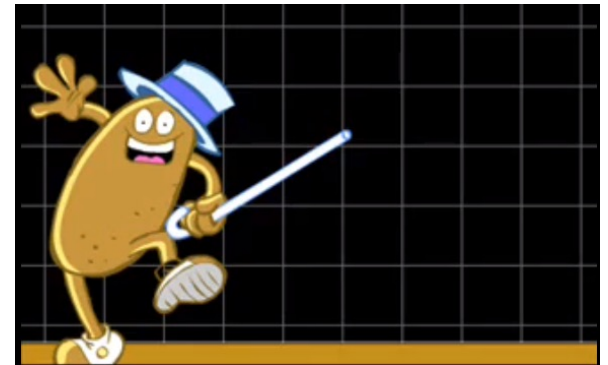
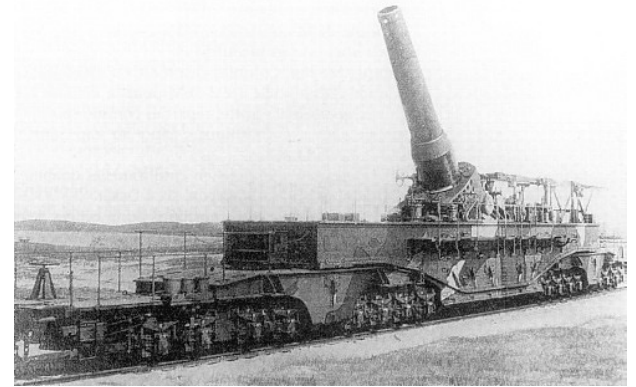


Quelle est la différence entre un point et une patate ?



Lorsqu'une patate fait une rotation, cela se voit :-)

La mécanique d'un point...



$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2\right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

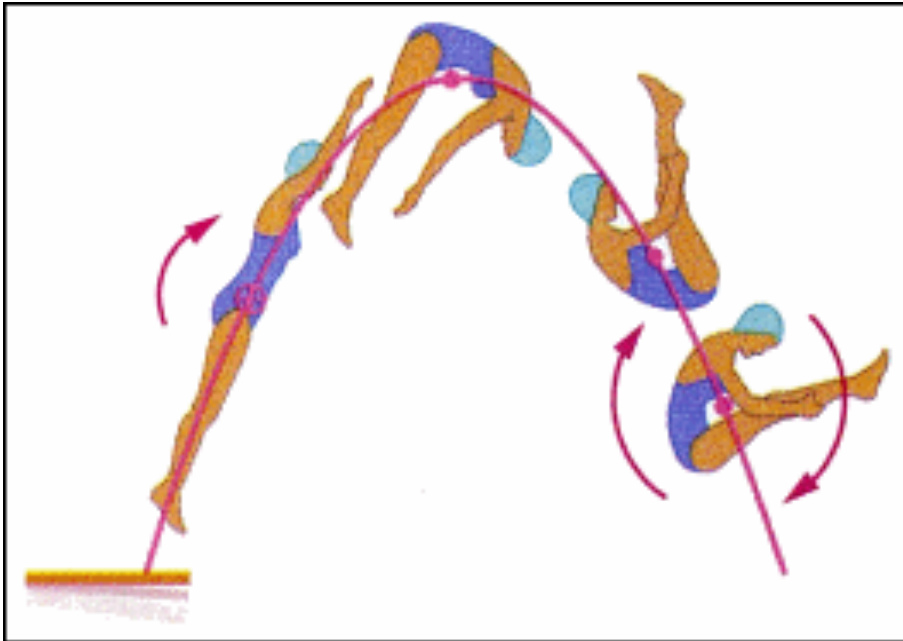
Les deux équations fondamentales !

**Bilan de la quantité de mouvement
Bilan de l'énergie cinétique**

Dans beaucoup d'applications, on peut se restreindre à l'analyse du mouvement du centre de masse et réduire le corps à un simple point où on a concentré toute la masse !

*Ce que nous avons fait jusqu'à présent !
Mais, un skieur, une auto, un bloc, **ce n'est pas un point** !*

**La trajectoire de son centre de masse est parabolique, comme notre obus !
Mais, son mouvement est nettement plus complexe avec des vrilles et des pirouettes !**



**mais un corps,
ce n'est pas un point !**

La mécanique d'un corps...



Les trois équations fondamentales !

Bilan de la quantité de mouvement

Bilan de l'énergie cinétique

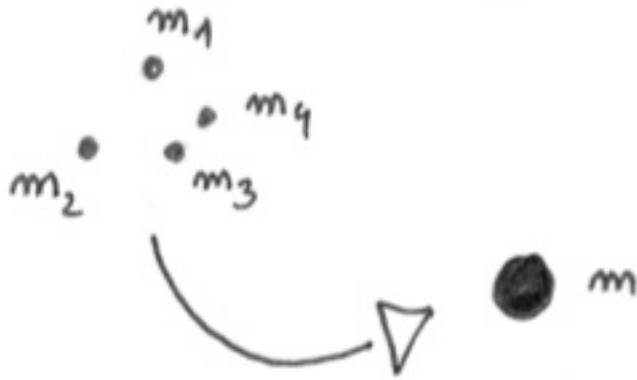
Bilan du moment cinétique

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

C'est quoi un point ?



On remplace une série de particules,
par un grosse particule **virtuelle**
de masse équivalente !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

C'est quoi un point ?

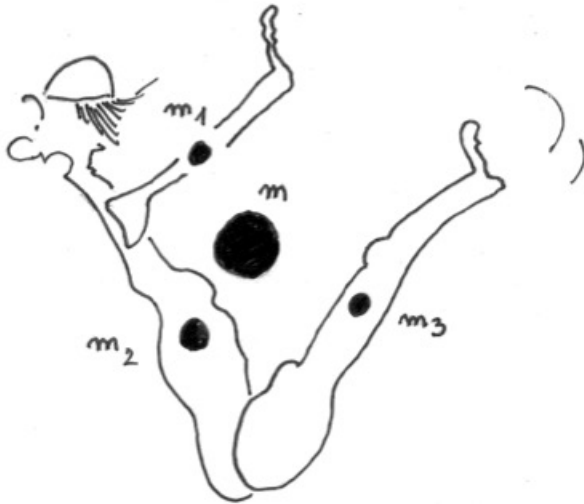


Tant que le bloc ne tourne pas,
la mécanique du point est suffisante
pour résoudre pas mal de problèmes !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

C'est quoi un corps ?



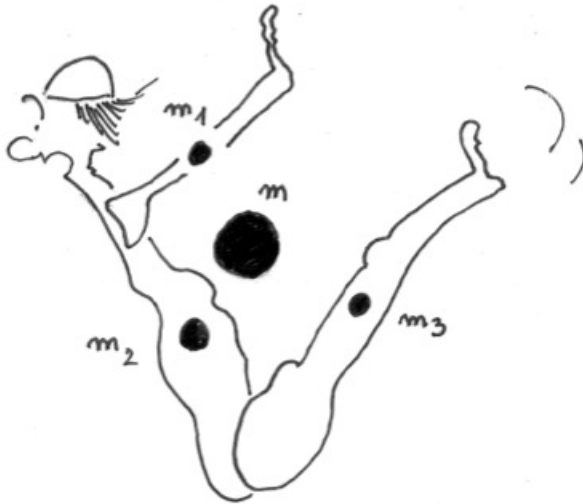
Mais lorsque notre athlète fait des pirouettes, il faut avoir un modèle mécanique plus compliqué !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

Le centre de masse...

$$\bar{x} = \sum \frac{m_i}{m} x_i$$



La position d'une particule plus grande doit compter davantage !

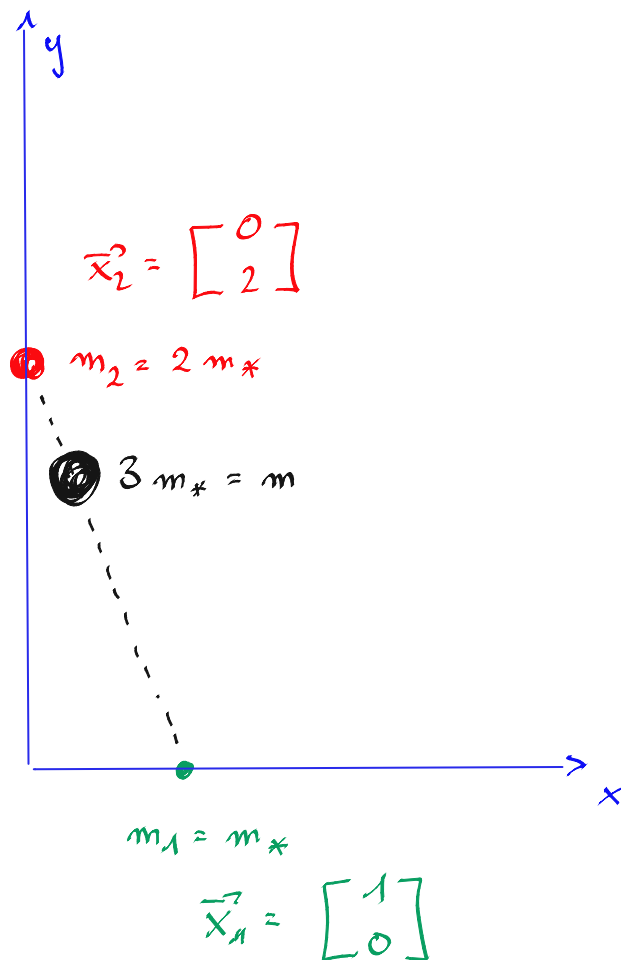
**Tronc-tête : 58% de la masse corporelle
Jambes : 32% de la masse corporelle
Bras : 10 % de la masse corporelle**

$$m = \sum m_i$$

$$m \vec{x} = \sum (m_i \vec{x}_i)$$

... est la position moyenne
pondérée des positions

Calcul du centre de masse



$$m = \sum m_i$$

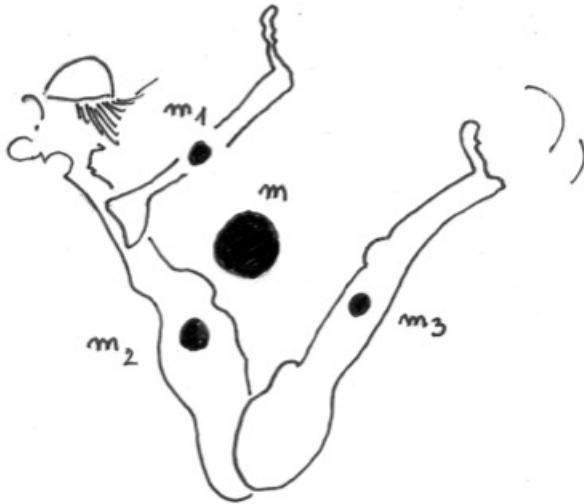
$$= m_* + 2m_* = 3m_*$$

$$m \vec{x} = \sum m_i \vec{x}_i$$

$$\vec{x} = \underbrace{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\frac{4}{3}}$$

La vitesse du centre de masse...

La position d'une particule plus grande doit compter davantage !



$$m = \sum m_i$$

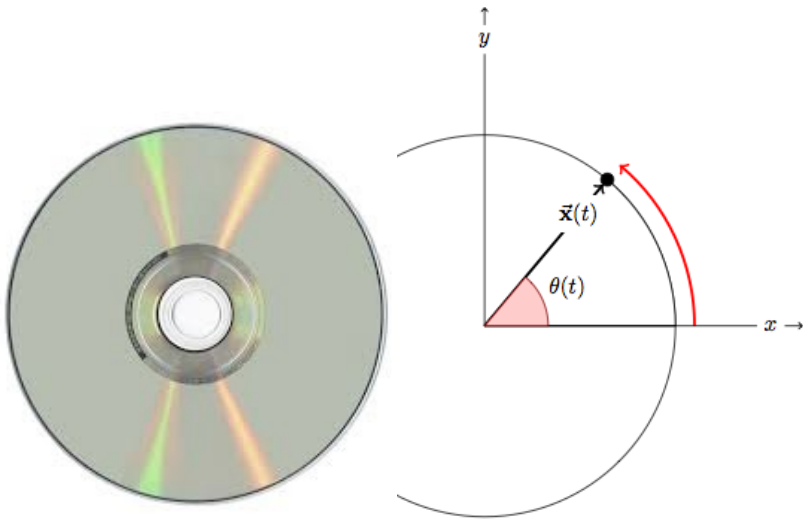
$$m \vec{x} = \sum (m_i \vec{x}_i)$$

$$m \vec{v} = \sum (m_i \vec{v}_i)$$

... est aussi obtenue comme la
moyenne pondérée des vitesses

L'énergie cinétique...

**Le centre de masse ne bouge pas !
Mais, l'énergie cinétique n'est pas nulle !
Et ici, la symétrie est rompue !**



$$m = \sum m_i$$

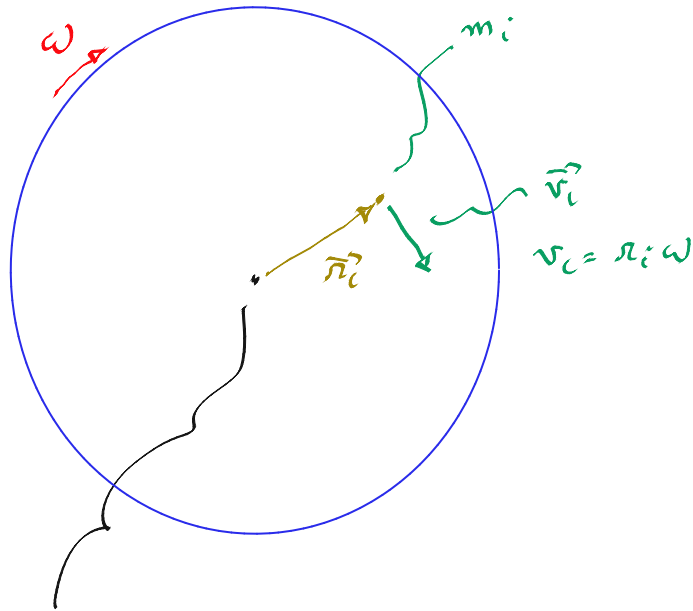
$$m \vec{x} = \sum (m_i \vec{x}_i)$$

$$m \vec{v} = \sum (m_i \vec{v}_i)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 \neq \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

... est aussi obtenue comme la
moyenne pondérée des énergies

Calcul de l'énergie cinétique de rotation



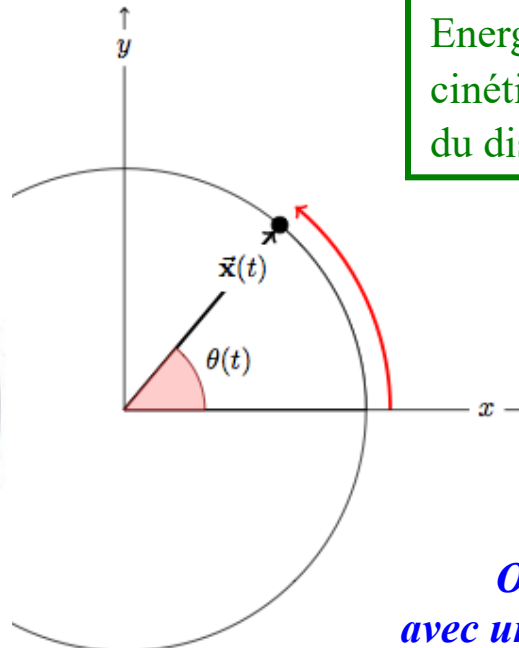
LE CENTRE
DE MASSE
NE BOUGE PAS
 $\vec{v}_c = 0$

