

1. Rappels sur Gauss
2. Rappels sur l’énergie mécanique
3. L’énergie potentielle électrique: champ uniforme
4. L’énergie potentielle électrique: système de charges
5. Potentiel électrique
6. Equipotentielles

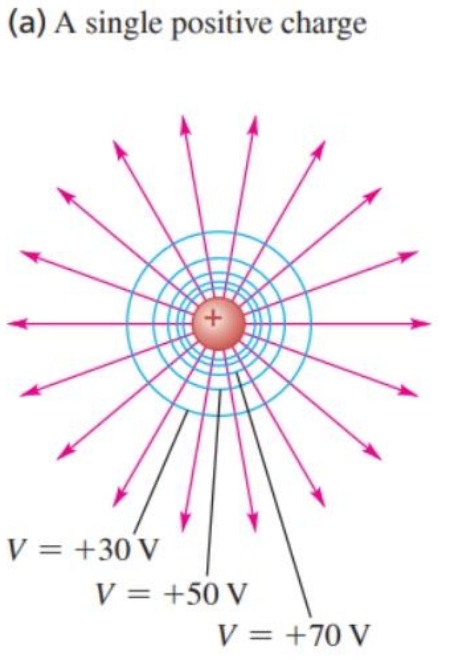
Equipotentielles (1)

- On peut relier entre eux tous les points dans l'espace qui ont la **même valeur de potentiel**.

- Ces ensembles de points forment des surfaces dans l'espace, appelées **équipotentielles**.

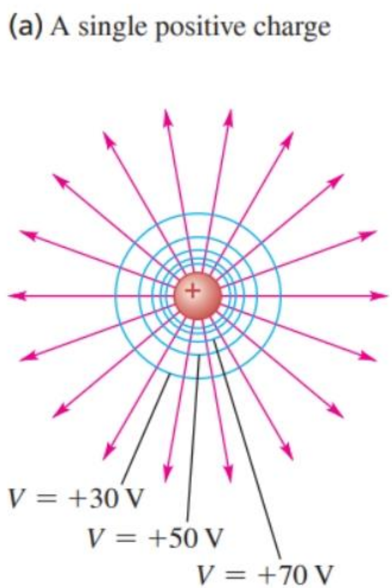
- Une charge q_0 placée sur une équipotentielle V a un niveau d'énergie $q_0 V$

- Déplacer q_0 d'une équipotentielle à une autre nécessite un travail $q_0(V_b - V_a)$



Equipotentielles (2)

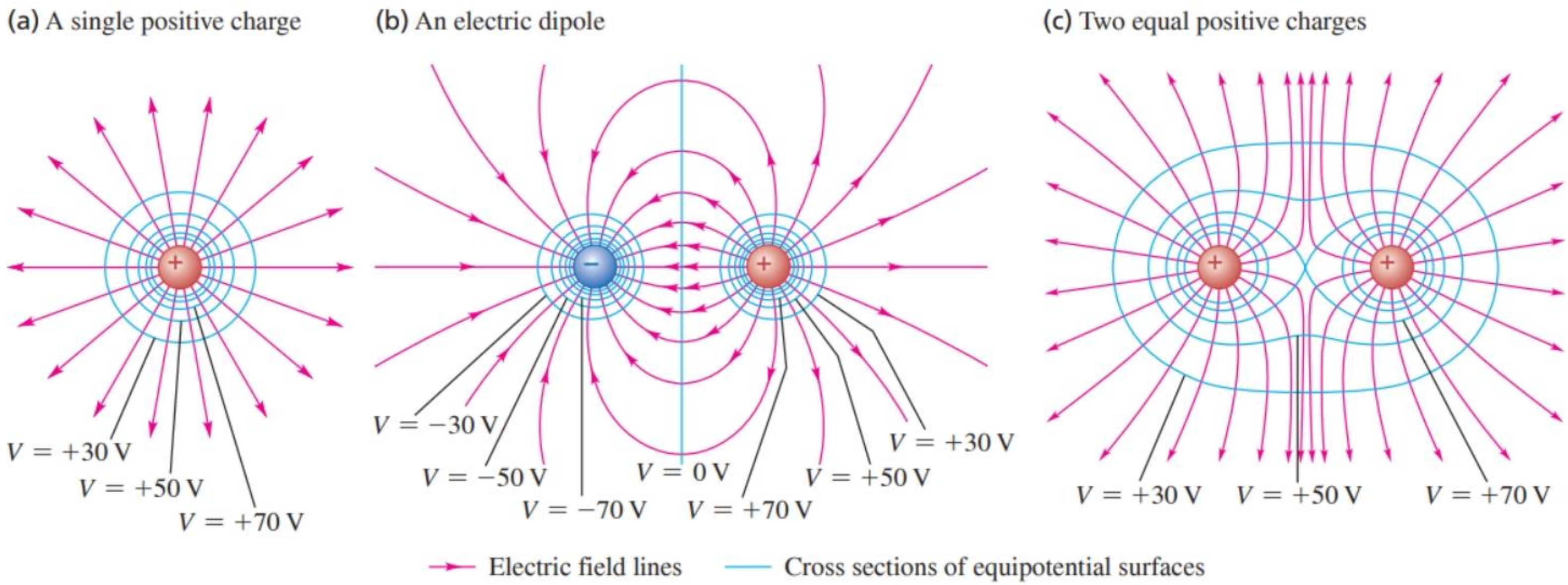
- Les équipotentielles électriques sont analogues aux **courbes de niveau** sur des cartes topographiques.



