UCLouvain
École polytechnique de Louvain

LEPL1201
Cours 8 : Capacités et diélectriques

Enseignant: **D. Lederer**

Année académique 2023-24

Agenda LEPL1201

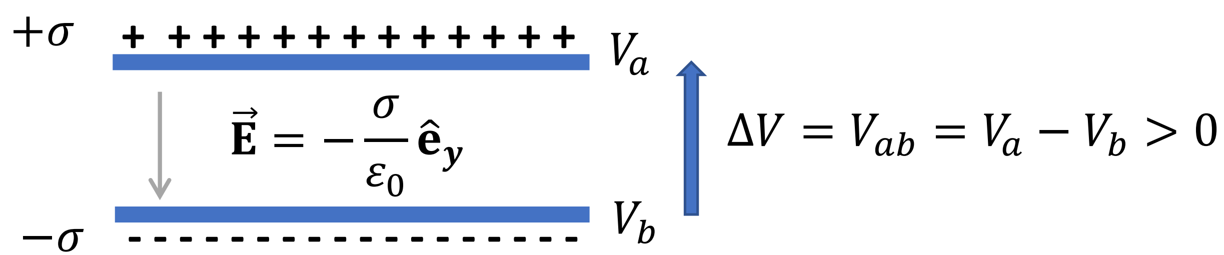
S2	Mardi 26/9	**Cours 1** : **Unités, vecteurs, cinématique** + APP le jeudi
S3	Mardi 3/10	**Cours 2** : **Lois de Newton et gravité** (I) + APP le jeudi
S4	Mardi 10/10	**Cours 3** : **Force de Coulomb** + APP le jeudi
S5	Mardi 17/10	**Cours 4** : **Loi de Gauss** + APP le jeudi
S6	Mardi 24/10	**Cours 5** : **Forces de frottement** (and co) + APP le jeudi
S7	Mardi 31/10	**Cours 6 : Travail, énergie, puissance** + APP le jeudi + **Devoir Python**
S8	Mardi 7/11	**Cours 7** : **Potentiel électrique et moments** + APP le jeudi
S9	Mardi 14/11	**Cours 8** : **Capacités et diélectriques** + APP le jeudi + **LABO 1**
S10	Mardi 21/11	**Cours 9** : **Mouvements circulaires** + APP le jeudi
S11	Mardi 28/11	**Cours 10** : **Mécanique des corps rigides** + APP le jeudi
S12	Mardi 5/12	**Cours 11** : **Courant électrique et résistance** + APP le jeudi
S13	Mardi 12/12	**Cours 12** : **Circuit RC** + APP le jeudi
S14		**LABO 2**

Agenda Cours 3

1. Condensateur et capacité
2. Combinaisons de condensateurs
3. Energie stockée dans un condensateur
4. Diélectriques
5. Loi de Gauss et diélectriques
6. Force exercée sur un diélectrique
7. Condensateurs a plusieurs diélectriques

Deux plaques parallèles: on impose σ

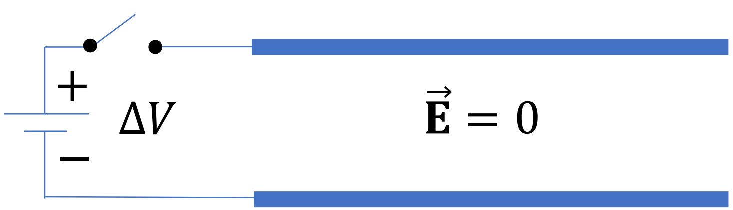
- Si on impose $+\sigma$ et $-\sigma$ sur deux conducteurs plans parallèles infinis:
  - champ $\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{e}}_y$ apparait entre les conducteurs,
  - et une différence de potentiel $\Delta V = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$ s'établit entre les plaques.

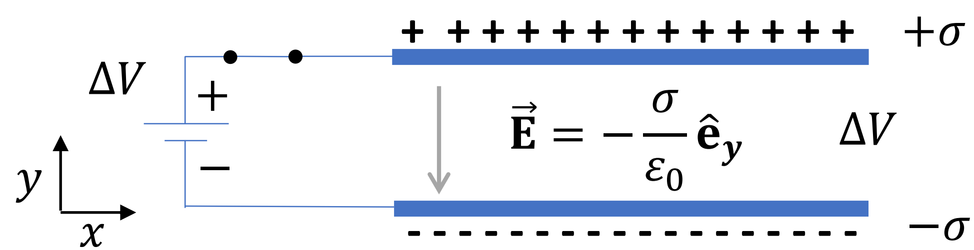


- ΔV, E et σ sont **proportionnels entre eux**.

Deux plaques parallèles: on impose ΔV

- Réciproquement, si on impose une différence de potentiel ΔV (ou tension) entre les plaques (par exemple avec une pile):
  - on crée un champ $\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\Delta V}{d}\hat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{y}}$ entre les plaques
  - on induit des densité surfaciques charges sur les plaques: $\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon_0 \Delta V}{d}$



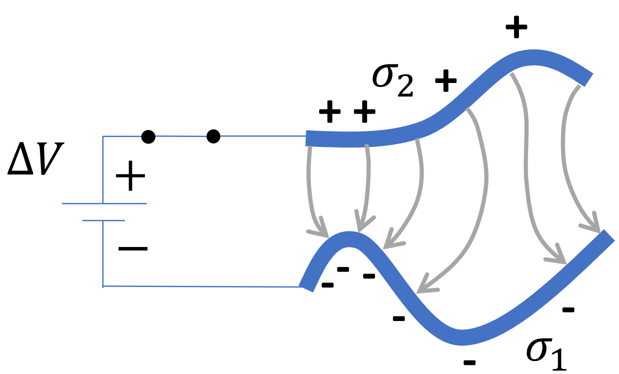


- Il s'agit du même problème électrostatique!
- ΔV, E et σ sont liées par les mêmes relations, et sont donc à nouveau **proportionnels entre eux**.

Condensateur

- Le système de deux plaques parallèles apparait donc comme un dispositif capable de **stocker** des charges. On appelle cela un **condensateur (*capacitor*)**.
- N'importe quelle paire de conducteurs peut former un condensateur.
- Pour tout condensateur, la charge stockée sur l'electrode positive (Q) est égale en norme à celle stockée sur l'electrode négative ($-Q$).
- Q est **proportionnelle** à la différence de potentiel appliquée aux deux bornes du condensateur. En effet, ΔV, E, σ_1 et σ_2 sont proportionels entre eux.

  Si ΔV augmente, E, σ_1 et σ_2 augmentent mais la **forme** des lignes de champ reste **inchangée**.



$$Q_2 = \int_{S_2} \sigma_2 dS \triangleq Q > 0$$

$$Q_1 = \int_{S_1} \sigma_1 dS = -Q_2 = -Q < 0$$

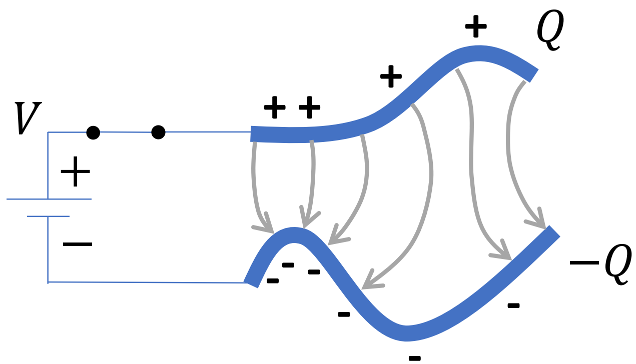
Condensateur et capacité

- Le facteur de proportionnalité entre la charge et la tension appliquée s'appelle la **capacité (*capacitance*)**:

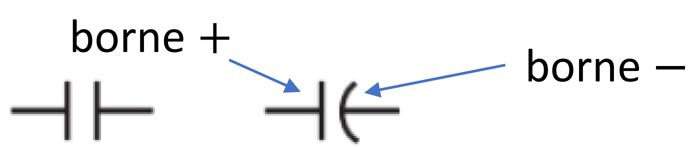
$$\boxed{C \triangleq \frac{Q}{\Delta V}}$$

- La capacité s'exprime en **Farad** [F]
- Souvent, on pose que l'électrode **négative** est au potentiel **nul.**
- Dans ce cas, on a:

$$C \triangleq \frac{Q}{V}$$



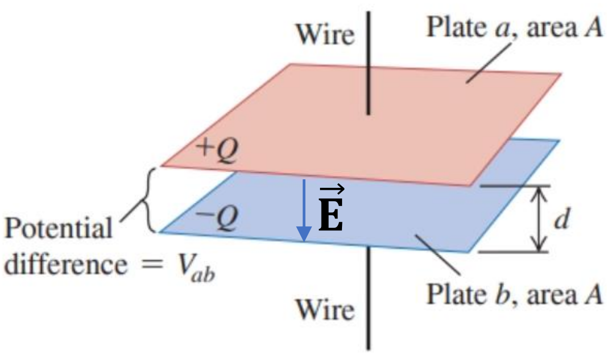
- Connaissant C, on peut relier Q à V: $Q = CV$
- Symboles électriques:

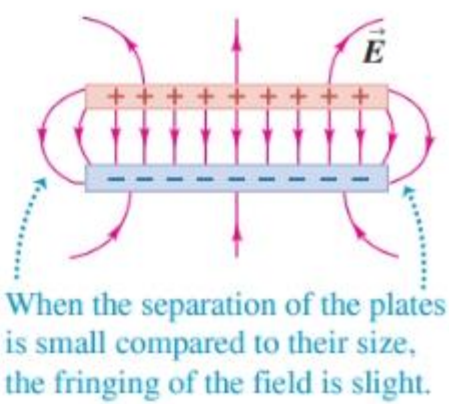


Condensateur à plaques parallèles

- Le condensateur le plus simple est celui formé par **deux plaques parallèles**
- Dans ce cas, le **champ** est donné par: $E = \frac{V}{d} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (CL)
- La **charge** totale vaut donc: $Q = A\sigma = A\frac{V\varepsilon_0}{d} = V\left(A\frac{\varepsilon_0}{d}\right)$
- La **capacité** vaut donc: $\boxed{C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}\ [\mathrm{F}]}$

  Elle ne dépend que des dimensions **géométriques** du condensateur.



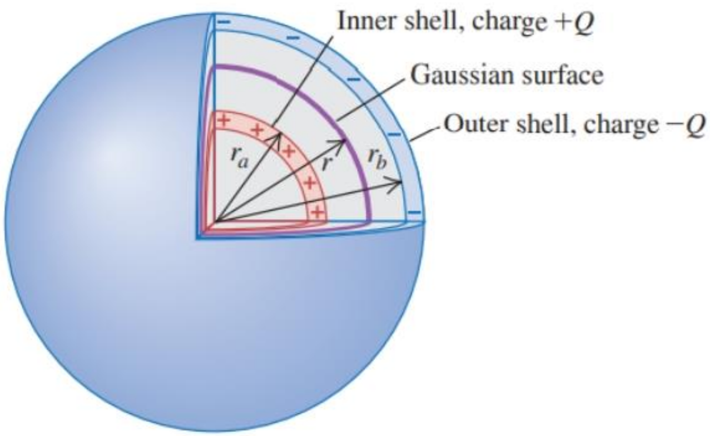


NB: on néglige en général les effets de bord

Condensateur sphérique (1)

- Exemple 24.3 du libre de référence.
- Comment calculer C ?
- Soit
  - on impose les charges $+Q$ et – Q et on calcule E, puis ΔV (**oui**)
  - soit on impose ΔV et on calcule E, puis Q (**non**, pas dans ce cours)

Figure 24.5 A spherical capacitor.