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum m_i r_i^2 \right)}_I \omega^2
 \end{aligned}$$

MOMENT
D'INERTIE

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Et l'énergie cinétique de rotation d'un disque ?



$$\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum m_i r_i^2 \right)}_I \omega^2$$

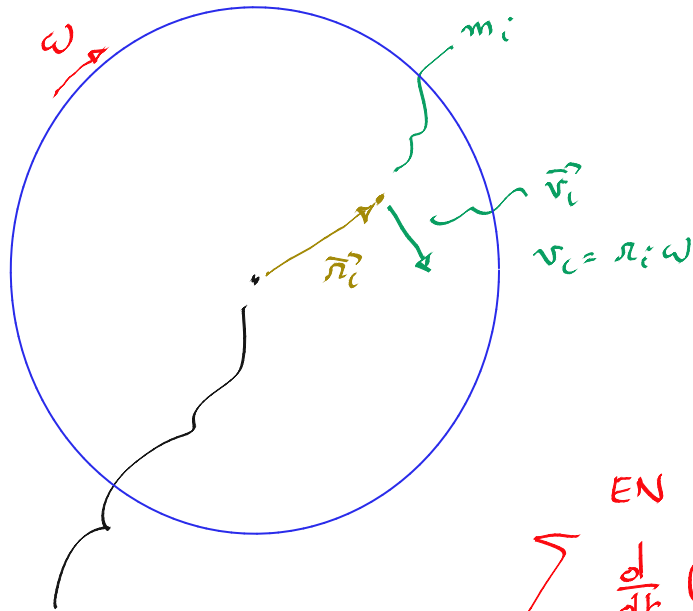
Energie
cinétique
du disque

Moment
d'inertie
du corps

*Et le centre de masse
ne bouge pas !*

*On peut donc avoir une énergie cinétique
avec un centre de masse totalement immobile !*

Calcul du moment cinétique



LE CENTRE
DE MASSE
NE BOUGE PAS
 $\vec{v}_c = 0$

$$\underbrace{\vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i)} = \sum \underbrace{\vec{r}_i \times \vec{F}_i}_{\vec{M}_i}$$

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}_{\text{MOMENT CINÉTIQUE}})$$

MOMENT
CINÉTIQUE

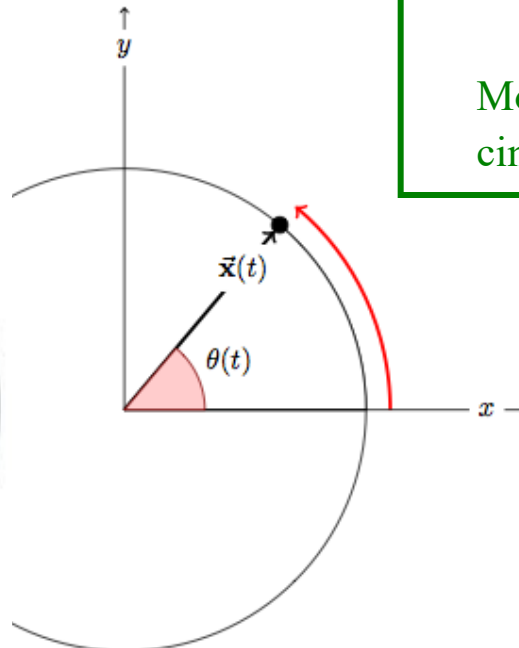
$$\text{CAR } \frac{d\vec{r}_i}{dt} = 0$$

EN 2D

$$\sum_i \frac{d}{dt} (r_i m_i r_i \omega) = \sum_i M_i$$

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\sum m_i r_i^2}_{I} \right) \omega = \sum M_i$$

Et le moment cinétique d'un disque ?



$$\boxed{\sum r_i m_i v_i} = \underbrace{\left(\sum m_i r_i^2 \right)}_I \omega$$

Moment cinétique

Moment d'inertie du corps

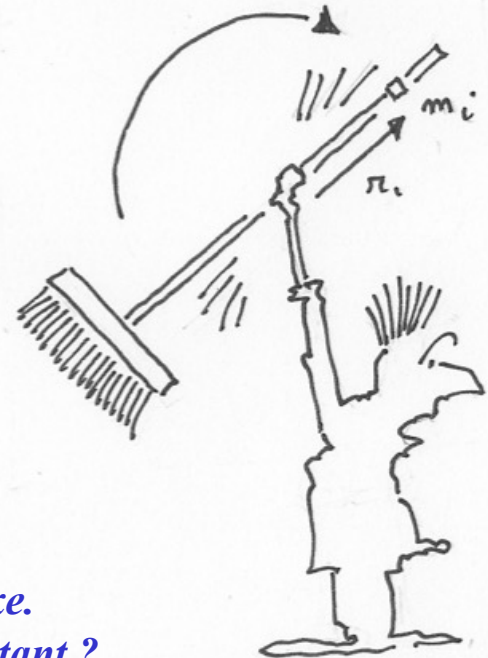
Et le centre de masse ne bouge pas !

*Pas de quantité de mouvement !
Mais un moment cinétique non nul car le disque tourne !*

Qu'est ce qui influence le moment d'inertie ?

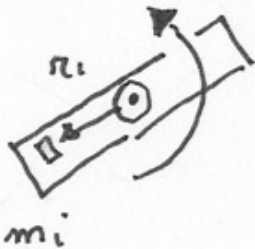
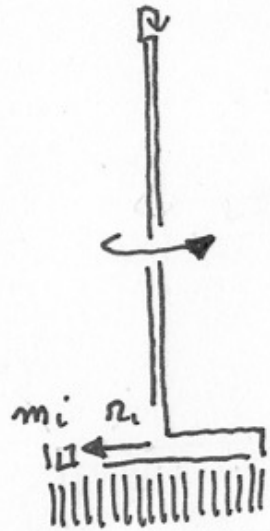
Le moment d'inertie dépend de :

- la **masse** du balai
- la **distribution de la masse** par rapport à l'axe de rotation



*On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?*

Et ceci est moins
fatigant et moins
spectaculaire !



*On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?*

$$I = 12.6 \text{ kg m}^2$$



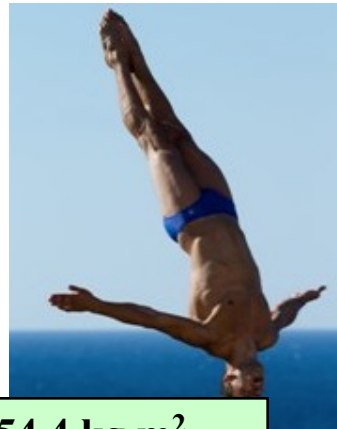
Le moment d'inertie dépend de :

- la **masse** du plongeur
- la **distribution de la masse** par rapport à l'axe de rotation

$$I = 23.8 \text{ kg m}^2$$



$$I = 54.4 \text{ kg m}^2$$

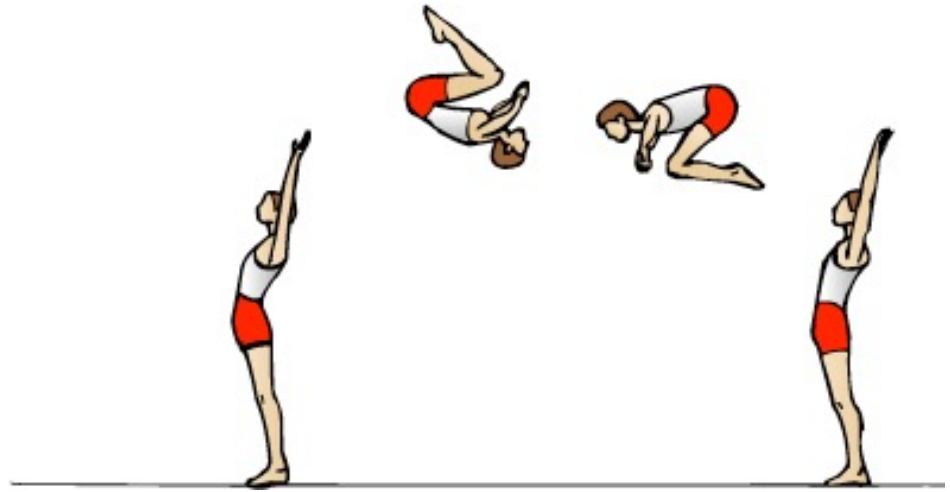


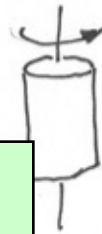
Moment d'inertie

$$I = \sum m_i r_i^2$$

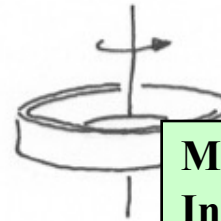
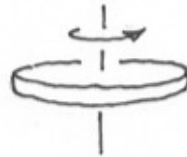
Moment d'inertie
du plongeur

Pourquoi est-ce que
la gymnaste se recroqueville
pour faire la pirouette ?





**Masse identique
Inertie minimale**



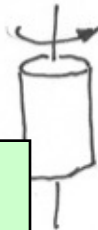
**Masse identique
Inertie maximale**

Cylindres, disques, anneaux...
Veaux, vaches, cochons !

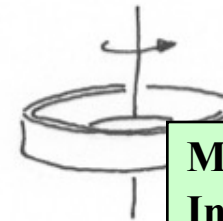
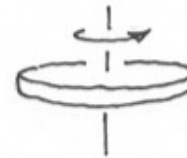
Une bibliothèque de moments d'inertie

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i r_i^2$$



**Masse identique
Inertie minimale**



**Masse identique
Inertie maximale**

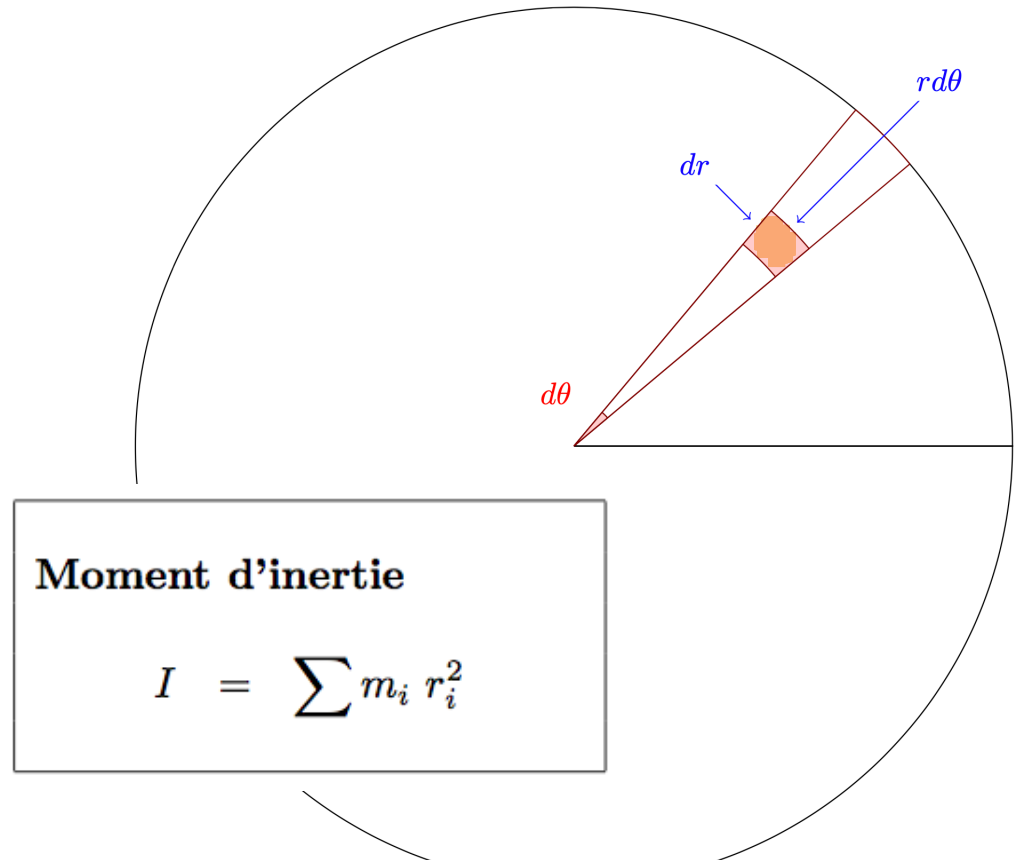
Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m \frac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m \frac{L^2}{12}$

Intégration des moments d'inertie



$$m = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \, dr \, r d\theta \, dz = 2\pi L \rho \int_0^R r \, dr = 2\pi L \rho \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \rho \pi L R^2$$

$$I = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \, r^2 \, dr \, r d\theta \, dz = 2\pi L \rho \int_0^R r^3 \, dr = 2\pi L \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\rho \pi L R^4}{2} = \frac{m \cancel{L} R^2}{2}$$

Théorème de Huygens

Moment d'inertie quelconque



$$\begin{aligned} I_h &= \sum m_i (\vec{r}_i + \vec{h}) \cdot (\vec{r}_i + \vec{h}) \\ &= \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i}_{= I} + \underbrace{\sum m_i \vec{h} \cdot \vec{h}}_{= m h^2} + 2 \left(\underbrace{\sum m_i \vec{r}_i}_{= 0} \right) \cdot \vec{h} \end{aligned}$$

*En vertu de la définition
du centre de masse !*

Une conséquence immédiate de ce théorème est qu'il est toujours moins coûteux (en énergie) de faire tourner un corps autour d'un axe passant par le centre de masse.

Théorème des axes parallèles

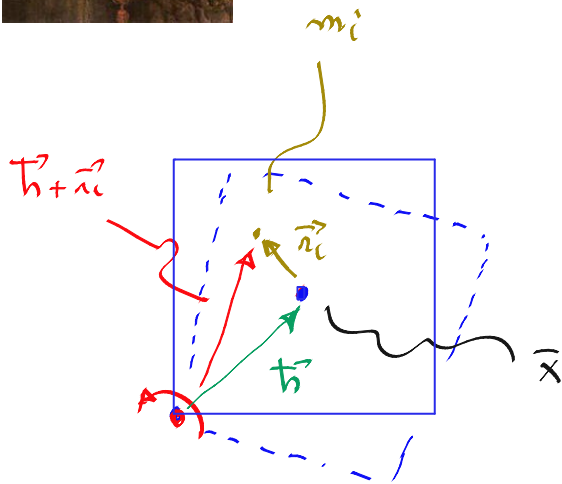
$$I_h = m h^2 + I$$



Théorème de Huygens ou des axes parallèles...