$V_g = Cst$

Equipotentielles (3)

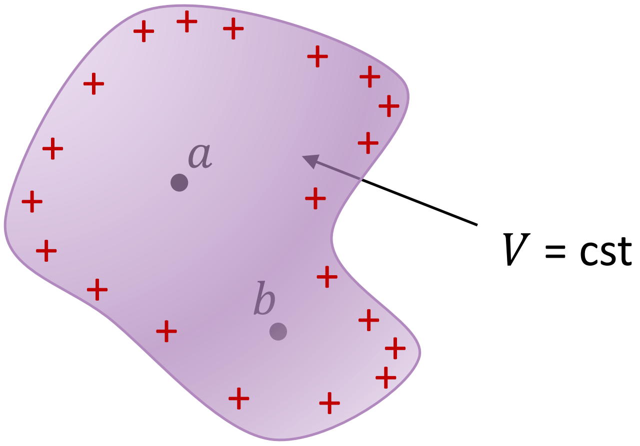
- Exemples de surfaces équipotentielles:



- Les équipotentielles sont nécessairement **perpendiculaires** aux lignes de **champ E**
- Là où les équipotentielles sont resserrées, le champ électrique est plus intense.

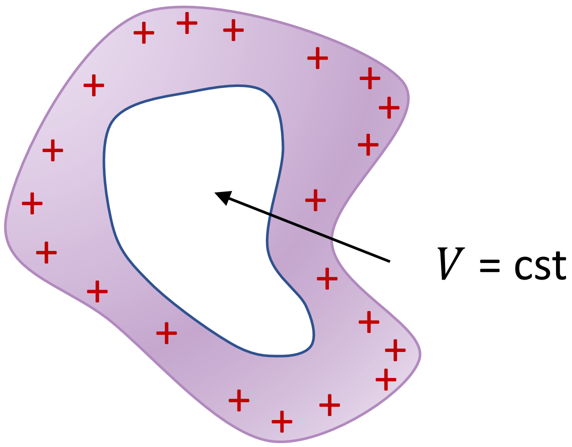
Equipotentielles et conducteurs

- Le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur chargé au repos est nécessairement nul (sinon les charges ne seraient pas au repos).
- Puisque $\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \, . \, d\vec{\mathbf{l}} = V_a - V_b$, on a $V_a - V_b = 0$ pour toute paire de point appartenant au conducteur.
- Le potentiel en tout point d'un conducteur chargé au repos est donc constant. Le **conducteur** chargé forme un **volume équipotentiel**.



Equipotentielles et cage de Faraday

- Si une **cavité** est formée à l'intérieur d'un conducteur et que cette cavité ne renferme aucune charge, le **champ électrique à l'intérieur** de cette cavité est **nul** (principe de la cage de Faraday).
- Le **potentiel électrique** y est donc **constant** également



Synthèse du cours 7 (1)

- La force électrique est conservative. On peut donc lui associer une énergie potentielle (U_e) telle que le travail effectué par cette force lorsqu'une charge q_0 se déplace entre deux points a et b est l'opposé de la variation d'énergie potentielle de la charge entre ces deux points: $W_{ea\rightarrow b} = -(U_b - U_a) = -\Delta U_e$
- On définit le potentiel électrique: V tel que $U_e = Vq_0$. Cette grandeur ne dépend pas de q_0 et dépend de la position dans l'espace. Sa valeur est définie à une constante près.
- Pour une charge isolée, le potentiel électrique vaut: $V(r) = k\frac{q}{r}$ à condition de poser $V(\infty) = 0$.
- Dans le cas d'un système de charges cela donne: $V = k\sum_i \frac{q_i}{r_i}$.
- Si les charges sont distribuées sur un volume V_{tot}, on a alors $V = k\int_{V_{tot}} \frac{\rho(r)}{r} dV$
- Le potentiel et le champ électrique sont liés par des relations.

Synthèse du cours 7 (2)

- Si l'on connait $\vec{\mathbf{E}}(x, y, z)$ en tout point de l'espace, on peut determiner $V(x, y, z)$:

$$\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \,. d\vec{\mathbf{l}} = V_a - V_b$$

Connaissant V_a au point de référence a, on peut donc déterminer V en tout point b.

- Réciproquement, si l'on connait $V(x, y, z)$ en tout point, on peut déterminer $\vec{\mathbf{E}}(x, y, z)$ grâce à la relation:

$$\vec{\mathbf{E}}(x, y, z) = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} V$$

- Une équipotentielle est une surface dans l'espace pour laquelle tous les points sont au même potentiel. Elles sont nécessairement perpendiculaires aux lignes de champ électrique.

- Un conducteur (chargé ou non) forme un volume équipotentiel.