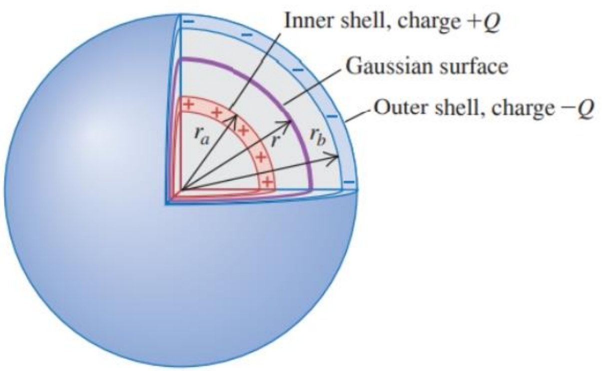
Condensateur sphérique (2)

- Soit $-Q$ sur la sphère extérieure et $+Q$ sur la sphère intérieure.
- Par Gauss, on trouve que le champ $E(r)$ entre les deux sphères vaut:

$$\int_S \vec{\mathbf{E}}(r).\,d\vec{\mathbf{s}} = SE(r) = (4\pi r^2)E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

- On a donc: $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

Figure 24.5 A spherical capacitor.



- $\int_a^b \vec{\mathbf{E}}.\,d\vec{\mathbf{r}} = V_a - V_b$ donne:

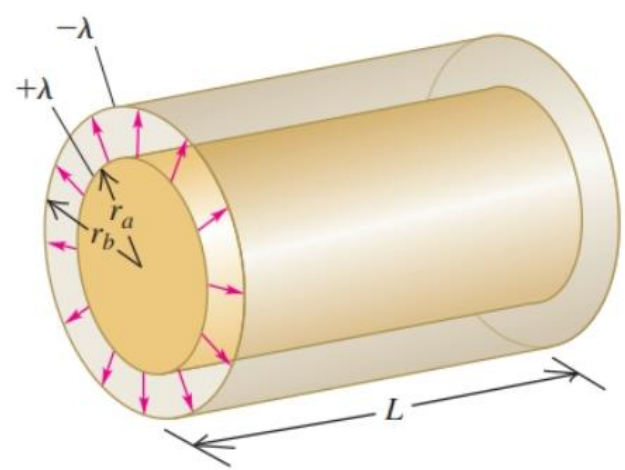
$$V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}\right)$$

- La capacité vaut donc: $C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{r_a r_b}{r_b - r_a}\right)$
- C ne dépend que des **dimensions géométriques**

Condensateur cylindrique

❑ Exemple 24.4 du libre de référence.

Figure **24.6** A long cylindrical capacitor. The linear charge density λ is assumed to be positive in this figure. The magnitude of charge in a length L of either cylinder is λL.

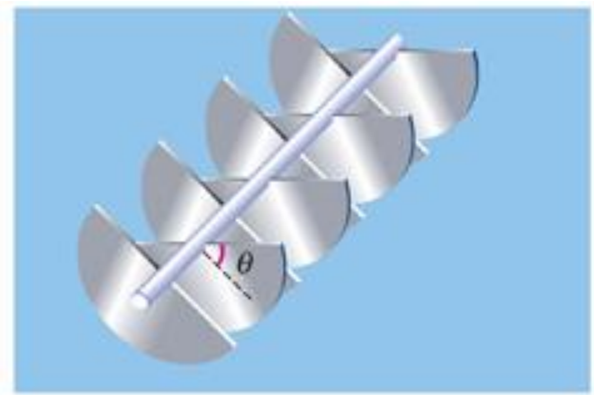


❑ Déterminer C en fonction de r_a et r_b en appliquant la même méthode.
(Voir séance d'exercices)

Condensateurs commerciaux

- Quelques exemples:

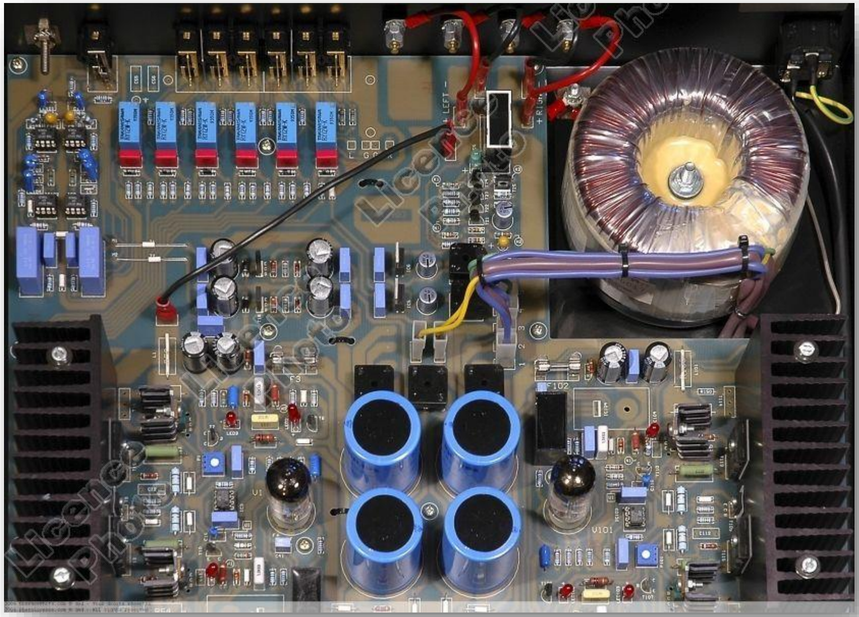
Capa variable:



<u>Anciens postes de radio:</u> En tournant le bouton de syntonisation du poste, on faisait varier la capacité, ce qui faisait varier la fréquence des ondes radio captées par la radio.

- Valeurs typique: 10 pF … 1 µF (1p = 10^{-12})

Utilité?



composant de base des circuits électriques (filtrage)

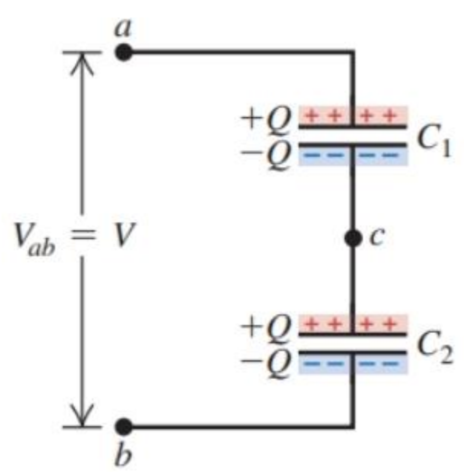
Flash = décharge d'un condensateur

Agenda Cours 3

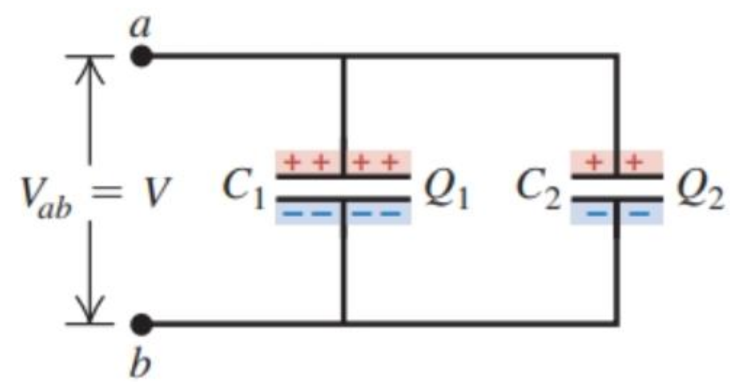
1. Condensateur et capacité
2. Combinaisons de condensateurs
3. Energie stockée dans un condensateur
4. Diélectriques
5. Loi de Gauss et diélectriques
6. Force exercée sur un diélectrique
7. Condensateurs a plusieurs diélectriques

Combinaisons de condensateurs

- Les condensateurs sont fabriqués pour **certaines valeurs de capacité** standard, et pour des **tensions d'opération maximales** spécifiées.
- Il est parfois intéressant de **combiner** des condensateurs pour s'offrir plus de **flexibilité** lors de la conception d'un circuit électrique.
- **Deux types** de combinaison possibles:



mise en série



mise en parallèle

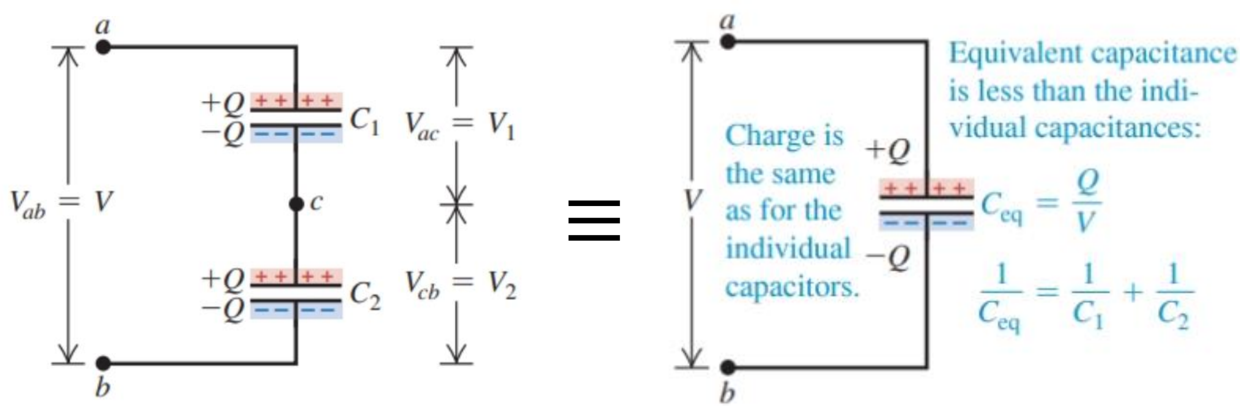
Mise en série de condensateurs (1)

- Lors d'une mise en **série**, la tension appliquée V **se répartit** entre les deux condensateurs, et chaque condensateur porte la **même charge** Q.
- On a donc:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2} \quad \Rightarrow \quad V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

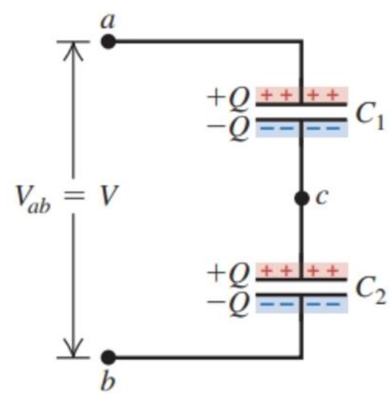
$$\boxed{C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$



- Si N **condensateurs en série**: $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \quad \Rightarrow \quad C_{eq} < C_i$

Mise en série de condensateurs (2)

- Exemple:



- $C_1 = 6\ \text{nF}, C_2 = 12\ \text{nF}$:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6\ 10^{-9}} + \frac{1}{12\ 10^{-9}}$$