I

MOMENT
D'INERTIE
POUR TOURNER
AUTOUR DU CENTRE
DE MASSE



$$I_h = \sum_i m_i (h + \vec{r}_i) \cdot (h + \vec{r}_i)$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i \underbrace{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i}_{r_i^2}}_I + \underbrace{\sum_i m_i \underbrace{h^2}_{h^2}}_m + \cancel{2 \sum_i m_i h \cdot \vec{r}_i}$$

$$2 \vec{h} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$\underbrace{\qquad}_{\vec{x}_i - \vec{x}}$

$= 0$

$$\underbrace{\sum m_i}_{m} \vec{x} = \sum m_i \vec{x}_i$$

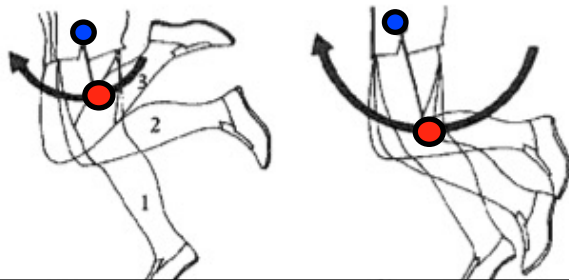
$$\sum m_i \left\{ \sum m_i (\underbrace{\vec{x}_i - \vec{x}}_{\vec{r}_i}) \right\} = 0$$

Moment d'inertie de la jambe par rapport à la hanche

Lors d'un sprint, le coureur va chercher à ramener ses jambes le plus rapidement possible en avant.

Il va attirer le talon vers le haut durant la phase d'oscillation.

Le moment d'inertie par rapport à la hanche est diminué.

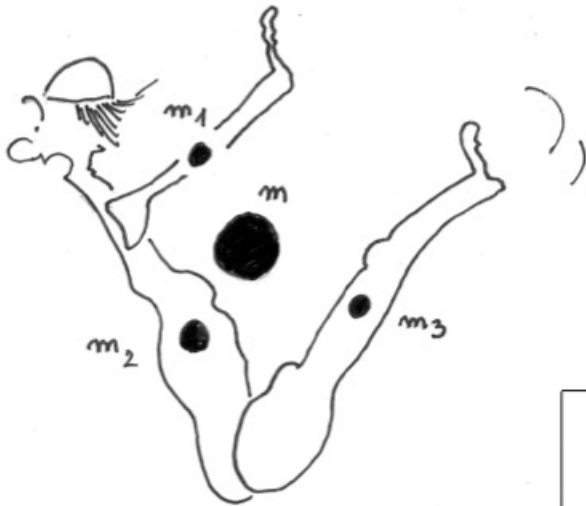


Pour les courses de fond, le coureur va dépenser moins d'énergie à relever le talon.

Le moment d'inertie par rapport à la hanche reste plus grand.

La vitesse est évidemment aussi moins rapide !

En résumé :



Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m \vec{x}(t) = \sum (m_i \vec{x}_i(t))$$

$$m \vec{v}(t) = \sum (m_i \vec{v}_i(t))$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m \vec{v}) &= \sum \vec{F} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}\right) &= \sum \vec{F} \cdot \vec{v} \\ \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \vec{v}) &= \sum \vec{r} \times \vec{F} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = \sum \vec{F} \cdot \vec{v} \\
 \uparrow \\
 \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{F} \\
 \downarrow \\
 \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}
 \end{array}$$

Deux
principes
corollaires...

$$\begin{array}{c}
 \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v} \\
 \uparrow \\
 \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{F} \\
 \downarrow \\
 \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}
 \end{array}$$

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) =$$

Forces

$$\sum \vec{F}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b .

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(m \vec{v}) dt = \sum \int_a^b \vec{F} dt$$

En supposant que les forces sont **constantes**.

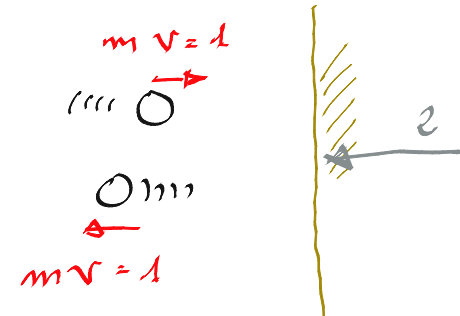
$$[m \vec{v}]_b - [m \vec{v}]_a = \sum \vec{F} (t_b - t_a)$$

$$\Delta(m \vec{v}) =$$

$$\sum \vec{F} \Delta t$$

Impulsions

Bilan
de la quantité
de mouvement



Puissance des forces

$$\frac{d}{dt} (m \vec{v}) \cdot \vec{v} = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

↓
En intégrant entre les instants t_a et t_b .

$$\int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \sum \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \sum \int_a^b \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt = \sum \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

↓
En supposant que les forces sont **constantes**.

$$\left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_b - \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_a = \sum \vec{F} \cdot (\vec{x}_b - \vec{x}_a)$$

$$\Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

Travail des forces

Bilan d'énergie cinétique

Moments des forces

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}(m \vec{r} \times \vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

↓
En intégrant entre les instants t_a et t_b .

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(m \vec{r} \times \vec{v}) dt = \sum \int_a^b \vec{r} \times \vec{F} dt$$

↓
En supposant que les moments sont **constants**.

$$[m \vec{r} \times \vec{v}]_b - [m \vec{r} \times \vec{v}]_a = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) (t_b - t_a)$$

$$\Delta(m \vec{r} \times \vec{v}) = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) \Delta t$$

Impulsions angulaires

Bilan de moment cinétique

Forces

Moments

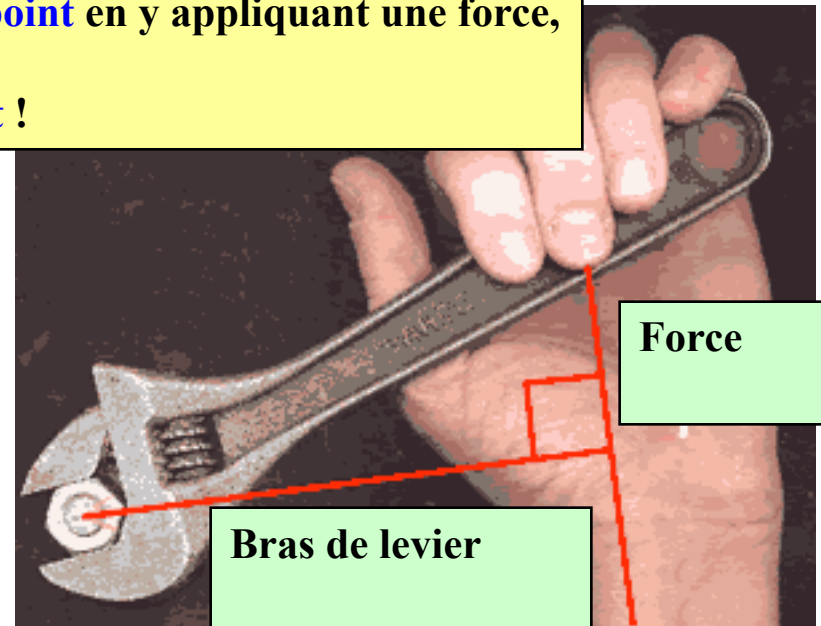
C'est quoi tout cela ?



**Le mouvement de chaque particule de la clé à molette est complexe
Mais, la vitesse du centre de masse est nulle...
On n'exercerait donc aucune force sur le centre de gravité ?**

Ce qui fait tourner la clé, c'est le moment !

Supposons que l'on fixe une barre en **un point** et que l'on souhaite la faire tourner autour **de ce point** en y appliquant une force, **l'accélération angulaire** sera proportionnelle **au moment de cette force** par rapport à **ce point** !



$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{bmatrix}$$

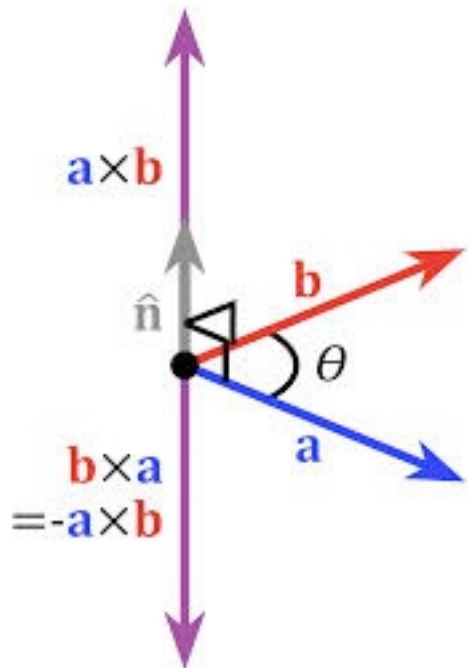


$$C = AB \sin(\theta)$$

Cross Product

Produit vectoriel de vecteurs

Attention ! $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
Le produit vectoriel n'est pas commutatif !



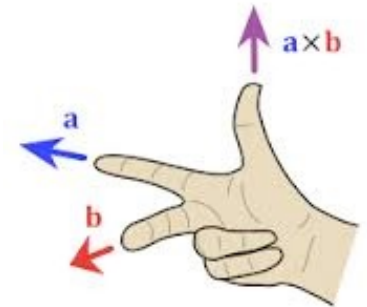
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{bmatrix}$$



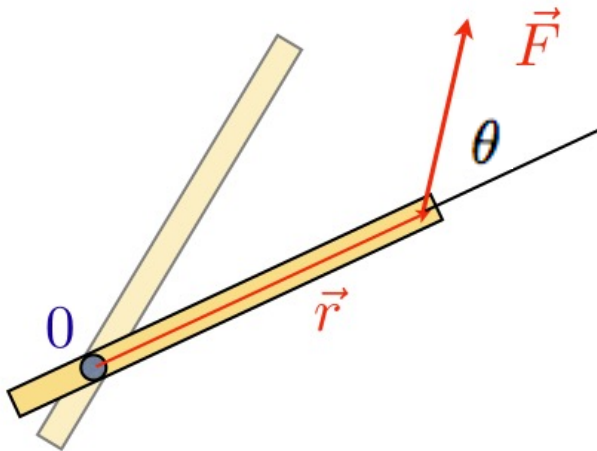
$$C = AB \sin(\theta)$$

Cross Product

Produit vectoriel
de vecteurs



Et c'est quoi le moment d'une force par rapport à un point ?



Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{M}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

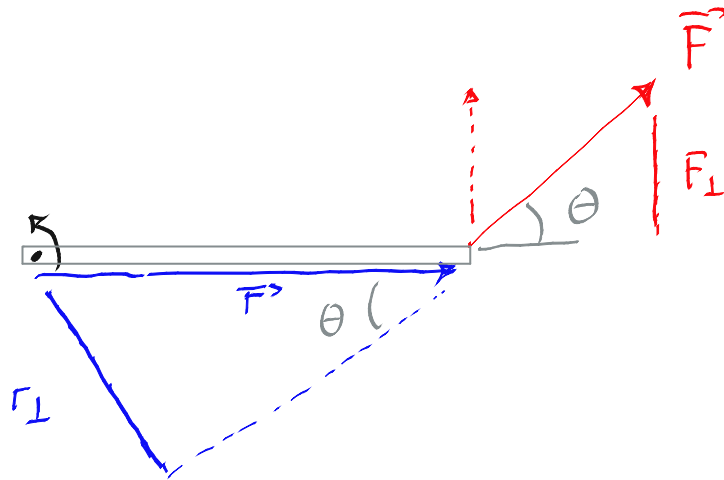
$$M = r_x F_y - r_y F_x = F r_{\perp} = F_{\perp} r = F r \sin(\theta)$$

Direction du moment = axe de rotation

Norme de moment = vitesse de rotation

Signe du moment = sens de la rotation suivant la fameuse règle de la main droite !

Les 3 manières de calculer le moment d'une force !



$$M_z = r_x F_y - r_y F_x = r F \sin \theta = F_{\perp} r = F r_{\perp}$$

Moments

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$



$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

Forces

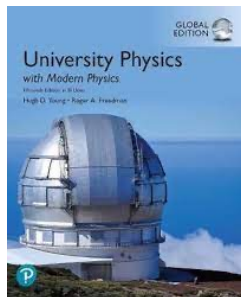
Résistance au
mouvement = masse

La cause :
la force !

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

La conséquence :
l'accélération !

Linear
Momentum



*Quelle est la voiture qui va accélérer
le plus vite pour la même force motrice ?*

Bilan
de la quantité
de mouvement

Résistance à la rotation
= moment d'inertie

La cause :
le moment de force !

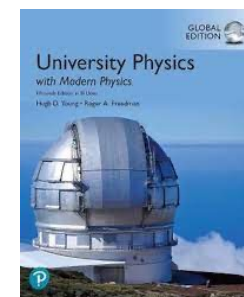
$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

La conséquence :
l'accélération angulaire !

Bilan du moment cinétique



*Que fait la danseuse
pour tourner plus vite
sur elle-même ?*



**Angular
Momentum**



- La **masse** mesure la résistance d'un corps à une **accélération** causée par une **force**.
- Le **moment d'inertie** mesure la résistance d'un corps à une **accélération angulaire** causée par un **moment de force**.

Ne pas
oublier !



$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

Equilibre de rotation

$$\cancel{\frac{d}{dt}(I\omega)} = \sum M_i$$



Etudions d'abord les forces et les moments de corps au repos !

Concept d'équilibre statique



$$\cancel{\frac{d}{dt}(m\vec{v})} = \sum \vec{F}_i$$

Equilibre de translation

Equilibre de rotation

$$0 = \sum M_i$$



Lorsque le corps ne bouge pas, son accélération angulaire est nulle pour n'importe quel point !

Dans ce cas, on peut donc calculer les moments de force par rapport à n'importe quel point alors !



$$0 = \sum \vec{F}_i$$

Equilibre de translation

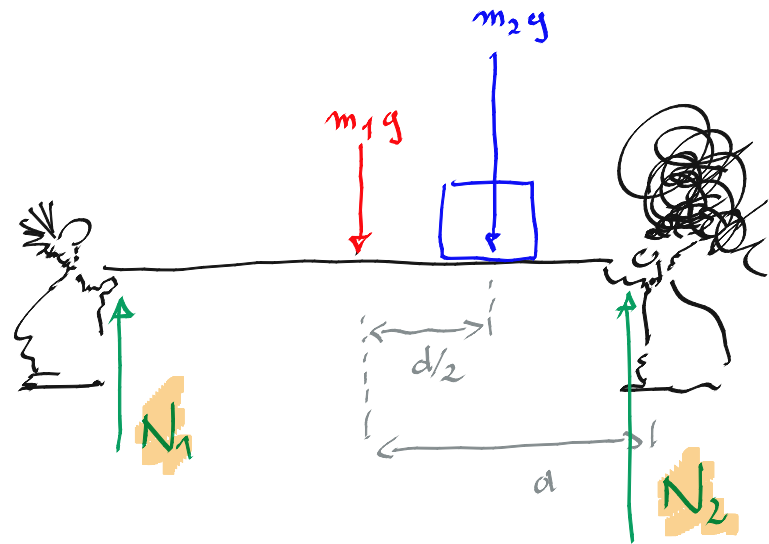
Quelles sont
les forces exercées
par les deux gars ?

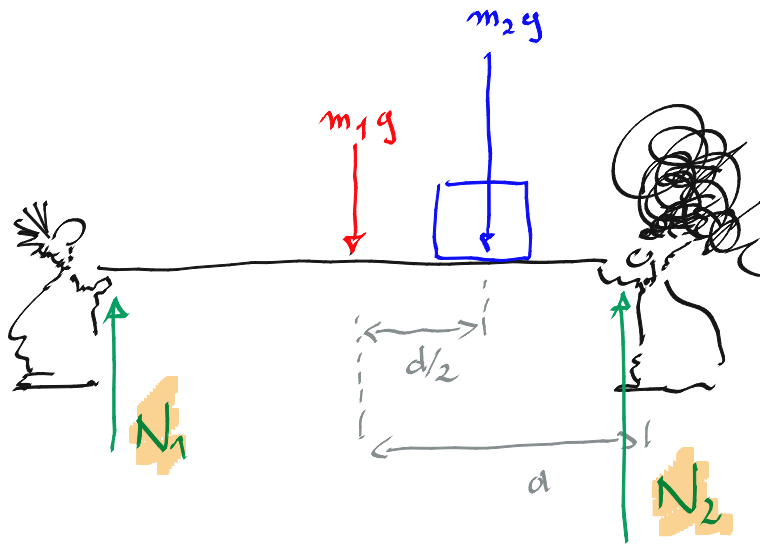


Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

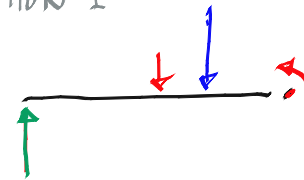




$$N_1 + N_2 = m_1 g + m_2 g$$

$$\boxed{\sum F_y = 0}$$

OPTION 1

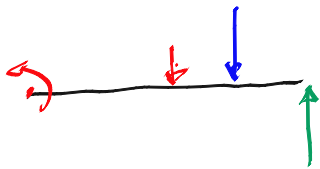


$$\boxed{\sum M = 0}$$

$$0 = -N_1 2d + m_1 g d + m_2 g d/2$$

$$N_1 = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{4} \right) g$$

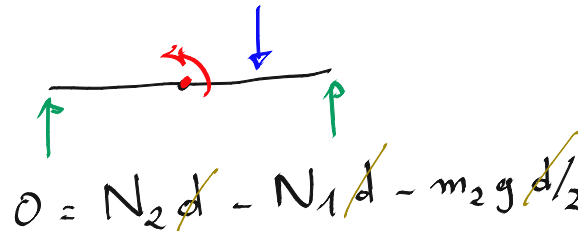
OPTION 3



$$0 = N_2 2d - m_1 g d - m_2 g \frac{3d}{2}$$

$$N_2 = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{3m_2}{4} \right) g$$

OPTION 2



$$0 = N_2 d - N_1 d - m_2 g d/2$$

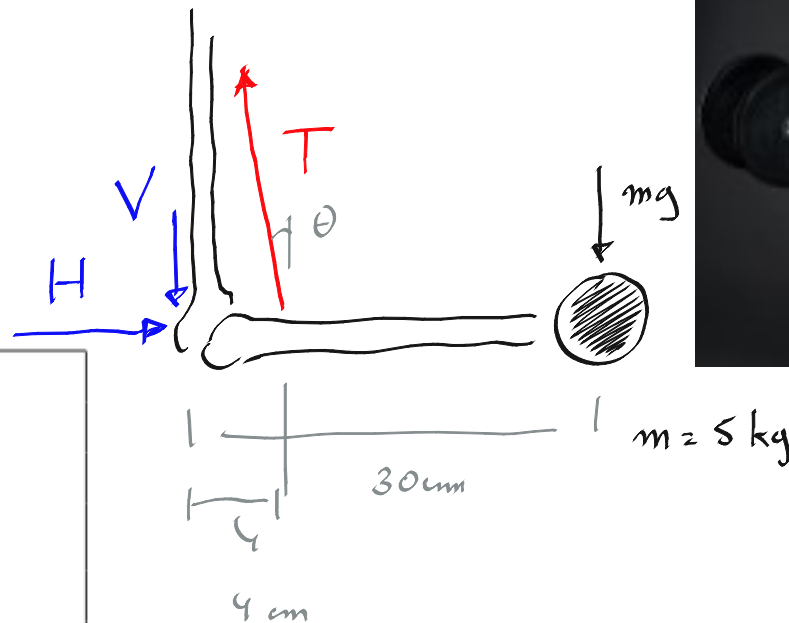
$$N_2 - N_1 = \frac{m_2 g}{2}$$

Deux équations !
Deux inconnues !

Quelle force as-tu dans le biceps ?

On cherche la force dans l'articulation
et dans le muscle du biceps !

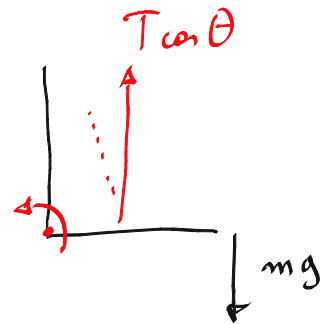
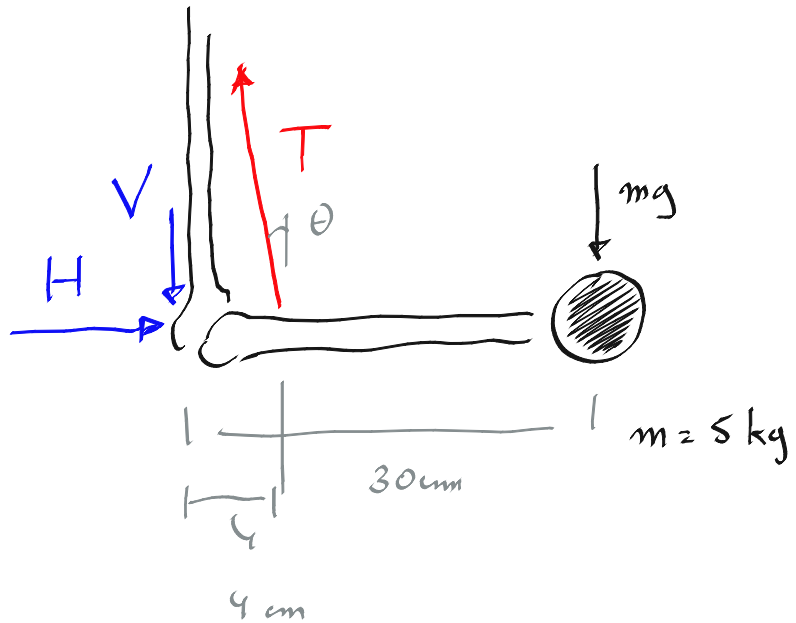
Choisir astucieusement le point par
rapport on calcule les moments peut
fortement simplifier les calculs :-)



Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

$$0 = \sum M_i$$



$$H - T \sin \theta = 0$$

$$T \cos \theta - mg - V = 0$$

$$T \cos \theta \underbrace{d}_{\approx 1} = \underbrace{L}_{0.3} \underbrace{mg}_{50}$$

0.04

$$T = \frac{0.3}{0.04} 50 \approx 400$$

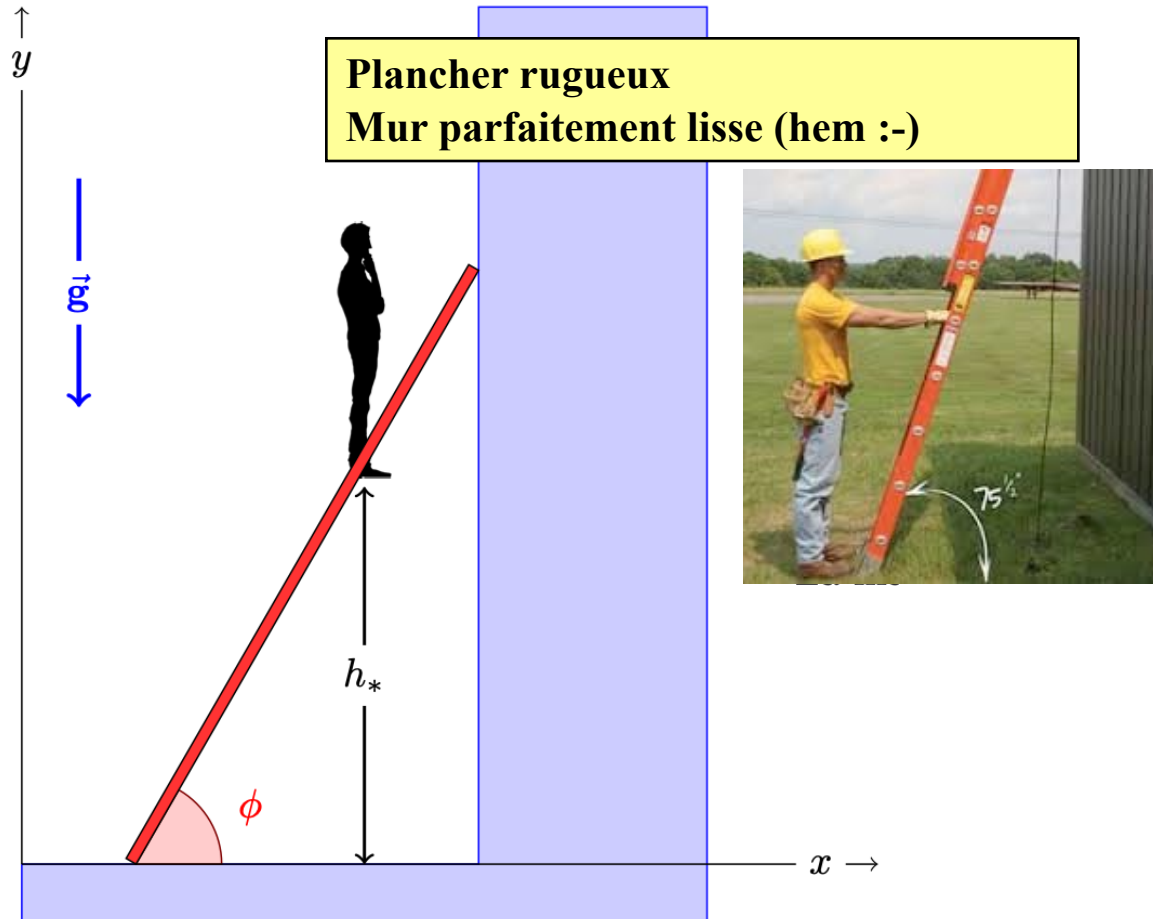
Trois équations !
Trois inconnues !

Est-ce que
l'échelle
va glisser ?

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

$$0 = \sum M_i$$



Est-ce que
l'échelle
va glisser ?

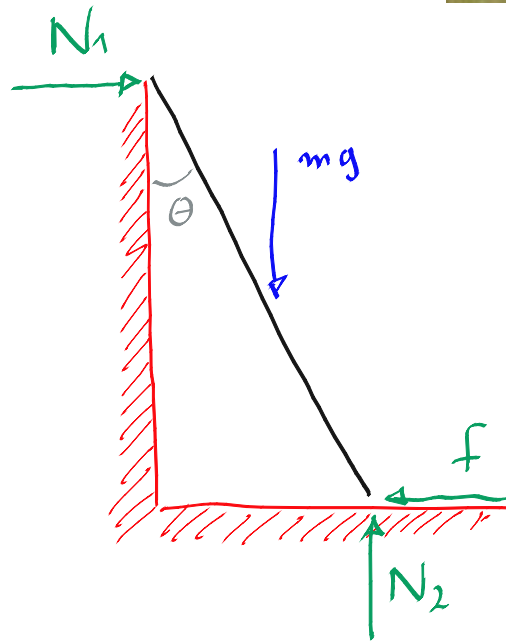


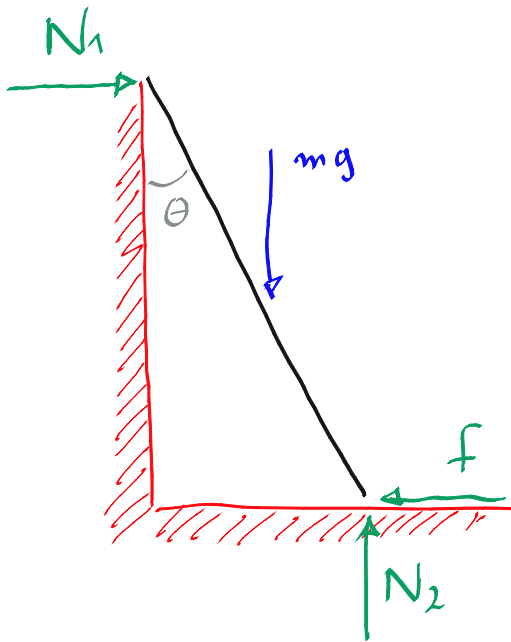
Plancher rugueux
Mur parfaitement lisse (hem :-)

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

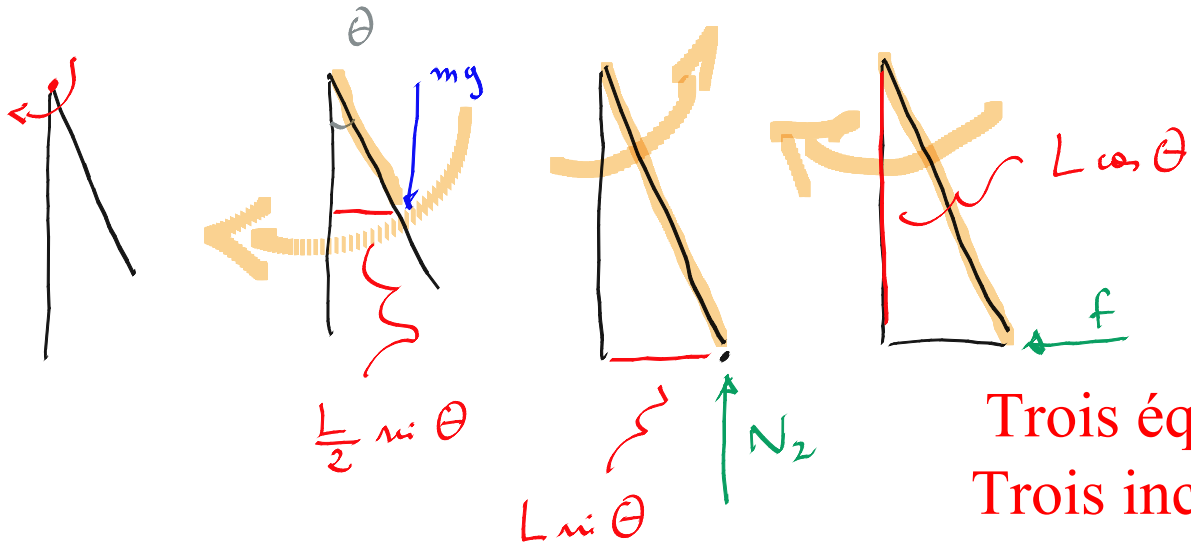




$$N_2 = mg$$

$$N_1 = f$$

$$0 = -mg \frac{L}{2} \sin \theta + mg L \cos \theta - f L \cos \theta$$



Trois équations !
Trois inconnues !