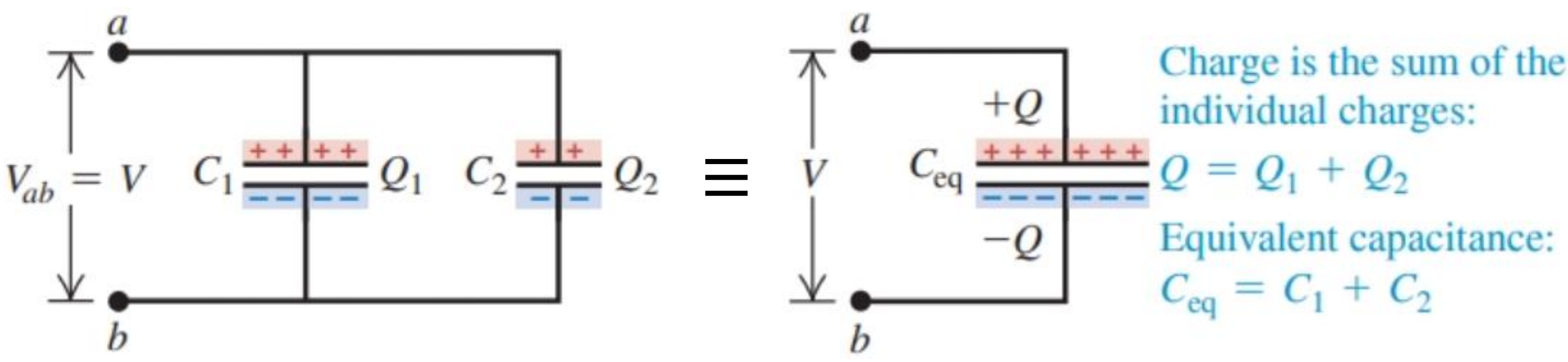
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{3}{12\ 10^{-9}} = \frac{1}{4\ 10^{-9}} \Rightarrow C_{eq} = 4\ 10^{-9} = 4\ \text{nF} < 6\ \text{nF}$$

- **Avantage**: V_{ab} se répartit sur deux condensateurs soumis chacun à une tension plus faible.

Mise en parallèle de condensateurs (1)

- Lors d'une mise en parallèle, la tension appliquée V est la même pour chaque condensateur, et la charge totale se répartit entre les deux condensateurs.
- On a donc:

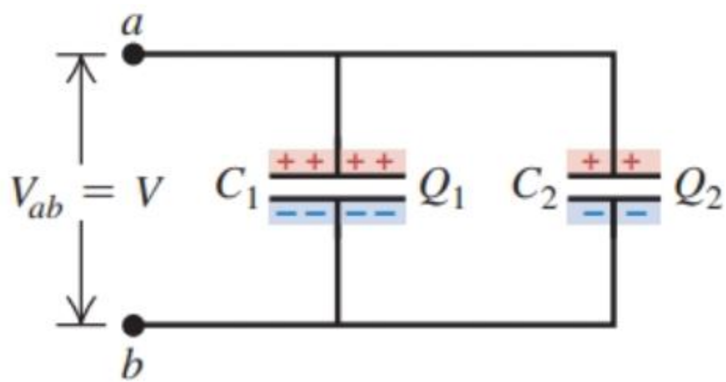
$$Q_1 = C_1 V \quad Q_2 = C_2 V \Rightarrow \quad Q = Q_1 + Q_2 = V(C_1 + C_2) \quad \Rightarrow \boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$



- Si N condensateurs en parallèle: $C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i > C_i$

Mise en parallèle de condensateurs (2)

- Exemple:



- $C_1 = 6$ nF, $C_2 = 12$ nF:

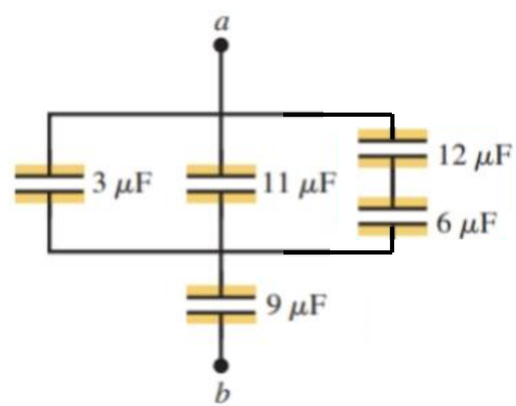
$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 6\ 10^{-9} + 12\ 10^{-9} = 18 \text{ nF} > 12 \text{ nF}$$

- **Avantages**: augmentation de la capacité à un endroit du circuit, et plus grande flexibilité dans le choix de C_{eq}

Réseau de condensateurs

- Dans un circuit, on peut retrouver une **combinaison** de mises en série et de mises en parallèle.

- Exemple 24.6 du livre de référence:

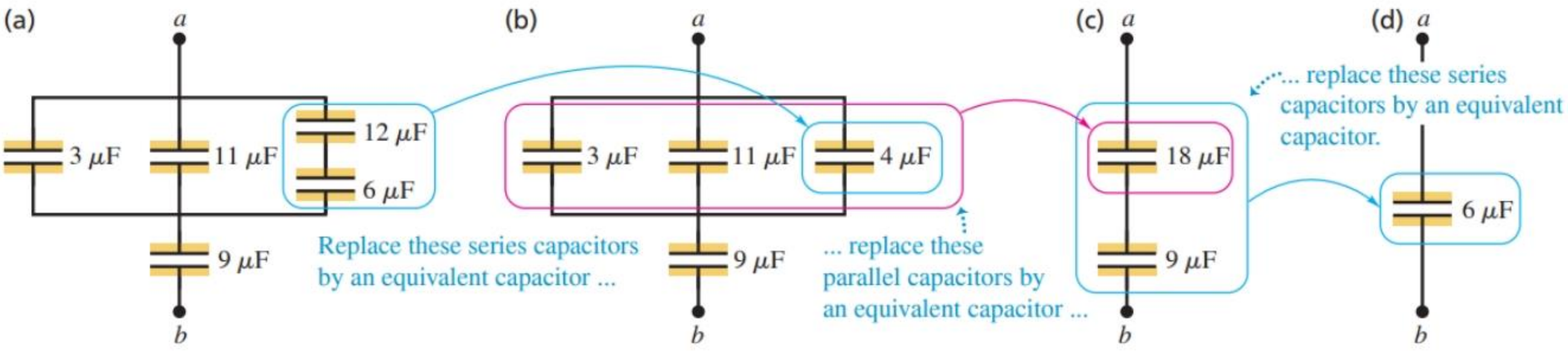


- Que vaut : C_{eq} ?

Réseau de condensateurs

- Dans un circuit, on peut retrouver une **combinaison** de mises en série et de mises en parallèle.

- Exemple 24.6 du livre de référence:

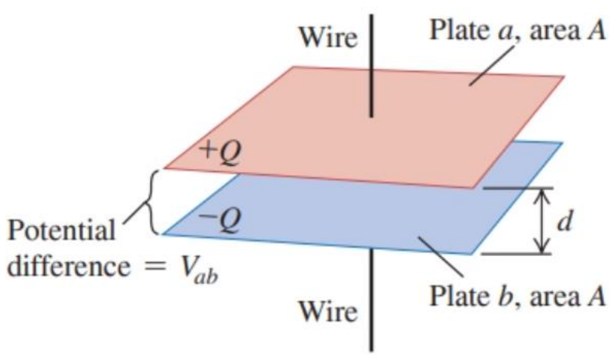


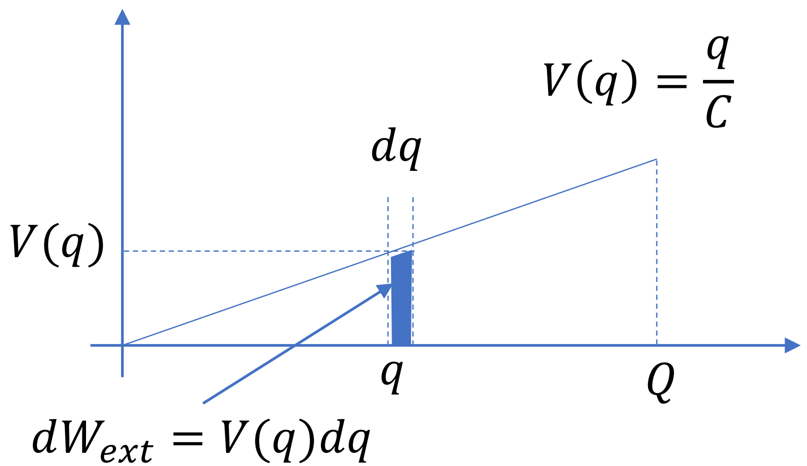
Agenda Cours 3

1. Condensateur et capacité
2. Combinaisons de condensateurs
3. Energie stockée dans un condensateur
4. Diélectriques
5. Loi de Gauss et diélectriques
6. Force exercée sur un diélectrique
7. Condensateurs a plusieurs diélectriques

Energie stockée dans un condensateur (1)

- Le condensateur est un **réservoir de charges** portées à un certain **potentiel**.
- Il est donc aussi un **réservoir d'énergie potentielle** U_c.
- Pour calculer U_c il faut calculer et sommer le **travail** nécessaire pour amener chaque élément de charge dans la capacité, dont le **potentiel croit** au fur et à mesure qu'on la charge.



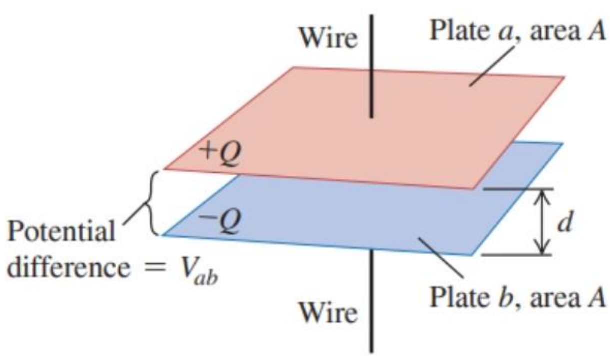


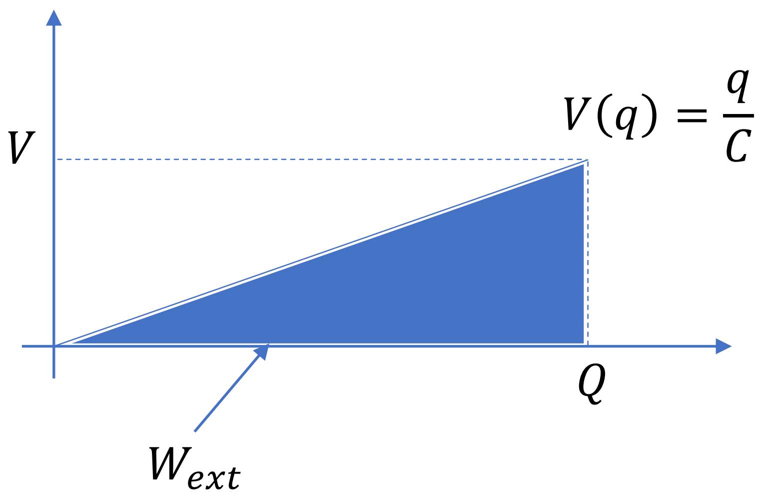
Energie stockée dans un condensateur (2)

- Durant la charge: $dW_{ext} = V(q)dq = \frac{q}{C}dq.$
- Le travail total se calcule en sommant (intégrant) ces contributions élémentaires:

$$W_{ext} = \int_0^Q dW_{ext} = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C}$$