Par contre, pour un échelle totalement rigide, le problème est mal posé si il y a du frottement sur le sol et sur le mur !

C'est pas toujours aussi simple qu'il n'y paraît !



$$N_2 = mg$$

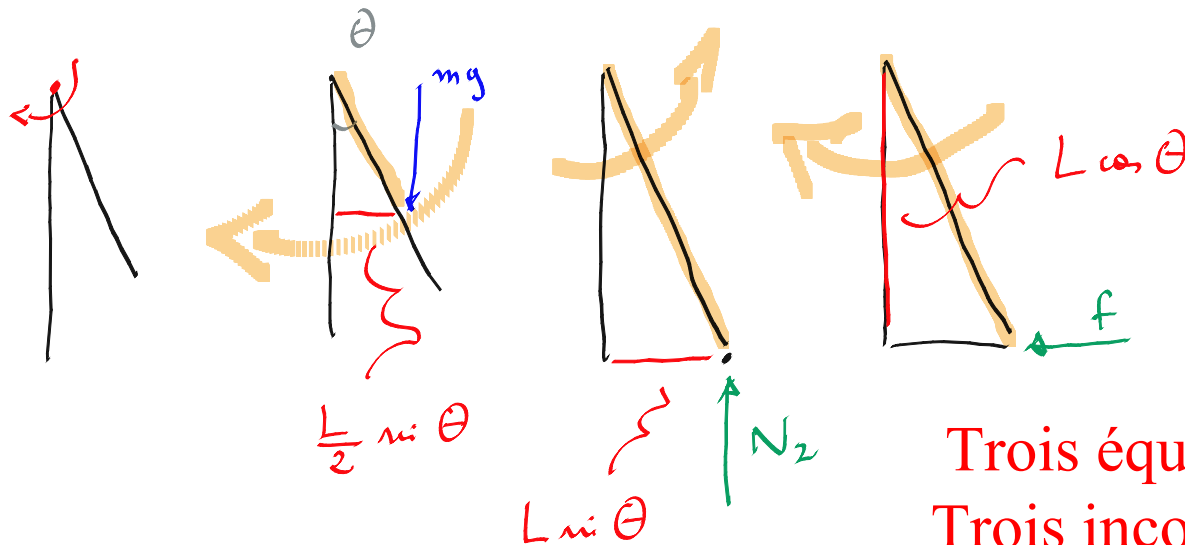
$$N_1 = f$$

$$0 = -mg \frac{L}{2} \sin \theta + mg L \cos \theta - f L \sin \theta$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum \tau = 0$$



Trois équations !
Trois inconnues !



$$\mu_s m g$$



$$0 = -m g \frac{L}{2} \sin \theta + m g L \cos \theta - f L \sin \theta$$

$$|\tan \theta| = 2 \mu_s$$

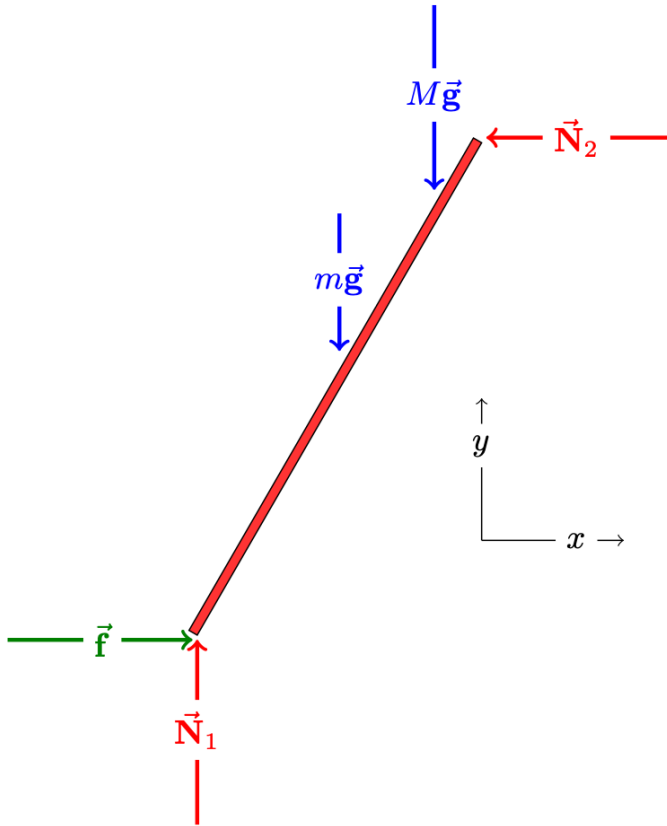
$$\mu_s = 0.6$$

$$\theta \approx 50^\circ$$

Calcul de l'angle critique !
C'est l'angle où le frottement est maximal !

Par contre, pour une échelle totalement rigide, le problème est mal posé si il y a du frottement sur le sol et sur le mur !

Ce n'est pas toujours aussi simple qu'il n'y paraît !



- Poids de l'échelle : $m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- Poids de l'ouvrier : $M\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$
- Force de réaction normale du sol : $\vec{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ (m+M)g \end{bmatrix}$
- Force de frottement au sol : $\vec{f} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(m+M)g \\ 0 \end{bmatrix}$
- Force de réaction normale du mur : $\vec{N}_2 = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix}$

Trois équations !
Trois inconnues !



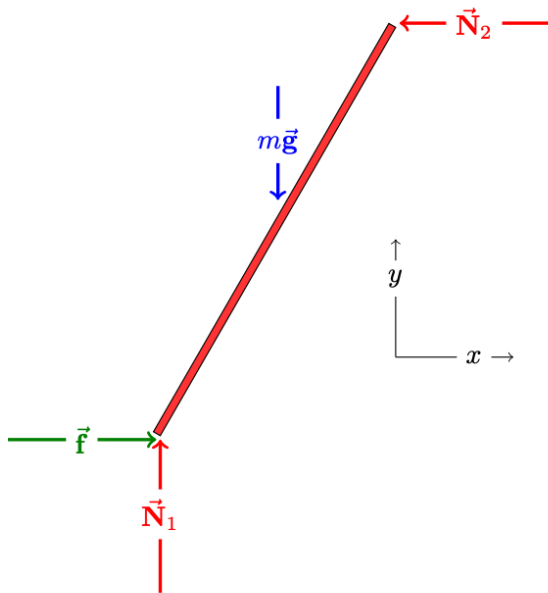
$$0 = \mu_s mg - N_2$$

$$0 = N_2 L \sin(\phi) - mg \frac{L}{2} \cos(\phi)$$



$$\mu_* mg L \underbrace{\sin(\phi)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = mg \frac{L}{2} \underbrace{\cos(\phi)}_{\frac{1}{2}}$$

Echelle = 10 kg et 3 mètres
 Angle de 60 degrés
 Coefficient de frottement statique 0.5
 Coefficient de frottement cinétique 0.1
 Accélération de la gravité = 10 m/s²



$$\mu_* = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.29 < \mu_s$$

Tout d'abord, est-ce que
 l'échelle sans l'ouvrier
 va glisser ?

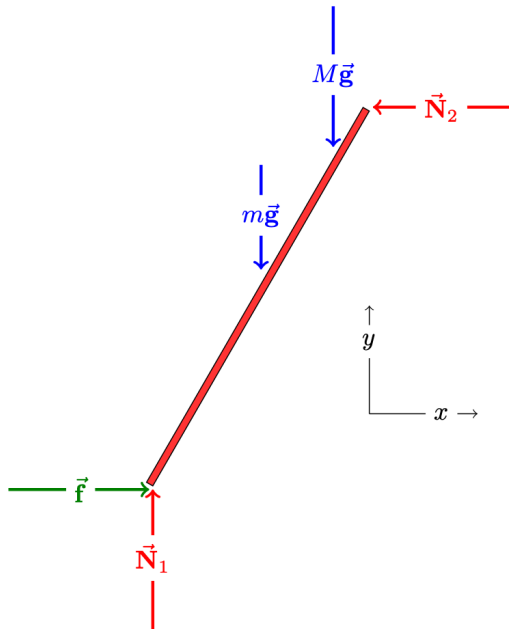


Ouvrier avec sacoche = 120 kg
 Echelle = 10 kg et 3 mètres
 Angle de 60 degrés
 Coefficient de frottement statique 0.5
 Accélération de la gravité = 10 m/s²

$$\mu_s(m + M)gL \sin(\phi) = mg \frac{L}{2} \cos(\phi) + Mg \frac{h_*}{\sin(\phi)} \cos(\phi)$$



$$L \frac{\mu_s(m + M)6 - m\sqrt{3}}{4M} = h_*$$



$$h_* = \frac{390 - 10\sqrt{3}}{160} = 2.33 \text{ m}$$

Quelle hauteur l'ouvrier peut atteindre
 avant que l'échelle ne glisse ?

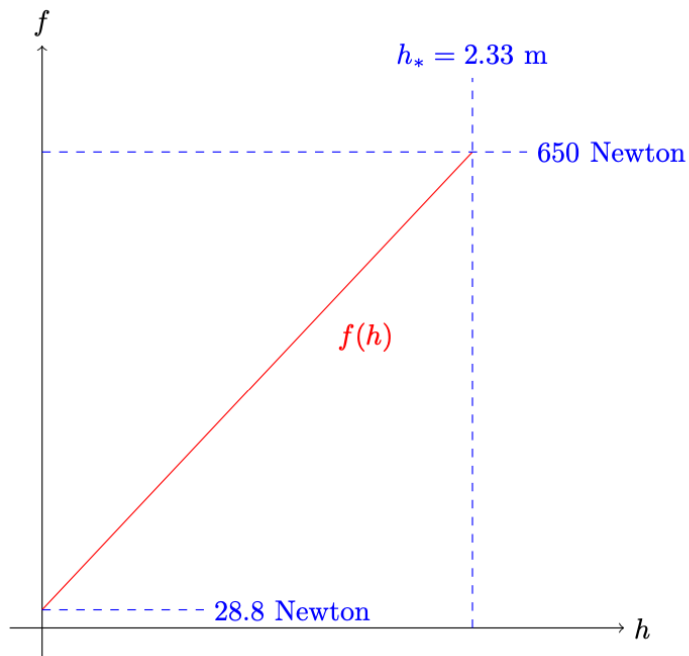
$$f(h) L \sin(\phi) = mg \frac{L}{2} \cos(\phi) + Mg \frac{h}{\sin(\phi)} \cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$f(h) = \underbrace{\frac{mg \cos(\phi)}{2 \sin(\phi)}}_{28.8675} + h \underbrace{\frac{Mg \cos(\phi)}{L \sin^2(\phi)}}_{266.6667}$$



Ouvrier avec sacoche = 120 kg
 Echelle = 10 kg et 3 mètres
 Angle de 60 degrés
 Coefficient de frottement statique 0.5
 Accélération de la gravité = 10 m/s²



Evolution de la force de frottement en
 fonction de la hauteur de l'ouvrier



- Le moment est le produit du bras de levier par la force.
- L'énergie cinétique d'un corps est la somme de l'énergie du mouvement du centre de masse et de l'énergie de la rotation du corps autour de ce point.
- Pour la rotation d'un corps autour de son centre de masse, les **moments de force**, le **moment cinétique** et le **moment d'inertie** du corps sont l'équivalent des **forces**, de la **quantité de mouvement** et de la **masse** pour le mouvement de ce point !
- Un corps est à l'équilibre si la somme des forces et des moments est nulle : c'est l'équilibre statique.

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

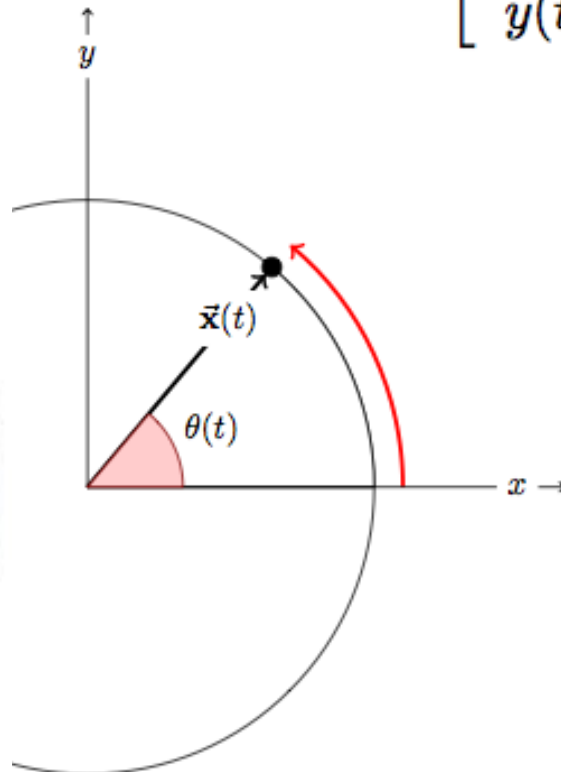
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

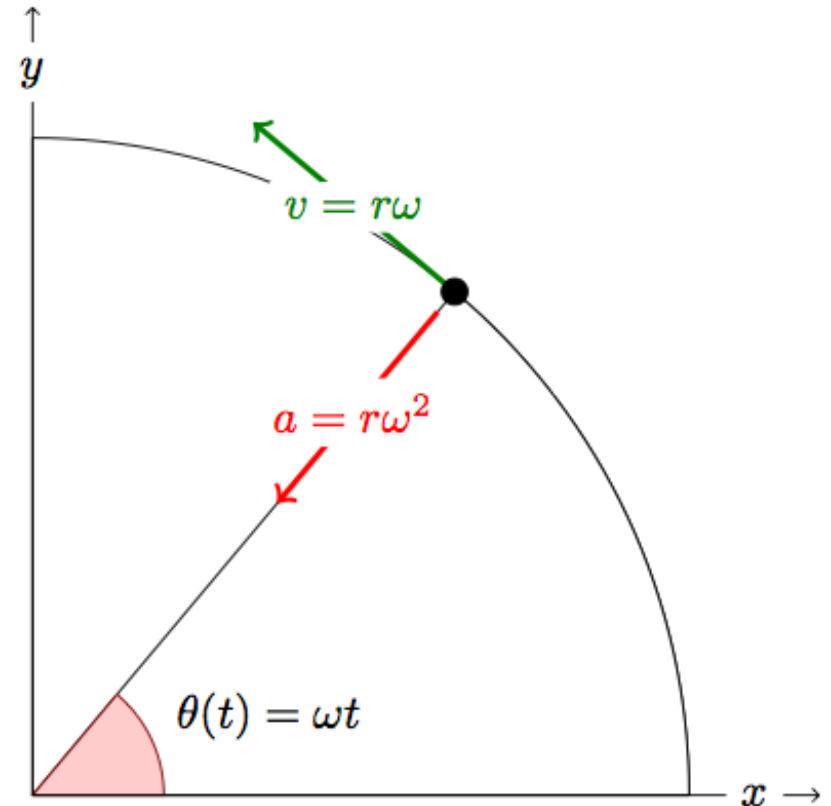
Ne pas
oublier !

Le disque tourne...

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta(t)) \\ r \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Accélération centripète



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

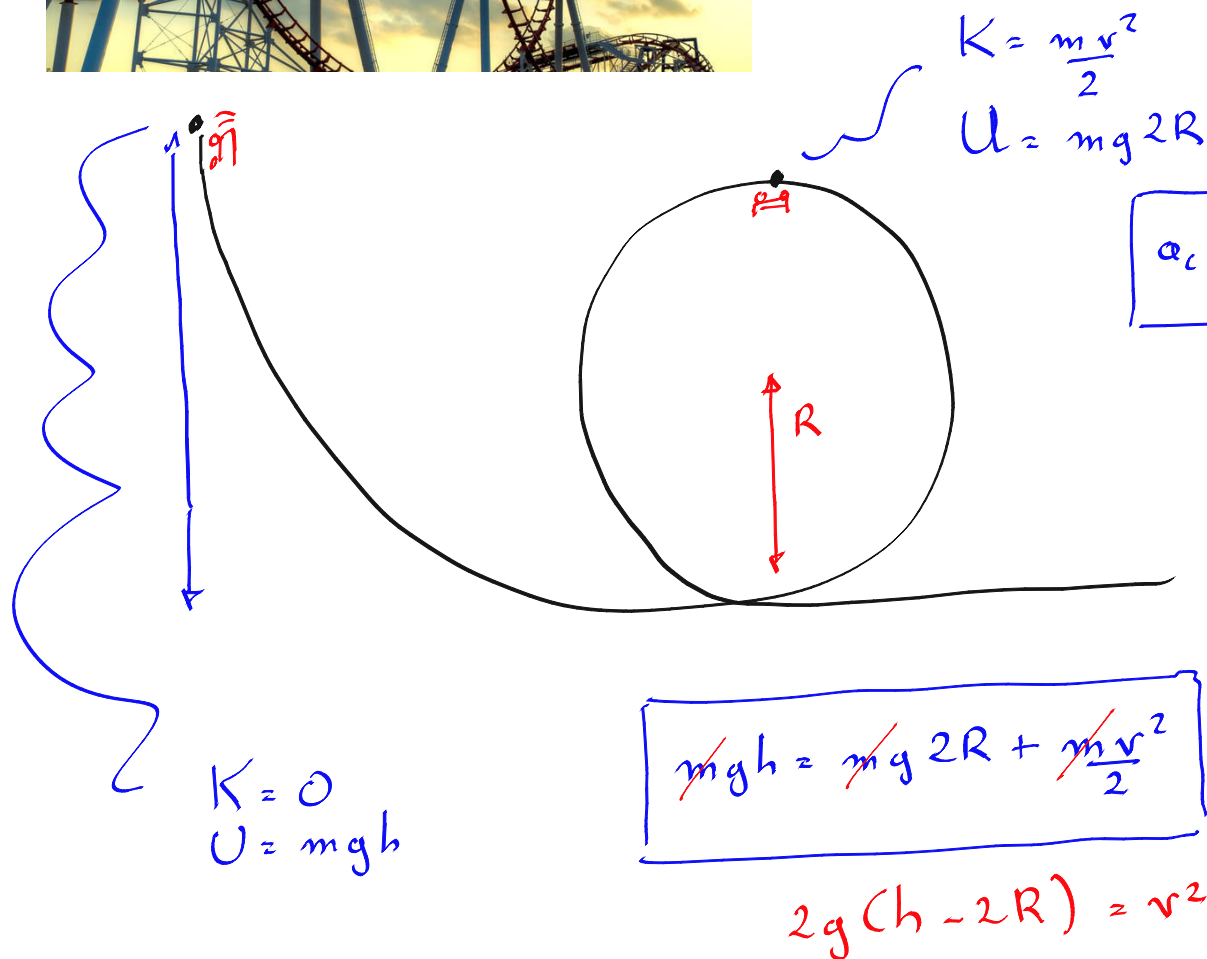
$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\omega^2 \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Vitesse
tangentielle



Exercice classique
et pas tout-à-fait réaliste
de tous les livres de physique



$$\cancel{2g} \frac{(h-2R)}{\cancel{R}} \geq \cancel{g}$$

$$2h - 4R \geq 0$$

$$h \geq 2R$$

Le MRUA :-)

$$y''(t) = a$$

$$y'(t) = \overbrace{v_0 + a t}^{v(t)}$$

$$y(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2}$$



**Des millions de gens ont vu tomber une pomme,
Newton est le seul qui se soit demandé pourquoi...
(Bernard Baruch)**

Le MCUA :-)

$$\theta''(t) = \alpha$$

$$\theta'(t) = \underbrace{\omega(t)}_{\omega_0 + \alpha t}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

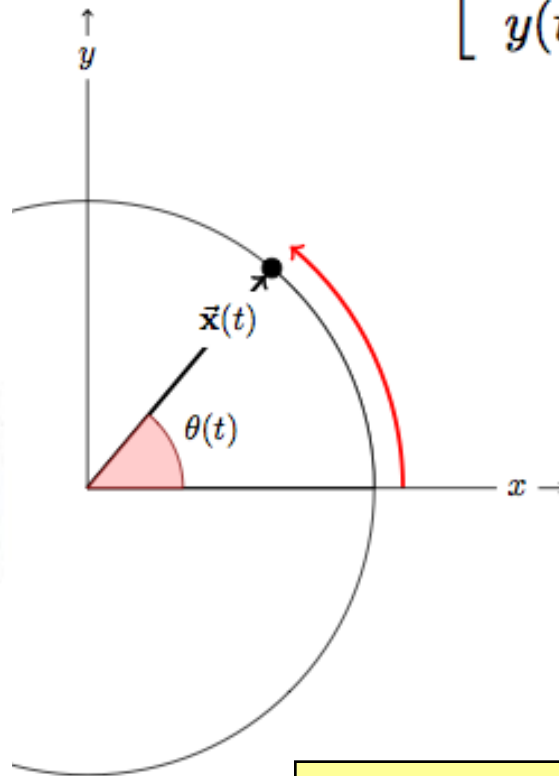


Maintenant, faisons strictement et exactement la même chose avec un mouvement circulaire !

Définissons le MCUA !

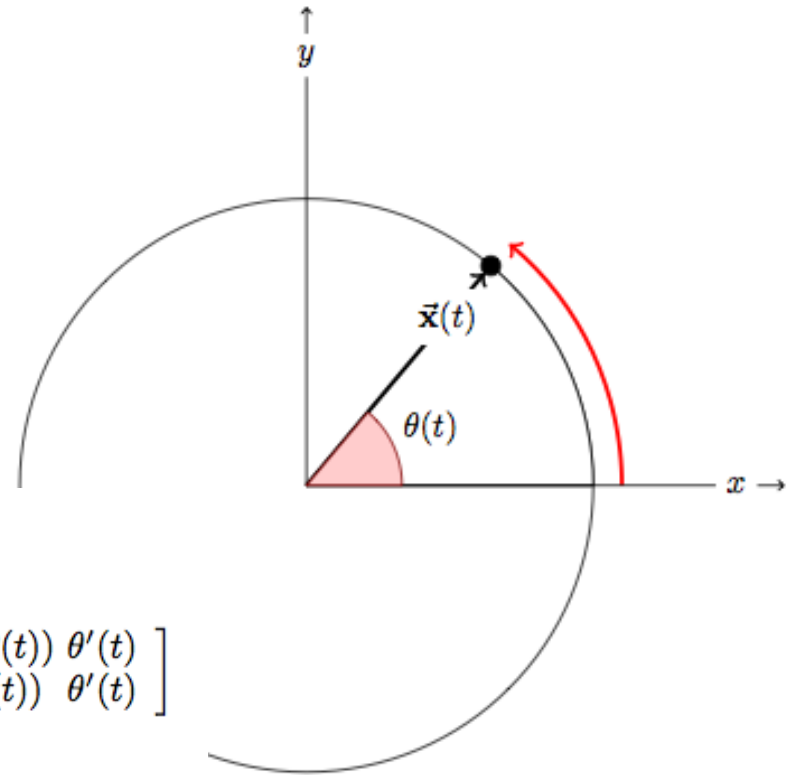
Le MCUA :-)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta(t)) \\ r \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Mouvement circulaire non-uniforme...
Vitesse angulaire non-constante
Accélération angulaire constante

Calculons la vitesse et l'accélération !



$$\vec{v}(t) = r \omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = r\omega'(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) & \theta'(t) \\ -\sin(\theta(t)) & \theta'(t) \end{bmatrix}$$



$$= r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

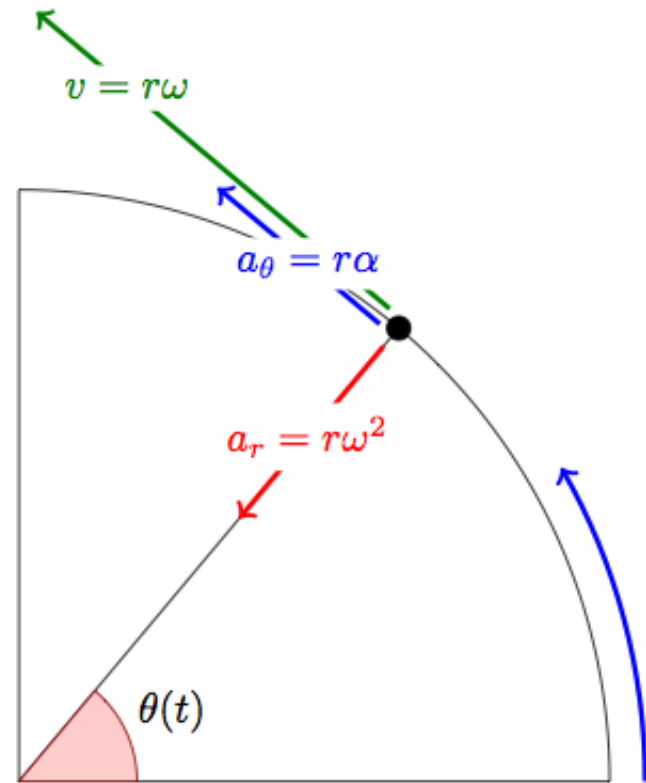
La vitesse est toujours bien tangente au mouvement !
Mais son module est désormais variable
car la vitesse angulaire n'est pas constante !

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Accélération
tangentielle



Accélération
centripète

Le truc vraiment le plus non intuitif de la physique...



$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \vec{\omega}) = \sum \vec{M}_i$$

Résumé des épisodes précédents :-)

Episode 1 : Décrire le mouvement

Episode 2 : Newton et la force de gravité

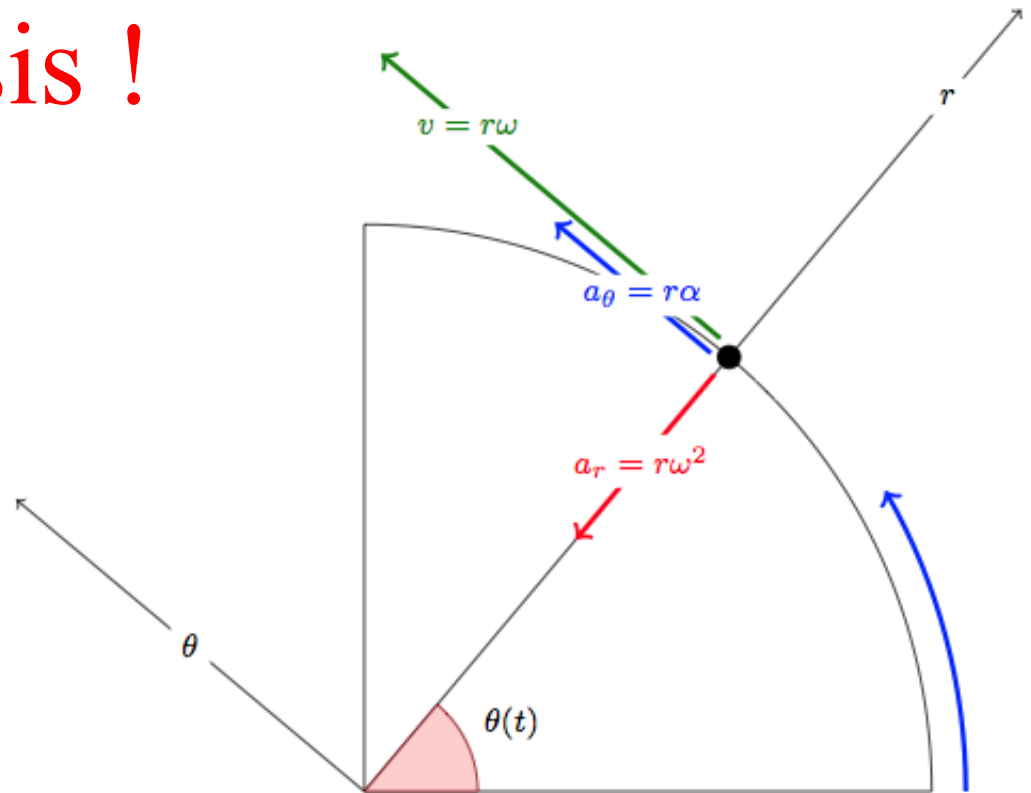
Episode 5 : Le frottement

Episode 6 : L'énergie c'est formidable !

Episode 9 : La mécanique des corps : **oooooooooooo : cela tourne !**

Avec des axes bien choisis !