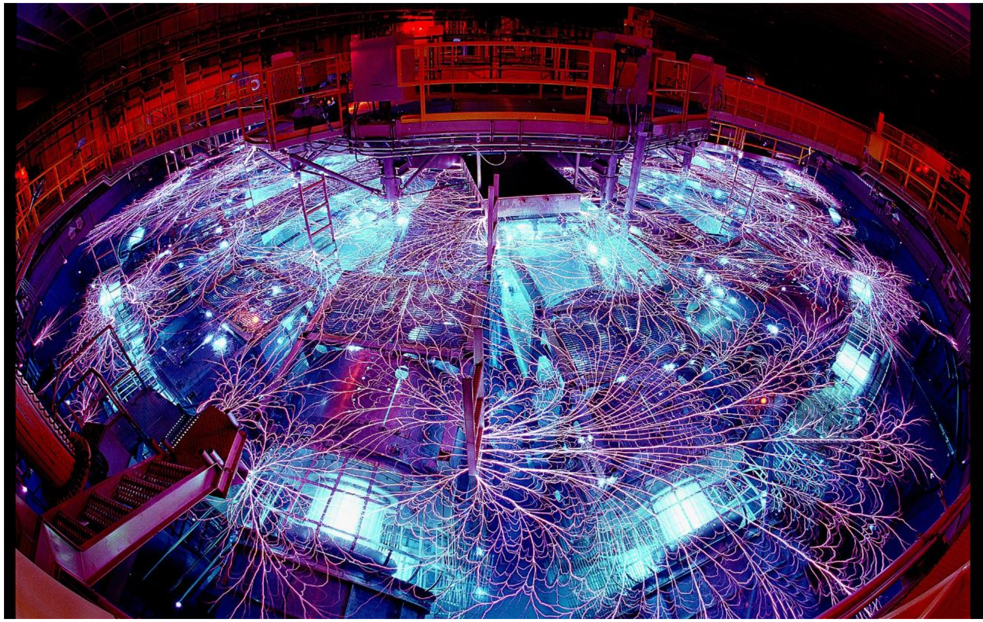
- Si l'énergie dans la capacité avant la charge est nulle, alors $U_c = W_{ext}$
- $U_c = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2}$





Energie stockée dans un condensateur (3)

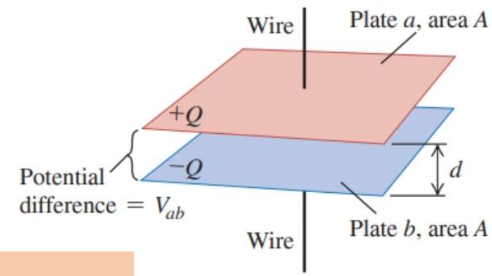
- $U_c = \frac{CV^2}{2}$ $\Rightarrow$ même avec un faible V, U_c peut être très grand si C est très grande également (mise en parallèle)
- Exemple: machine Z (Nouveau Mexique): décharge de quelques MJ en qqs ns, permettant de libérer une puissance de ~10^{14} W, (= 80 x la puissance combinée de toutes les centrales électriques de la planète)
- Application: fusion nucléaire



Energie et champ électrique

- **L'énergie stockée** dans un condensateur (U_c) est associée à la **tension** appliquée et à la présence de charges.
- Il existe aussi un **champ électrique** dans le volume de la capacité, directement proportionnel à V (et Q).
- **A ce champ**, distribué sur une certain volume, on peut aussi **associer** U_c.
- Pour un condensateur à plaques parallèles, la **densité d'énergie** (J/m³) vaut:

$$u = \frac{U_c}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad}$$



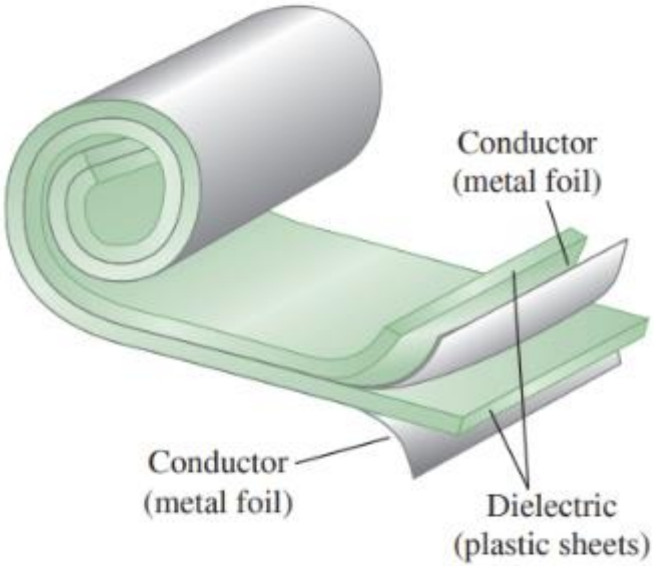
- Puisque $E = \frac{V}{d}$ et $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ on trouve: $\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \text{ [J/m}^3\text{]}}$
- Ceci est **vrai** pour toute configuration de champ électrique dans le vide, et donc aussi pour toute **géométrie** de condensateur vide.

Agenda Cours 3

1. Condensateur et capacité
2. Combinaisons de condensateurs
3. Energie stockée dans un condensateur
4. Diélectriques
5. Loi de Gauss et diélectriques
6. Force exercée sur un diélectrique
7. Condensateurs a plusieurs diélectriques

Diélectriques

❑ Pour des raisons **mécaniques**, on insére en général un matériau **isolant**, appelé **diélectrique**, entre les plaques d'un condensateurs.



❑ Les matériaux diélectriques présentent par ailleurs **d'autres** propriétés **utiles** pour les condensateurs.

Propriété des diélectriques: tension de claquage (1)

- Lorsque le champ électrique devient très **intense**, il peut être capable **d'arracher** des électrons aux molécules ou atomes de la matière. Ces électrons à haute énergie entrent en **collision** avec d'autres molécules et/ou atomes, formant une **reaction en chaîne** (avalanche).
- Ce phénomène s'accompagne en général d'un **arc électrique.**
- Ex:

Propriété des diélectriques: tension de claquage (2)

- Le champ électrique maximal que peut tolérer un matériau avant de “percer” ou de “claquer” s’appelle la **rigidité diélectrique (*dielectric strength*)**.
- La rigidité diélectrique de **l’air sec** est de 3.10^6 V/m.
- Qqs exemples:

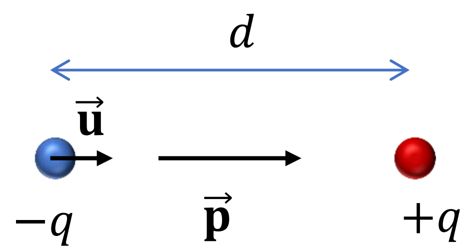
TABLE 24.2 Dielectric Constant and Dielectric Strength of Some Insulating Materials

Material	Dielectric Constant, K	Dielectric Strength, E_m (V/m)
Polycarbonate	2.8	3×10^7
Polyester	3.3	6×10^7
Polypropylene	2.2	7×10^7
Polystyrene	2.6	2×10^7
Pyrex® glass	4.7	1×10^7

- *Placer un diélectrique entre les plaques d’un condensateur permet en général d’utiliser ce condensateur à des champs électriques (et donc V) plus élevés.*

Propriété des diélectriques: dipôle

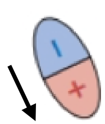
- Un **dipôle** électrique est une paire de charges de même amplitude mais de signes opposés et séparées d'une distance d:



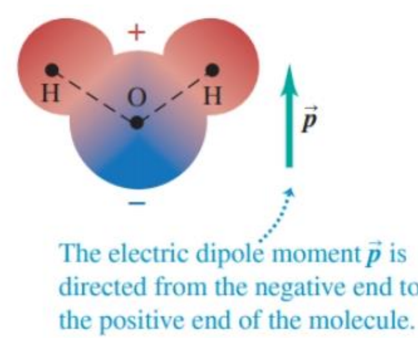
- On définit le **moment dipolaire électrique**:

$$\boxed{\vec{\mathbf{p}} \triangleq qd\vec{\mathbf{u}}}$$ ($\vec{\mathbf{u}}$ orienté de la charge – à la charge +)

- **Exemple** de dipôle électrique : molécule polaire

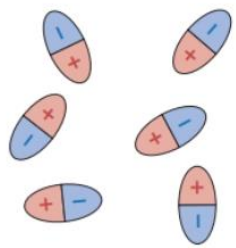
$\vec{\mathbf{p}}$ 

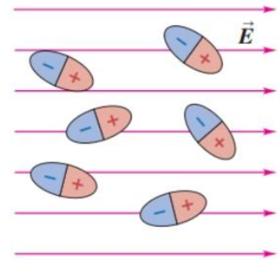
ex: H_20



Propriété des diélectriques: polarisation (1)

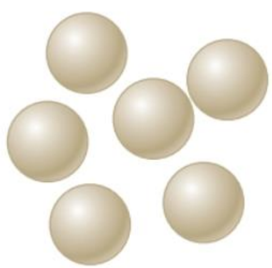
- Les diélectriques peuvent être également constitués de molécules **polaires**

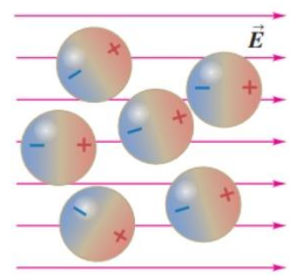




- Si l’on soumet un diélectrique à un champ électrique, les moments dipolaires vont avoir tendance à **s’aligner** avec le champ.

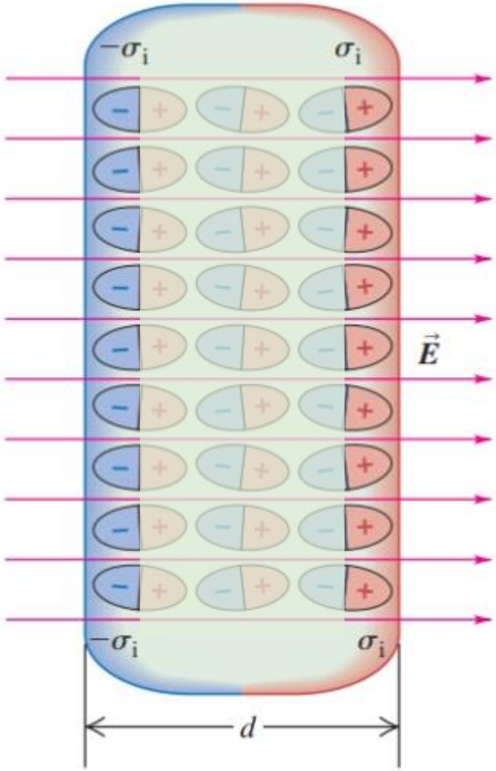
- Un effet semblable peut se produire par **induction** avec des molécules **non polaires**:





Propriété des diélectriques: polarisation (2)