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{a}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}\end{aligned}$$



Vitesse : $v = r\omega$ [m/s]

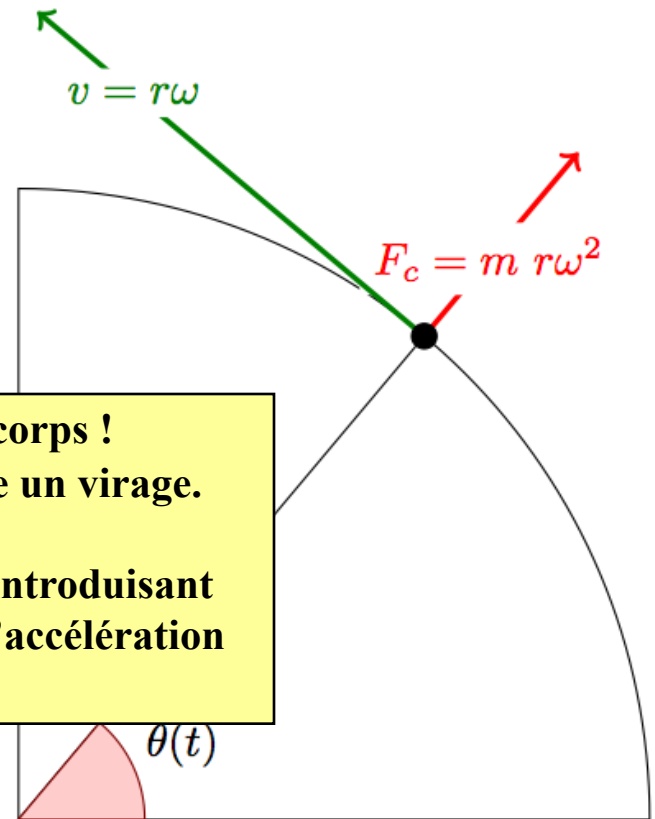
Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$ [m/s²]

Vitesse angulaire ω [radians/s] et accélération angulaire α [radians/s²]



**On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.**

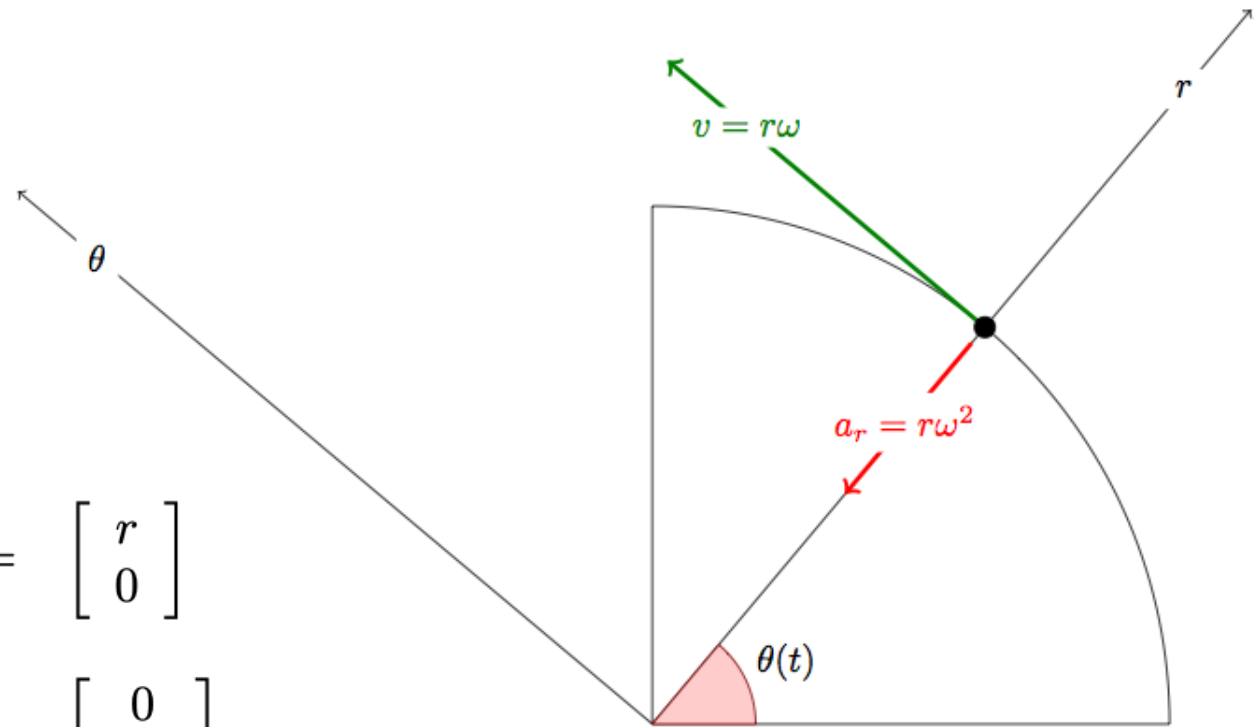
Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant une pseudo-force centrifuge qui aura le même effet que l'accélération centripète qu'on obtient dans un repère fixe !



**Remplacer
l'accélération centripète
par la pseudo-force centrifuge !**

$$\vec{\mathbf{x}}(t) : \begin{bmatrix} x_r \\ x_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) : \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$



La vitesse
est-elle toujours
la dérivée de la position ?

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = r \vec{\mathbf{e}}_r(t)$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) = r \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_r}{dt}(t)}_{\omega \vec{\mathbf{e}}_\theta(t)}$$

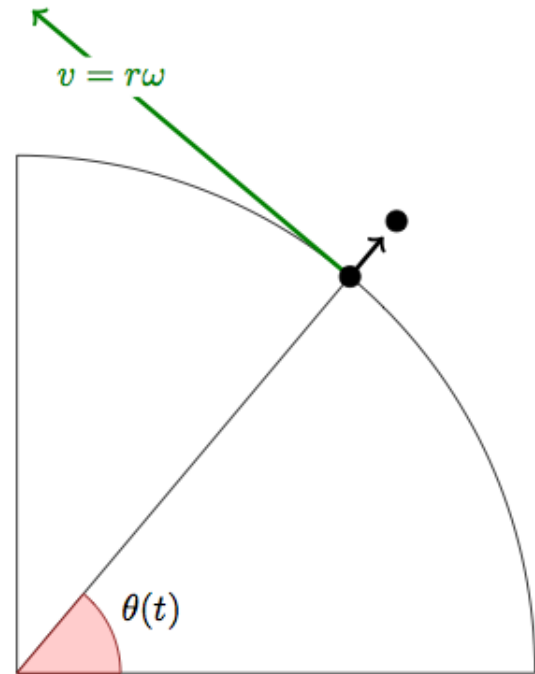
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) = r \omega \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_\theta}{dt}(t)}_{-\omega \vec{\mathbf{e}}_r(t)}$$

Oui, oui, oui !

La vitesse est bien

la dérivée de la position !

$$\vec{x}(t) = r(t) \vec{e}_r(t)$$



Et si on bouge
radialement
sur un plateau
qui tourne ?



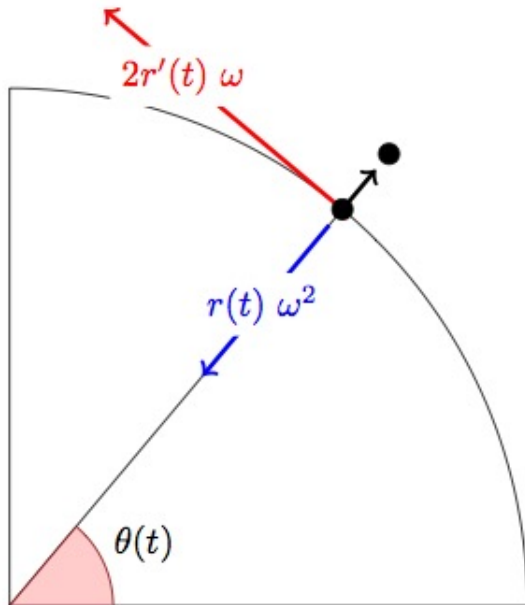
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = r'(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}(t)}_{\omega \vec{e}_\theta(t)}$$

Avec un peu d'algèbre
un brin fastidieuse...

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) &= r''(t) \vec{e}_r(t) + r'(t) \underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}(t)}_{\omega \vec{e}_\theta(t)} + r'(t) \omega \vec{e}_\theta(t) + r(t) \omega \underbrace{\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}(t)}_{-\omega \vec{e}_r(t)} \\ &\downarrow \\ &= r''(t) \vec{e}_r(t) + 2r'(t) \omega \vec{e}_\theta(t) - r(t) \omega^2 \vec{e}_r(t) \end{aligned}$$

Accélération de Coriolis

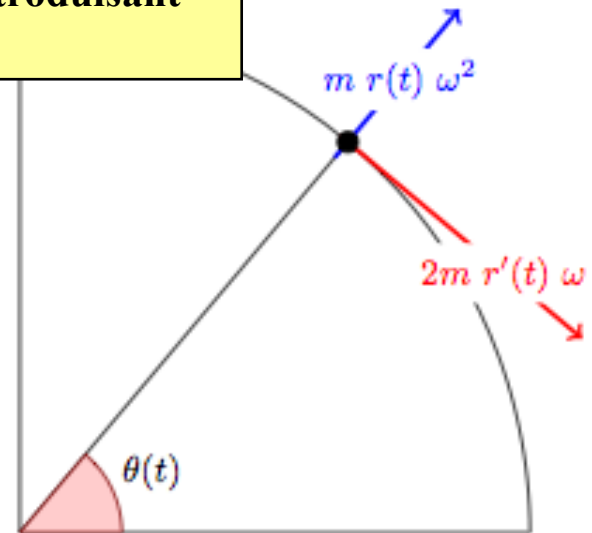
$$\vec{a}(t) = r''(t) \vec{e}_r(t) + 2r'(t) \omega \vec{e}_\theta(t) - r(t) \omega^2 \vec{e}_r(t)$$



Accélération
centripète

**On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.**

Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant des pseudo-forces centrifuge et de Coriolis



**Remplacer
l'accélération de Coriolis
par la pseudo-force de Coriolis !**

La résultante de la force de Coriolis et de la force due au gradient de pression atmosphérique fait tourner l'air autour des zones de basse et de haute pression !

Eh oui : la Terre tourne !



**Et voilà le résultat
de la pseudo-force de Coriolis !**



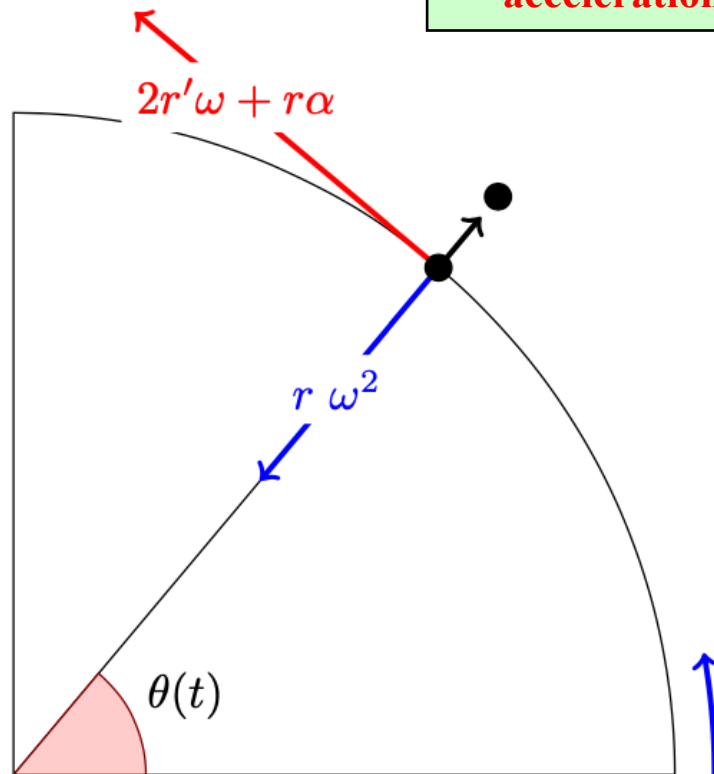
Et bien non, contrairement à la légende,
l'eau du lavabo ne tourne pas à l'envers dans l'hémisphère sud.

L'impact de la force de Coriolis est **très très très** faible à petite échelle !
Le sens de rotation dépendra davantage de la forme du lavabo
et de l'impulsion initiale lorsque vous retirez le bouchon... (si, si :-)

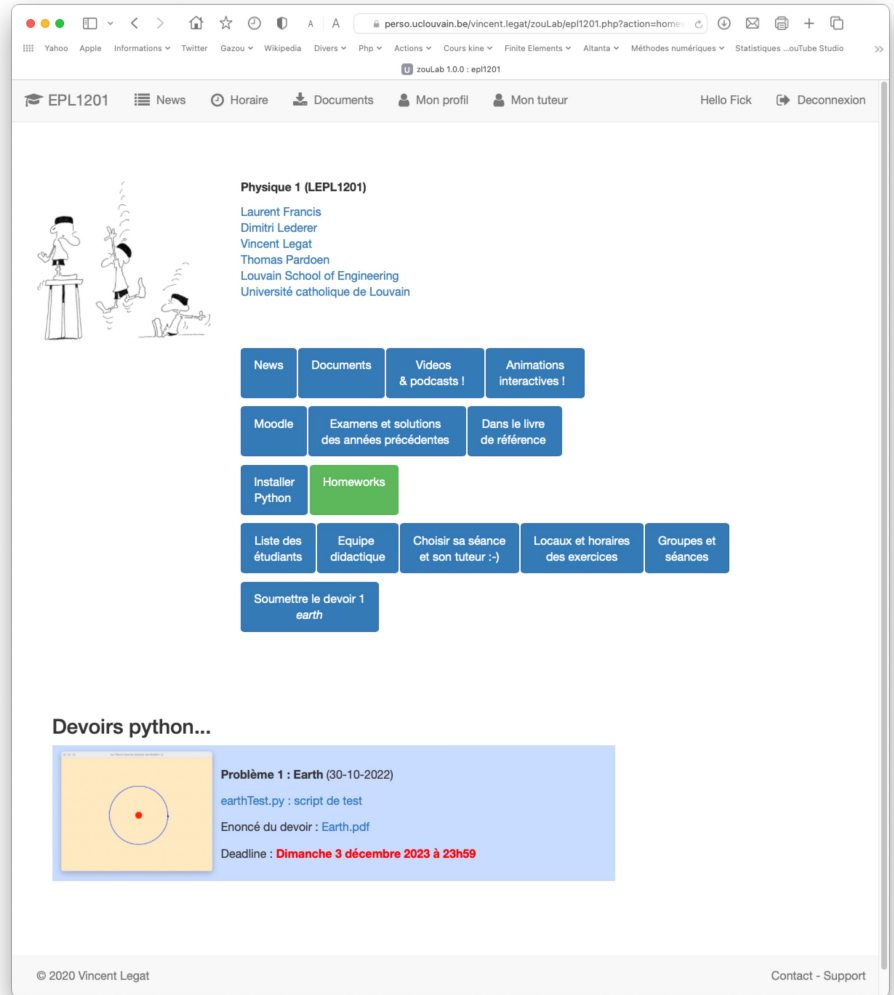
Mais, ceci est une légende urbaine !

Ne pas
oublier !

- Dans tout mouvement circulaire, l'accélération a toujours une **composante centripète**.
- Une variation de la vitesse angulaire génère une **accélération tangentielle**.
- Un déplacement radial fait aussi apparaître une **accélération tangentielle dite de Coriolis**.



Le fameux devoir python !



The screenshot shows a web browser displaying the EPL1201 website. The URL in the address bar is `perso.uclouvain.be/vincent.legat/zoulab/epl1201.php?action=home`. The page features a navigation bar with links like "EPL1201", "News", "Horaire", "Documents", "Mon profil", and "Mon tuteur". Below the navigation bar, there is a section titled "Physique 1 (LEPL1201)" with a list of names: Laurent Francis, Dimitri Lederer, Vincent Legat, and Thomas Pardoën. To the left of this text is a cartoon illustration of a person standing on a podium, another person jumping, and a third person sitting on the ground. Below the names, there is a grid of buttons for various resources: "News", "Documents", "Videos & podcasts !", "Animations interactives !", "Moodle", "Examens et solutions des années précédentes", "Dans le livre de référence", "Installer Python", "Homeworks", "Liste des étudiants", "Equipe didactique", "Choisir sa séance et son tuteur :-)", "Locaux et horaires des exercices", "Groupes et séances", and "Soumettre le devoir 1 earth". Below this grid, there is a section titled "Devoirs python..." with a sub-section "Problème 1 : Earth (30-10-2022)". This section includes a small image of a globe, a link to "earthTest.py : script de test", a link to "Enoncé du devoir : Earth.pdf", and a deadline: "Deadline : Dimanche 3 décembre 2023 à 23h59". The footer of the page contains the copyright notice "© 2020 Vincent Legat" and a link to "Contact - Support".

perso.uclouvain.be/vincent.legat/zoulab/epl1201.php?action=home

zouLab 1.0.0 - epl1201

EPL1201 News Horaire Documents Mon profil Mon tuteur Hello Fick Deconnexion

Physique 1 (LEPL1201)
Laurent Francis
Dimitri Lederer
Vincent Legat
Thomas Pardoën
Louvain School of Engineering
Université catholique de Louvain

News Documents Videos & podcasts ! Animations interactives !