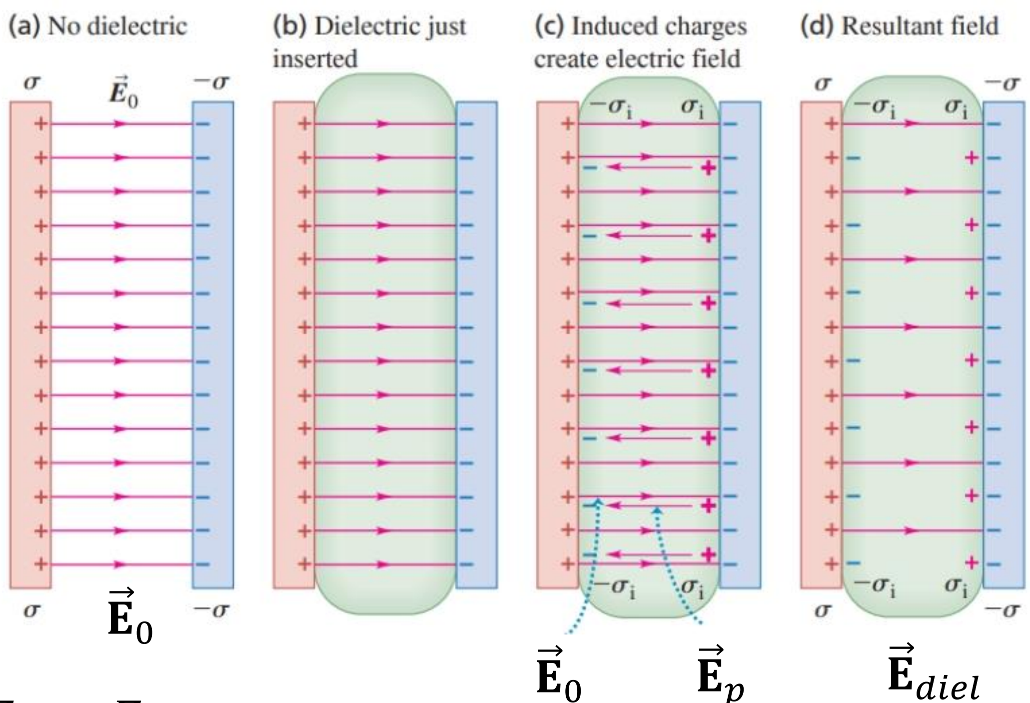
- Lorsqu'un diélectrique est soumis à un champ électrique, une très fine couche de **charges négatives** ($-\sigma_i$) ainsi qu'une couche **positives** (σ_i) apparaissent sur les faces **exposées** du diélectrique.



- Ces charges sont **induites** et sont **liées** au matériau: elles ne peuvent pas de déplacer librement.
- Cette redistribution des charges s'appelle la **polarisation**.
- On dit également que le matériau est **polarisé**.

Diélectrique dans un condensateur (1)

- Si l'on place un diélectrique dans un condensateur **déconnecté** mais chargé par $\pm\,\sigma$, les charges induites en surface dans le matériau diélectrique créent un **champ de polarisation** ($\vec{\mathbf{E}}_p$) qui **réduit** le champ total ($\vec{\mathbf{E}}_{diel}$) dans le matériau:



- $E_{diel} = E_0 - E_p < E_0$

Diélectrique dans un condensateur (2)

- Si l'on place un diélectrique dans un condensateur **déconnecté mais chargé**, le champ électrique est donc **réduit** d'un facteur K :

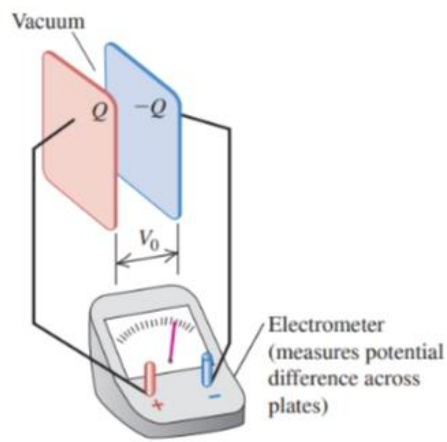
$$E_{diel} = \frac{E_0}{K}$$

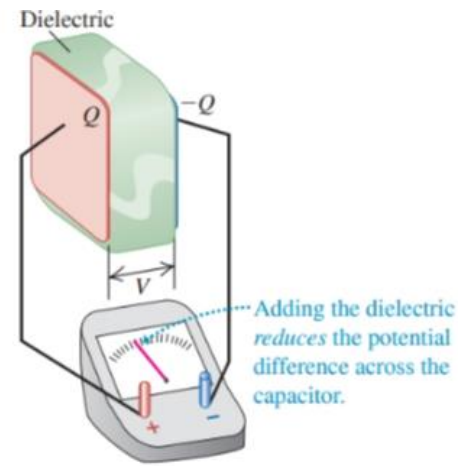
- Le facteur de réduction K s'appelle également la **permittivité relative** du diélectrique et se note ε_r [ ] (nombre sans unité)
- La **permittivité** du diélectrique est par définition: $\varepsilon = K\varepsilon_0 = \varepsilon_r\varepsilon_0$ [F/m]
- La **permittivité relative** est parfois aussi appelée **constante diélectrique**, et est une propriété électrique du matériau.

TABLE 24.1 Values of Dielectric Constant K at 20°C

Material	K	Material	K
Vacuum	1	Polyvinyl chloride	3.18
Air (1 atm)	1.00059	Plexiglas®	3.40
Air (100 atm)	1.0548	Glass	5–10
Teflon®	2.1	Neoprene	6.70
Polyethylene	2.25	Germanium	16
Benzene	2.28	Glycerin	42.5
Mica	3–6	Water	80.4
Mylar®	3.1	Strontium titanate	310

Diélectrique dans un condensateur (3)





- ❑ Après introduction du diélectrique: $E_{diel} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$ => $V = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$

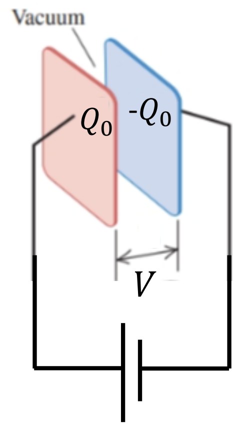
- ❑ Capacité en **présence** du diélectrique: $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{(V_0/\varepsilon_r)} = \varepsilon_r \frac{Q}{V_0} = \varepsilon_r C_0$

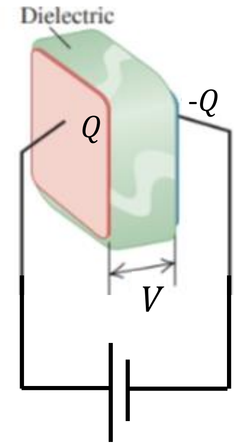
  où C_0 est la capacité en l'absence du diélectrique.

- ❑ *La **capacité** est donc **multipliée** par un facteur ε_r en présence du diélectrique.*

- ❑ Condensateur à plaques parallèles: $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon \frac{A}{d}$

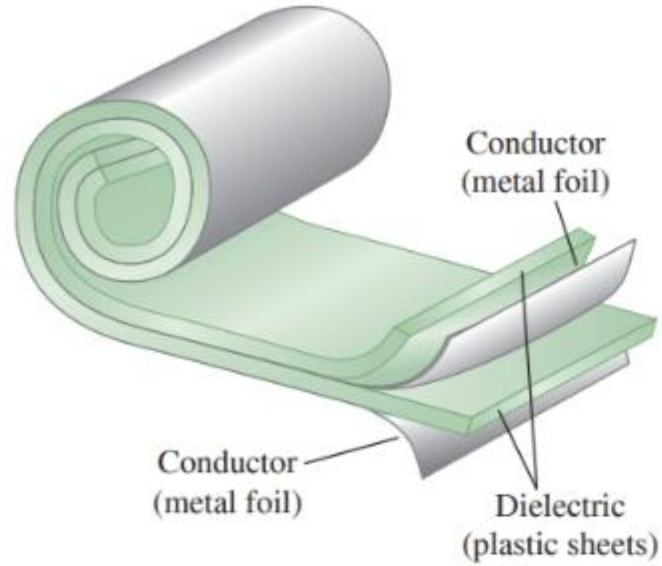
Diélectrique dans un condensateur (4)





- Supposons à présent V **constante** durant l'introduction du diélectrique.
- Puisque C est augmentée d'un facteur ε_r après avoir introduit le diélectrique, il en résulte que $U_c = \frac{1}{2} C V^2$ doit l'être **également**.
- *Pour une **différence de potentiel donnée imposée** aux bornes du condensateur, l'énergie stockée dans le condensateur est **multipliée** par un facteur ε_r en présence du diélectrique.*
- La densité d'énergie électrique l'est donc aussi: $u = \frac{1}{2}\varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$

Utilités des diélectriques (résumé)



- ❑ En résumé, les **avantages** liés à l'utilisation d'un diélectrique dans un condensateur sont les suivants:
  - ❑ **intégrité et robustesse mécaniques**
  - ❑ **augmentation de la tension maximale d'utilisation**
  - ❑ **augmentation de la capacité et de l'énergie stockée**

Agenda Cours 3

1. Condensateur et capacité
2. Combinaisons de condensateurs
3. Energie stockée dans un condensateur
4. Diélectriques
5. Loi de Gauss et diélectriques
6. Force exercée sur un diélectrique
7. Condensateurs a plusieurs diélectriques

Loi de Gauss et diélectriques (1)

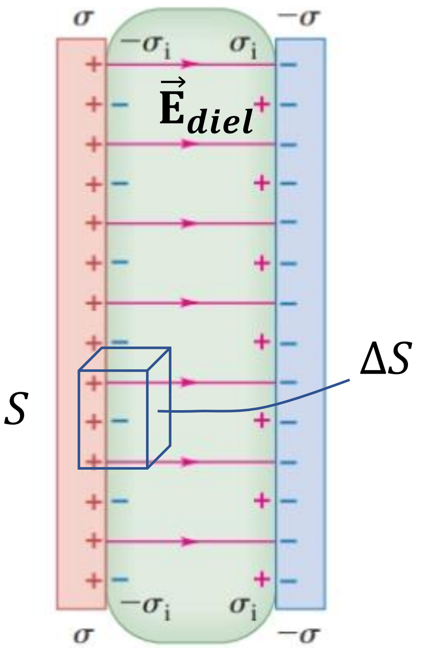
- Supposons un condensateur rempli d'un diélectrique de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$
- La **loi de Gauss** nous permet d'écrire à l'interface metal/diélectrique:

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \, . \, d\vec{\mathbf{S}} = \frac{\Delta S(\sigma - \sigma_i)}{\varepsilon_0} = E_{diel} \Delta S$$

$$=> E_{diel} = \frac{\sigma - \sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

- On a donc: $\sigma - \sigma_i = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_r}$
- Et la loi de Gauss devient:

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \, . \, d\vec{\mathbf{S}} = \frac{\Delta S \sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{q_{free}}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$



Loi de Gauss et diélectriques (2)

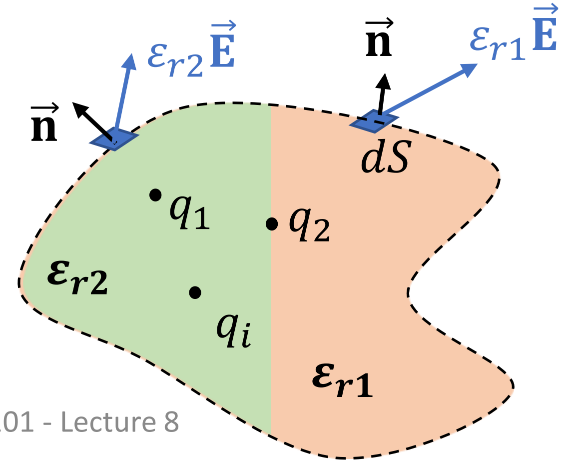
- De manière générale, la **loi de Gauss en présence de diélectriques** s'écrit:

$$\oint_S \varepsilon_r \vec{\mathbf{E}}\,.\,d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q_{free}}{\varepsilon_0}$$

où q_{free} représente les **charges non liées** au(x) diélectrique(s).

- En présence de diélectriques, on peut donc appliquer la loi de Gauss ***en ne considérant pas*** les charges de polarisation mais en y **remplaçant** $\vec{\mathbf{E}}$ par $\varepsilon_r \vec{\mathbf{E}}$ afin de prendre en compte leur effet.

- La valeur de ε_r est à prendre **en tout point** $d\vec{\mathbf{S}}$ de la surface.
Ex à 2 diélectriques:

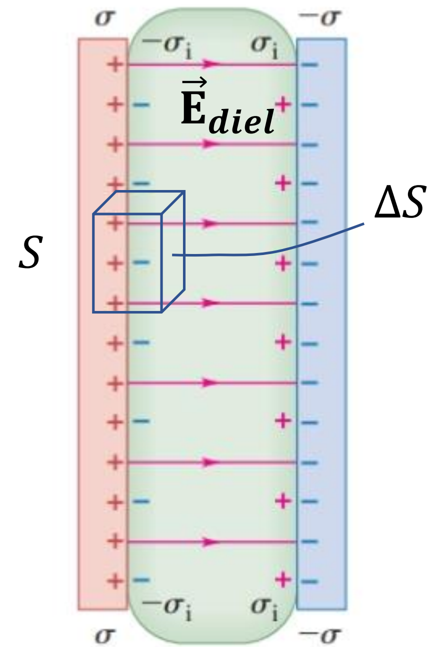


Conditions limites (1)

- Cette reformulation de la loi de Gauss nous permet de trouver la condition limite **à l'interface entre un conducteur et un diélectrique**:

$$\oint_S \varepsilon_r \vec{\mathbf{E}} \,.\, d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q_{free}}{\varepsilon_0}$$

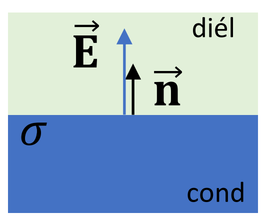
$$=> \varepsilon_r E_{diel} \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$



- On trouve donc: $E_{diel} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$

- **Condition limite** à **l'interface** conducteur/diélectrique:

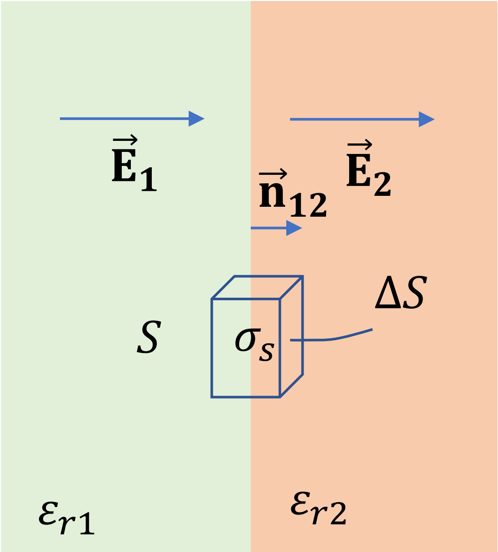
$$\boxed{\vec{\mathbf{n}}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\varepsilon}}$$



NB: σ = densité de charges libres sur le conducteur. Les charges induites sont prises en compte par le facteur ε

Conditions limites (2)

- Cette reformulation nous permet aussi de trouver la condition limite pour un champ perpendiculaire **à l'interface entre deux diélectriques**:



$$\oint_S \varepsilon_r \vec{\mathbf{E}}\,.\,d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q_{free}}{\varepsilon_0}$$

=> $(\varepsilon_{r2}E_2 - \varepsilon_{r1}E_1)\Delta S = \dfrac{\sigma_s \Delta S}{\varepsilon_0}$

=> $\varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \sigma_s$

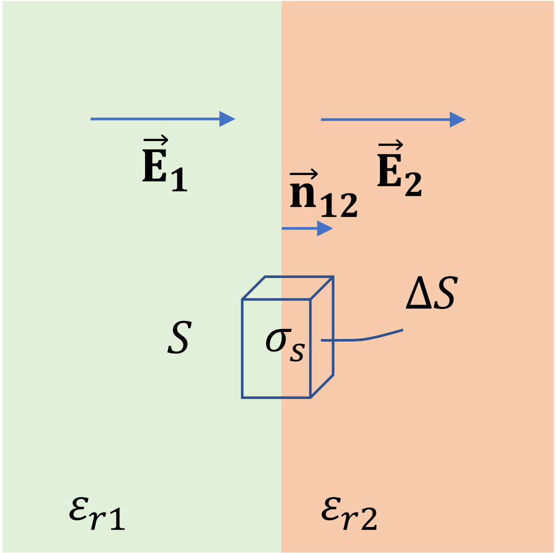
- σ_s représente des charges de surface autres que des charges de polarisation **éventuellement** présentes à l'interface.

- On en déduit la **condition limite** sur les **composantes normales** du champ E à **l'interface entre deux diélectriques**:

$\vec{\mathbf{n}}_{12}.\left(\varepsilon_2\vec{\mathbf{E}}_2 - \varepsilon_1\vec{\mathbf{E}}_1\right) = \sigma_s$ Si $\sigma_s = 0$: $\vec{\mathbf{n}}_{12}.\left(\varepsilon_2\vec{\mathbf{E}}_2 - \varepsilon_1\vec{\mathbf{E}}_1\right) = 0$

Conditions limites (3)

- **Rem 1**: important de respecter la convention sur $\vec{\mathbf{n}}_{12}$: “pointe du milieu 1 vers le milieu 2”



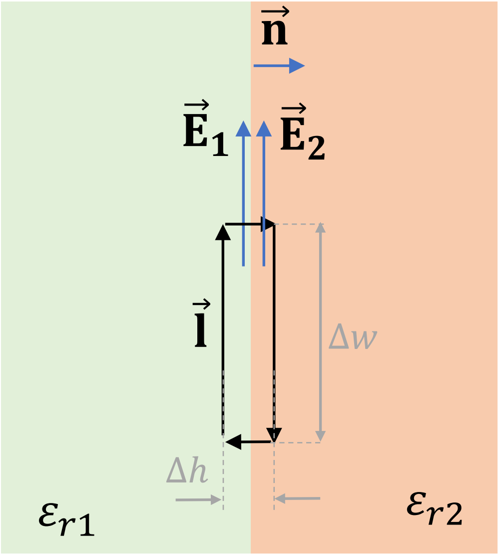
Forme vectorielle $\vec{\mathbf{n}}_{12}.\left(\varepsilon_2 \vec{\mathbf{E}}_2 - \varepsilon_1 \vec{\mathbf{E}}_1\right) = \sigma_s$

- **Rem 2**: CL sur les composantes **normales** à l’interface:

Forme scalaire $\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma_s$

Conditions limites (4)

- Il existe aussi une CL sur les composantes tangentielles de E.



- En effet, puisque $\oint_l \vec{\mathbf{E}}\,.\,d\vec{\mathbf{l}} = 0$, on a sur la petite boucle fermée centrée sur l'interface et traversant les deux milieu:

$$E_1\Delta w - E_2\Delta w = 0$$

(produit scalaire nul sur Δh)

- Et donc: $E_1 = E_2$

- On en déduit la **condition limite** sur les **composantes tangentielles** du champ E à **l'interface entre deux diélectriques**:

$$\vec{\mathbf{n}} \times \left(\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{E}}_2\right) = 0$$

Forme vectorielle

$$E_{1tan} = E_{2tan}$$

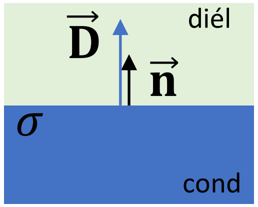
Forme scalaire

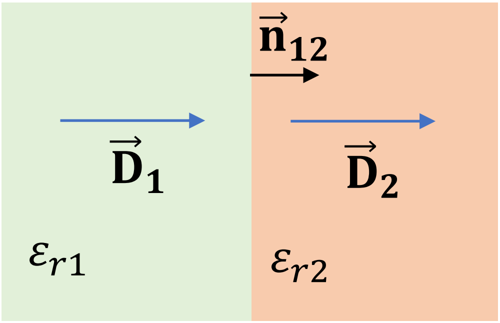
Champ de déplacement

- Dans un diélectrique, on définit également **le champ de déplacement**

$$\boxed{\vec{\mathbf{D}} \triangleq \varepsilon \vec{\mathbf{E}}}$$

- Il s'exprime en [C/m^2]
- La loix de Gauss devient: $$\boxed{\oint_S \vec{\mathbf{D}}\,.\,d\vec{\mathbf{S}} = q_{free}}$$
- Les conditions limites se réécrivent:





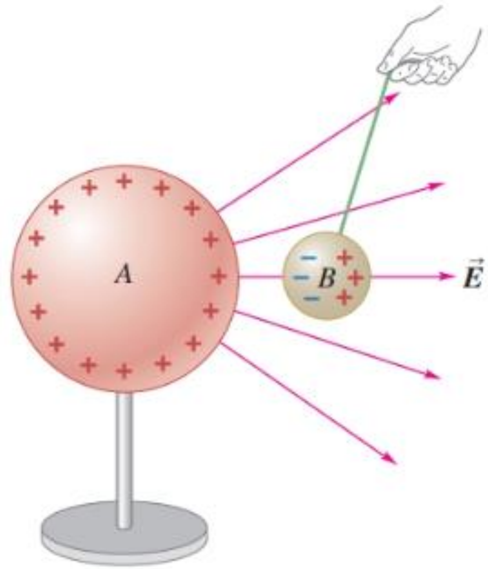
$$\boxed{\vec{\mathbf{n}}.\vec{\mathbf{D}} = \sigma_s}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{n}}_{12}.\left(\vec{\mathbf{D}}_2 - \vec{\mathbf{D}}_1\right) = \sigma_s}$$

Agenda Cours 3

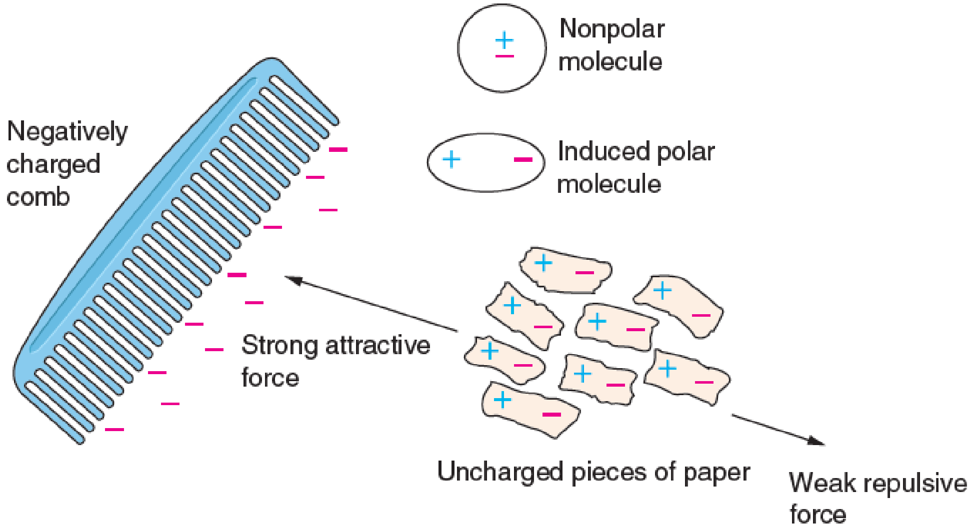
1. Condensateur et capacité
2. Combinaisons de condensateurs
3. Energie stockée dans un condensateur
4. Diélectriques
5. Loi de Gauss et diélectriques
6. Force exercée sur un diélectrique
7. Condensateurs a plusieurs diélectriques

Force exercée sur un diélectrique (1)



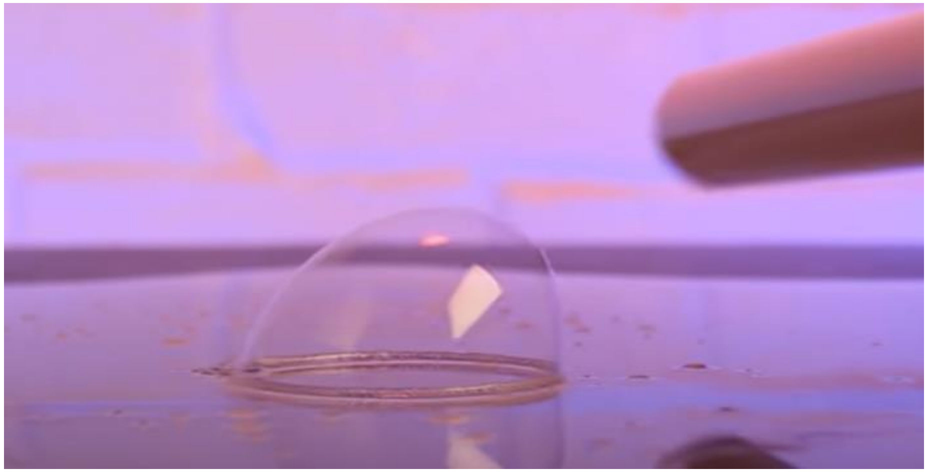
- La polarisation d'un diélectrique explique pourquoi un objet électriquement neutre peut être **attiré** par un objet chargé.
- En effet, les charges les plus proches de la source sont soumises à un champ généralement plus intense que les charges les plus éloignées. Il en résulte une **force résultante non nulle**.

Force exercée sur un diélectrique (2)



- Les morceaux de papier polarisés sont **attirés** par un peigne chargé par frottement sur une chevelure sèche.

Force exercée sur un diélectrique (3)



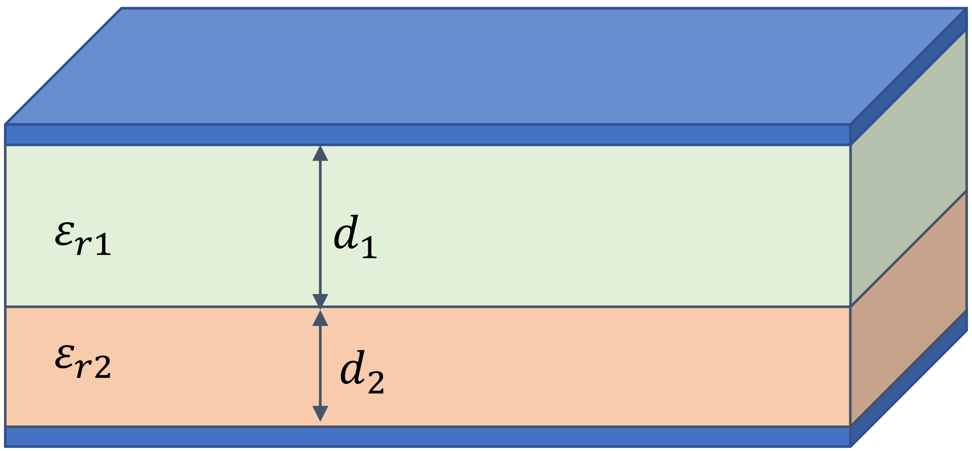
https://www.youtube.com/watch?v=ViZNgU-Yt-Y

Agenda Cours 3

1. Condensateur et capacité
2. Combinaisons de condensateurs
3. Energie stockée dans un condensateur
4. Diélectriques
5. Loi de Gauss et diélectriques
6. Force exercée sur un diélectrique
7. Condensateurs a plusieurs diélectriques

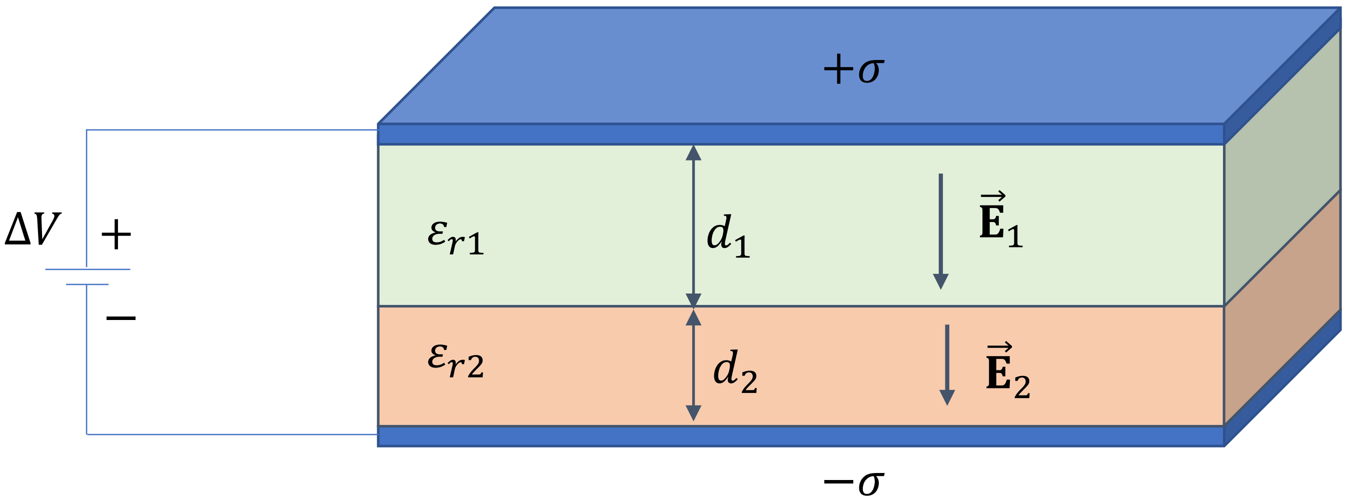
Deux diélectriques superposés dans un condensateur (1)

- Que se passe-t-il si l'on **surperpose** deux diélectriques différents dans un condensateur plan ? Que devient C ? Que vaut le champ électrique dans les deux diélectriques?



Deux diélectriques superposés dans un condensateur (2)

- Supposons que l'on applique une différence de potentiel ΔV entre la plaque inférieure et la plaque supérieure.

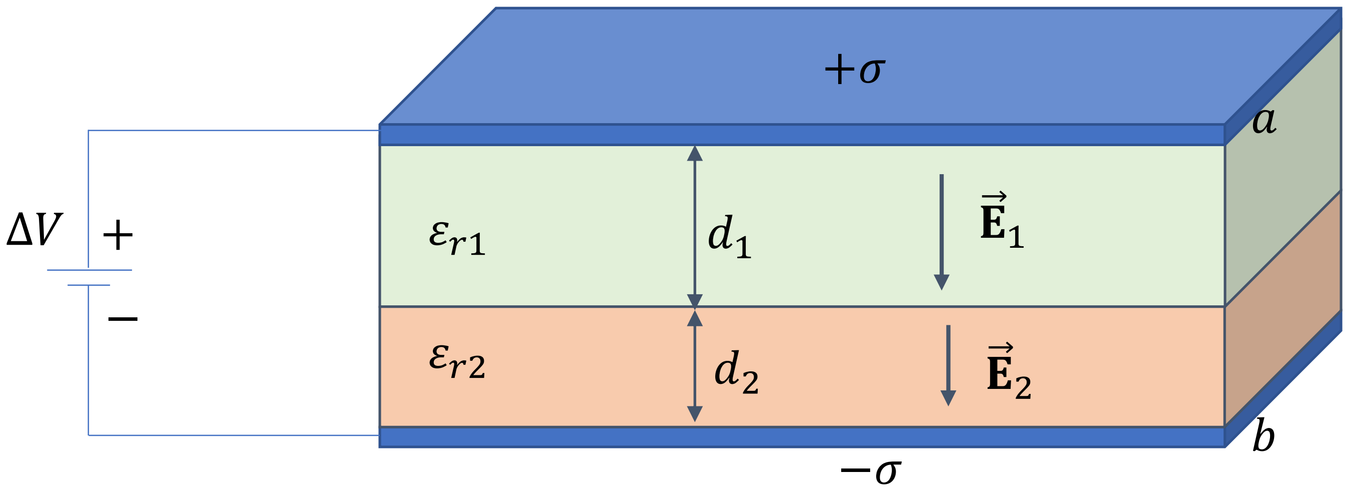


- Le condensateur se charge

  => $+\sigma$ et $-\sigma$ apparaissent

  => $\vec{\mathbf{E}}_1$ et $\vec{\mathbf{E}}_2$ apparaissent également

Deux diélectriques superposés dans un condensateur (3)



- $\vec{\mathbf{E}}_1$ et $\vec{\mathbf{E}}_2$ sont uniformes => $\Delta V = V_{ab} = \int_a^b \vec{\mathbf{E}}\, d\vec{\mathbf{l}} = E_1 d_1 + E_2 d_2$

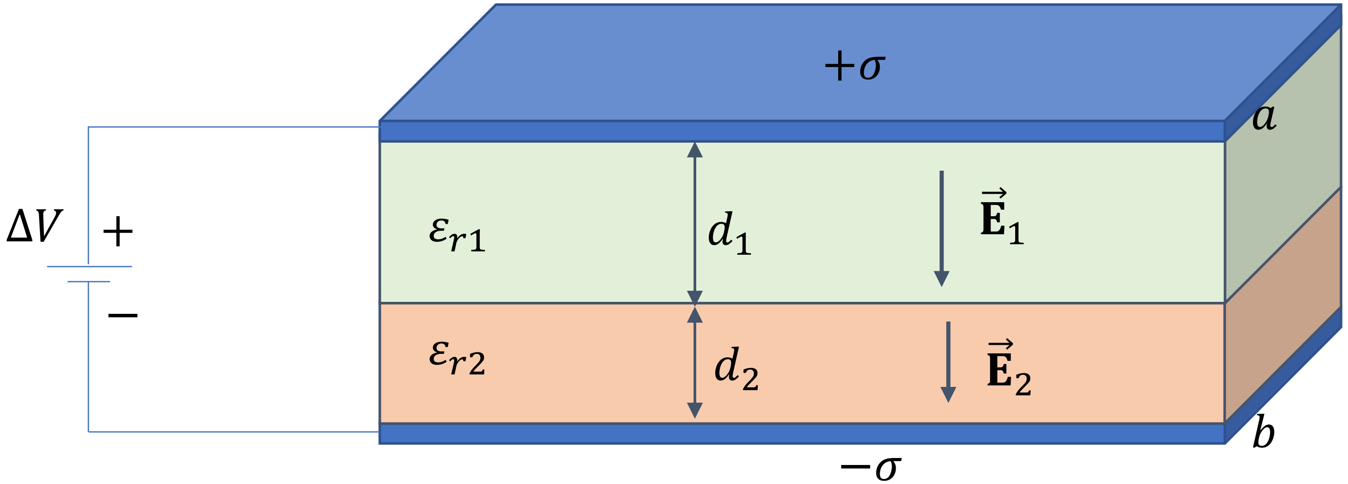
- CL sur cond supérieur: $E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}$

- CL sur cond inférieur: $E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$

$$E_2 \varepsilon_2 = E_1 \varepsilon_1$$

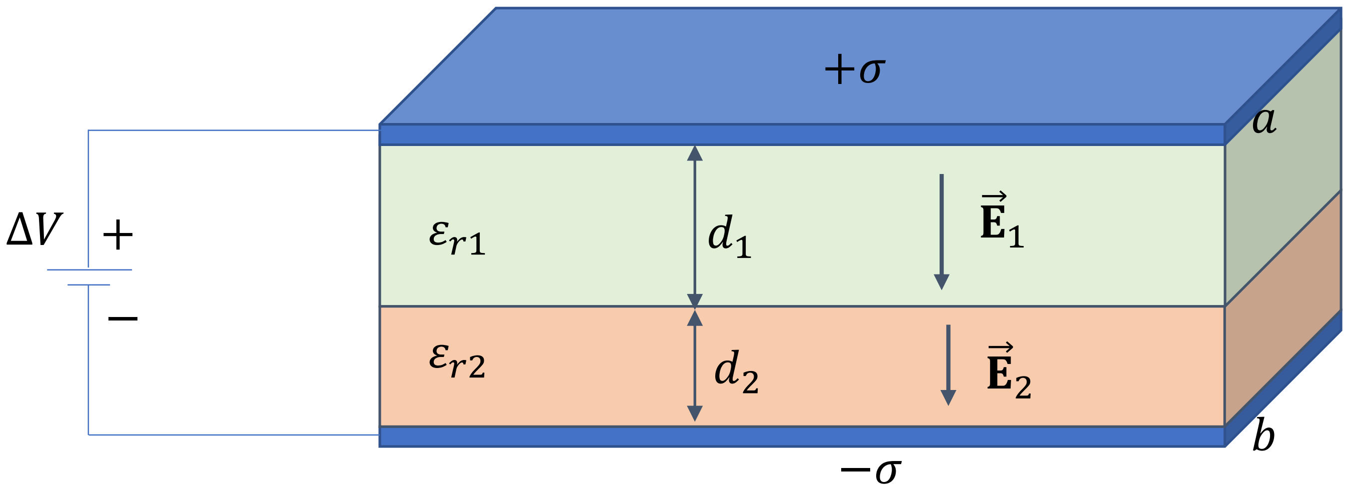
CL à l'interface entre les 2 diélectriques !

Deux diélectriques superposés dans un condensateur (4)



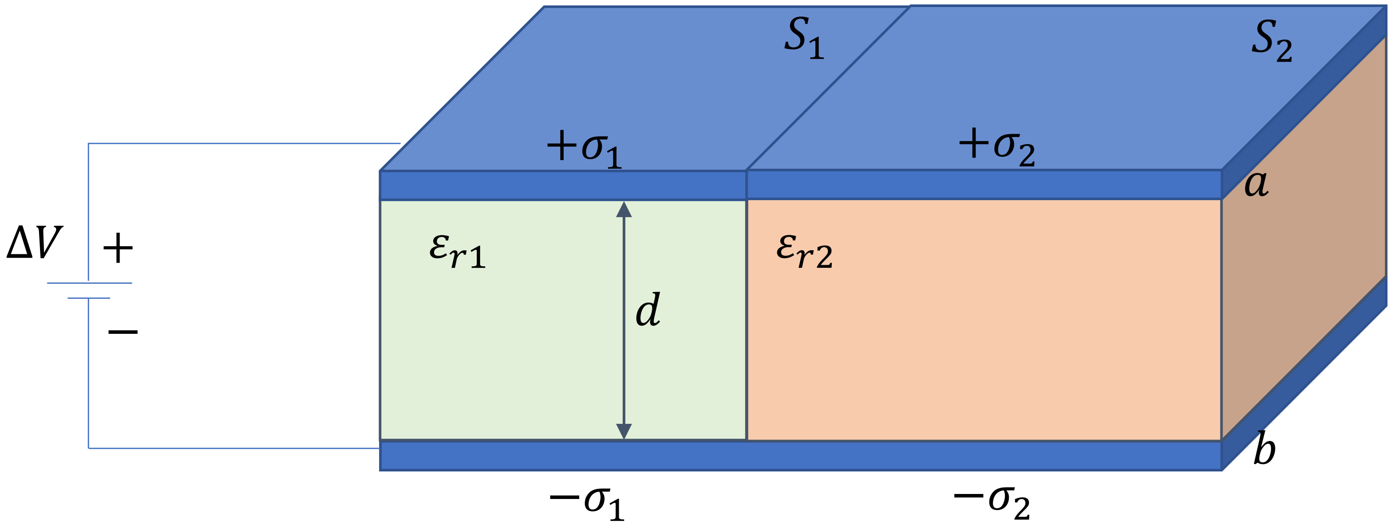
- On peut calculer E_1 et E_2 séparément:
- $\Delta V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = E_1 \left(d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2 \right) \Rightarrow E_1 = \frac{\Delta V}{d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2}$
- On trouve aussi: $E_2 = \frac{\Delta V}{d_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} d_1}$

Deux diélectriques superposés dans un condensateur (4)



- Pour trouver C, il faut exprimer Q (ou σ) en fonction de ΔV:
- CL sur cond supérieur $\Rightarrow \sigma = \varepsilon_1 E_1 = \dfrac{\Delta V}{\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}}$
- On trouve donc: $C = \dfrac{Q}{\Delta V} = S\,\dfrac{\sigma}{\Delta V} = S\,\dfrac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}} = \dfrac{1}{\frac{d_1}{S\varepsilon_1}+\frac{d_2}{S\varepsilon_2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}$
- *Le condensateur se comporte comme une **mise en série** de deux condensateurs*

Deux diélectriques côte à côte dans un condensateur



- Ici, on a $\Delta V = E_1 d = E_2 d \Rightarrow E_1 = E_2 = E = \frac{\Delta V}{d}$
- CL sur cond supérieur $\Rightarrow \sigma_1 = \varepsilon_1 E$ et $\sigma_2 = \varepsilon_2 E$
- On trouve donc $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_1 E S_1 + \varepsilon_2 E S_2}{E d} = \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2$
- *Le condensateur se comporte comme* ***une mise en parallèle*** *de deux condensateurs*

Synthèse du cours 8 (1)

- Un condensateur est formé d'une paire de conducteurs séparés par un matériau isolant.
- Lorsqu'une tension V est appliquée entre les deux conducteurs, des charges d'amplitudes Q identiques mais de signes opposés apparaissent sur les conducteurs.
- Q est proportionnelle à V: $Q = CV$. Le facteur de proportionnalité C est défini comme étant la capacité du condensateur, et peut donc se calculer en connaissant Q et V: $C = Q/V$
- La valeur de la capacité dépend uniquement de la géométrie des conducteurs et du milieu qui remplit l'espace entre les conducteurs.
- Pour un condensateur formé de deux plaques parallèles dans le vide de surface A et séparés d'une distance d, la capacité est donnée par: $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$
- Lorsque des condensateurs sont placés en série, la capacité équivalente est donnée par: $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$
- Lorsque des condensateurs sont placés en parallèle, la capacité équivalente est donnée par :$C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i$

Synthèse du cours 8 (2)

- L'énergie stockée dans une capacité est égale à l'énergie qu'il faut dépenser pour la charger avec une charge Q et une tension V.
- Cette énergie est donnée par $U_c = \frac{1}{2} QV = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$
- On peut également associer cette énergie au champ électrique présent dans le condensateur, dont la densité (énergie par unité de volume) pour un condensateur dans le vide vaut: $u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$.
- Lorsque l'espace entre les conducteurs d'un condensateur chargé est rempli d'un matériau diélectrique, des charges induites (par polarisation) apparaissent à la surface du diélectrique, ce qui réduit le champ électrique dans le diélectrique d'un facteur K.
- Le facteur K s'écrit aussi ε_r et est appelé permittivité relative du matériau.
- La permittivité du diélectrique est définie par: $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$
- La capacité d'un condensateur ainsi que l'énergie stockée pour une tension donnée sont toutes deux multipliées par ε_r lorsque le milieu entre les conducteurs est rempli d'un matériau diélectrique de permittivité relative ε_r.
- Dans ce cas, la densité d'énergie est aussi multipliée par ε_r: $u = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2$

Synthèse du cours 8 (3)

- En présence de matériaux diélectriques, la loi de Gauss se réécrit: $\oint_S \varepsilon_r \vec{\mathbf{E}} \,.\, d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q_{free}}{\varepsilon_0}$ où q_{free} réprésente les charges libres présentes à l'intérieur de S (on ne compte donc pas les charges de polarisation à l'intérieur de S).

- A l'interface entre un conducteur et un diélectrique, la CL sur $\vec{\mathbf{E}}$ s'écrit: $\vec{\mathbf{n}}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, où σ représente les charges libres sur le conducteur.

- A l'interface entre deux diélectriques, la CL sur les composantes normales de $\vec{\mathbf{E}}$ s'écrit: $\vec{\mathbf{n}}_{12}.\left(\varepsilon_2 \vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{2}} - \varepsilon_1 \vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{1}}\right) = \sigma_s$, où σ_s représente une éventuelle charge d'interface non liée.

- Pour ces CL, on ne considère pas non plus les charges de polarisation, dont l'effet est pris en compte par la permittivité relative dans les expression ($\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$).

- A l'interface entre deux diélectriques, la CL sur les composantes tangentielles de $\vec{\mathbf{E}}$ s'écrit:

$$\vec{\mathbf{n}} \times \left(\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{1}} - \vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{2}}\right) = 0$$

Synthèse du cours 8 (4)

- On définit, à l'intérieur d'un diélectrique, le champ de déplacement: $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon\vec{\mathbf{E}}$
- La loi de Gauss dans le cas de diélectriques s'écrit alors: $\oint_S \vec{\mathbf{D}}\,.\,d\vec{\mathbf{S}} = q_{free}$
- La CL à l'interface entre un conducteur et un diélectrique se réécrit: $\vec{\mathbf{n}}.\vec{\mathbf{D}} = \sigma$ [C/m²]
- La CL à l'interface entre deux conducteurs diélectriques sur les composantes normales du champ se réécrit: $\vec{\mathbf{n}}_{12}.\left(\vec{\mathbf{D}}_{\mathbf{2}} - \vec{\mathbf{D}}_{\mathbf{1}}\right) = \sigma_s$
- Lorsqu'un condensateur plan est rempli de deux matériaux diélectriques superposés, il se comporte comme une mise en série de deux condensateurs où chacun des condensateurs est rempli d'un des deux diélectriques.
- Lorsqu'un condensateur plan est rempli de deux matériaux diélectriques placés côte à côte, il se comporte comme une mise en parallèle de deux condensateurs où chacun des condensateurs est rempli d'un des deux diélectriques.