Moodle Examens et solutions des années précédentes Dans le livre de référence

Installer Python Homeworks

Liste des étudiants Equipe didactique Choisir sa séance et son tuteur :-)

Locaux et horaires des exercices Groupes et séances

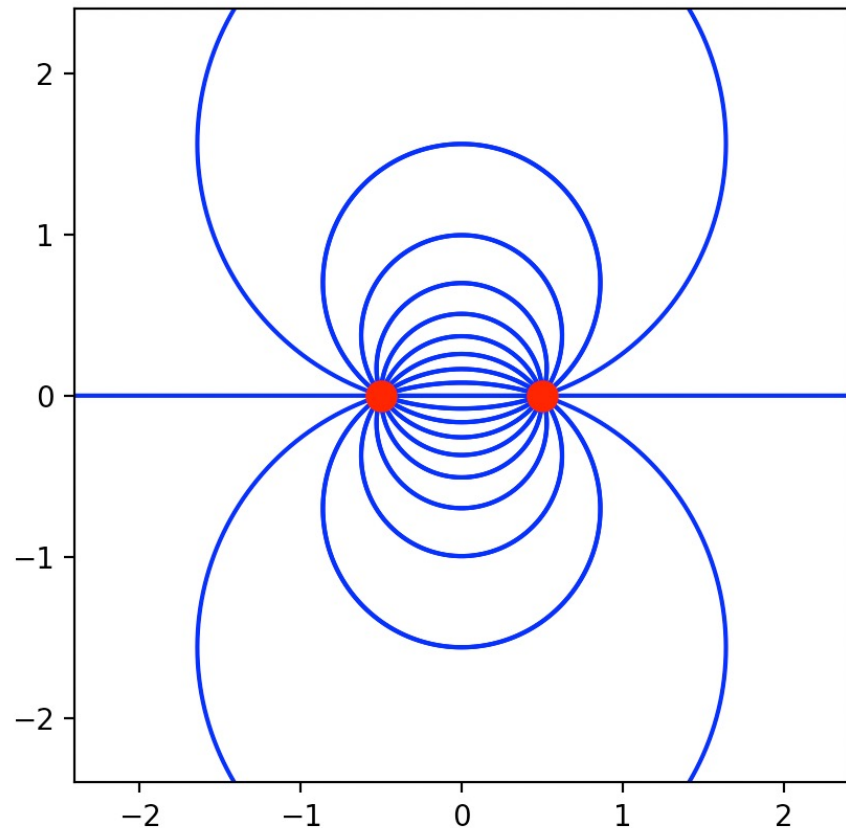
Soumettre le devoir 1 earth

Devoirs python...

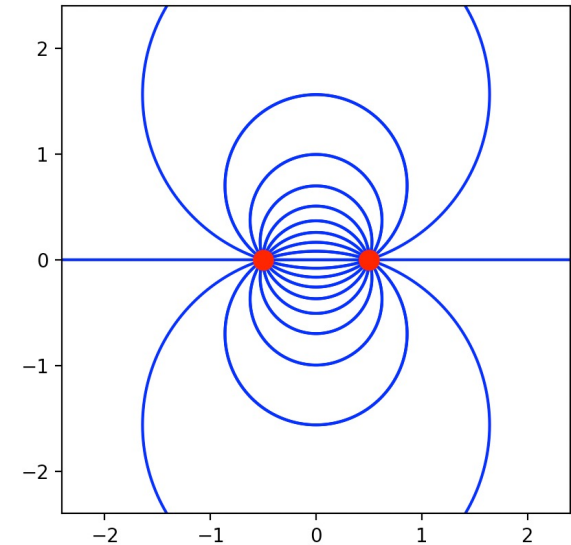
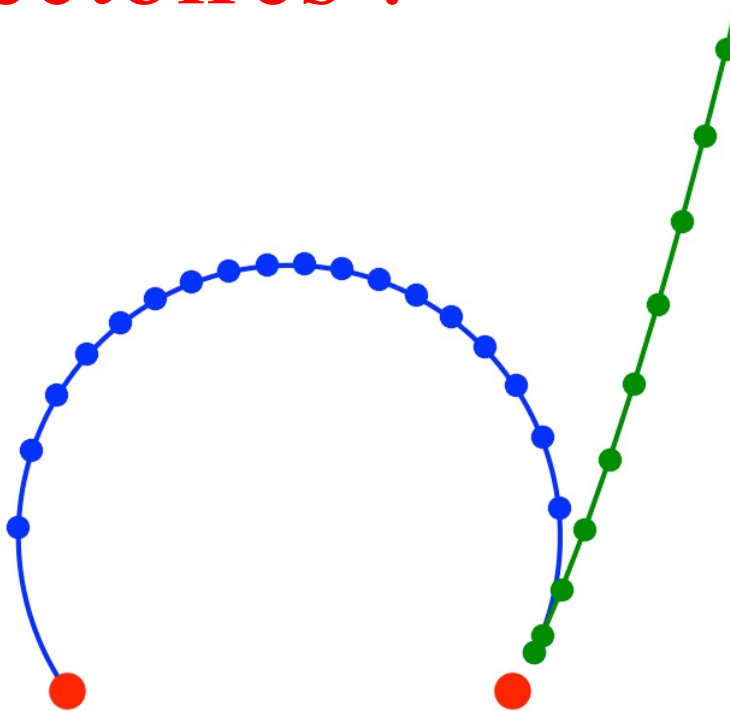
Problème 1 : Earth (30-10-2022)
earthTest.py : script de test
Enoncé du devoir : Earth.pdf
Deadline : **Dimanche 3 décembre 2023 à 23h59**

© 2020 Vincent Legat Contact - Support

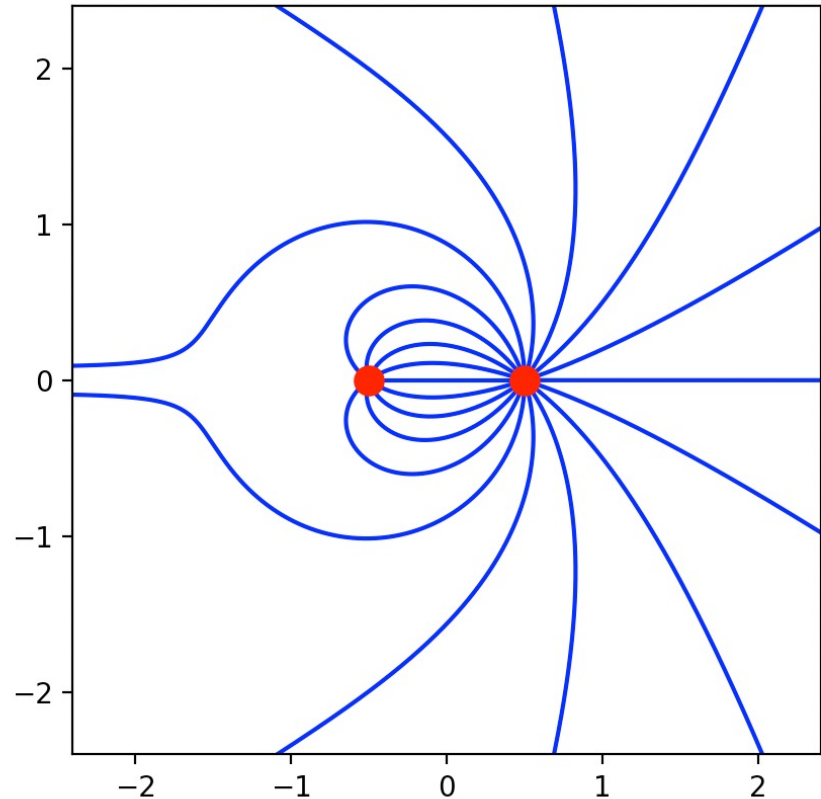
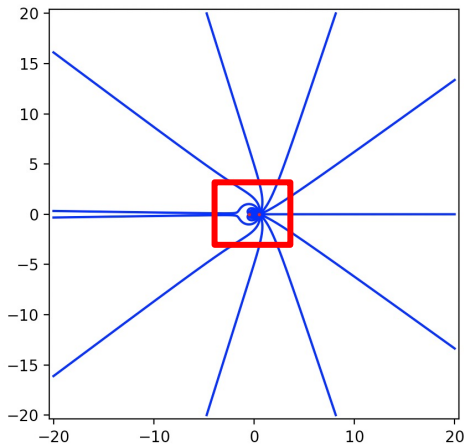
Deux cables chargés perpendiculaires au plan



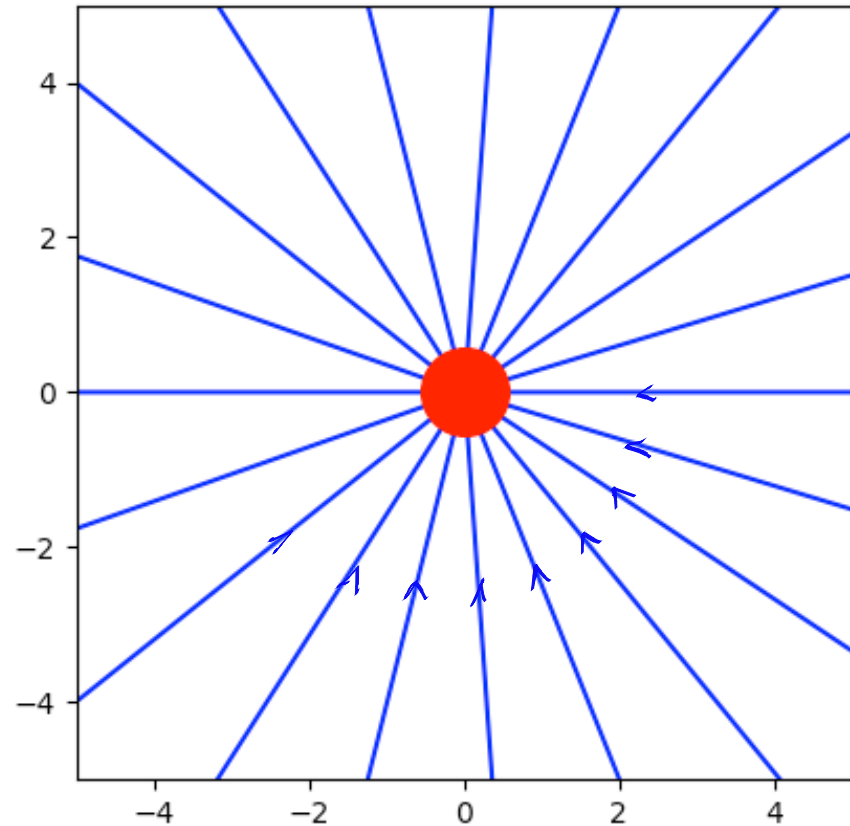
Les lignes du champ
ne sont pas des
trajectoires !



Avec des densités de charges différentes...



Lignes
du champ
gravitationnel
autour d'une étoile !

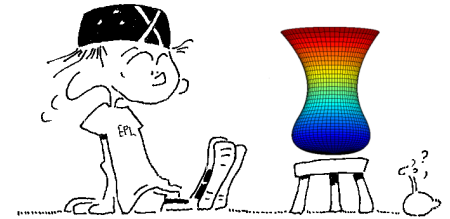


$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \vec{v}(t)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \vec{g}(\vec{x}(t))$$

**Méthode dite
d'Euler explicite !**

**Y a mieux !
On y reviendra plus tard !**



En prenant un Δt suffisamment petit...

$$\frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \vec{v}(t)$$

$$\frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \vec{g}(\vec{x}(t))$$

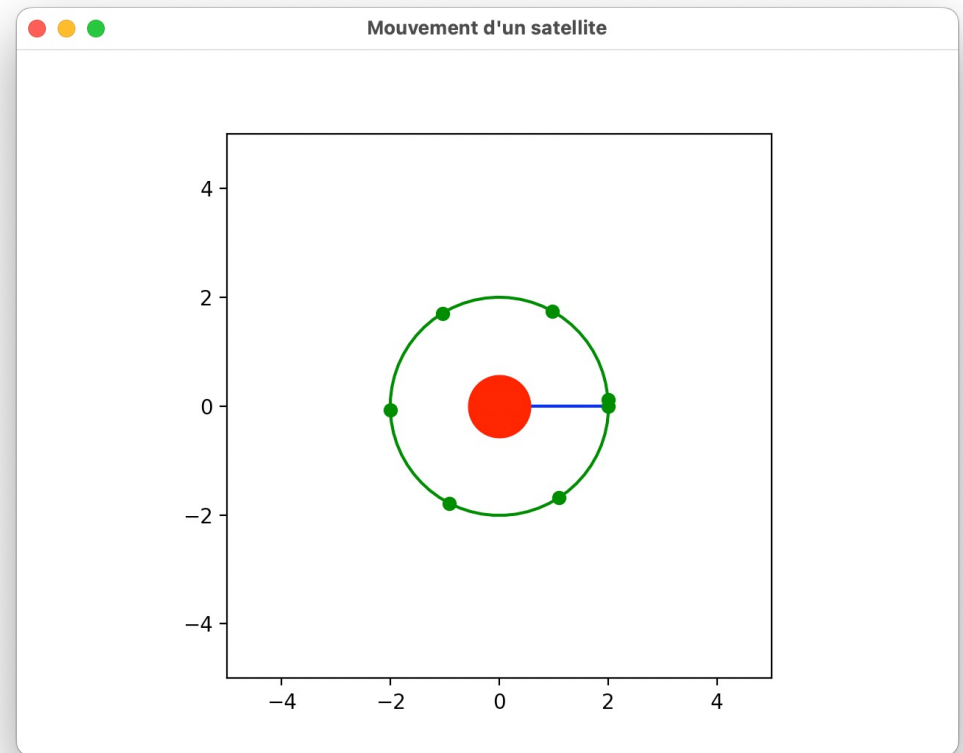
**Il faut une position et une
vitesse initiale pour
entamer le calcul !**

En définissant $\vec{x}_i = \vec{x}(t + i\Delta t)$ et $\vec{v}_i = \vec{v}(t + i\Delta t)$

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \Delta t \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \Delta t \vec{g}(\vec{x}_i)$$

**Une trajectoire
avec python !**



La Terre tourne
autour du Soleil !

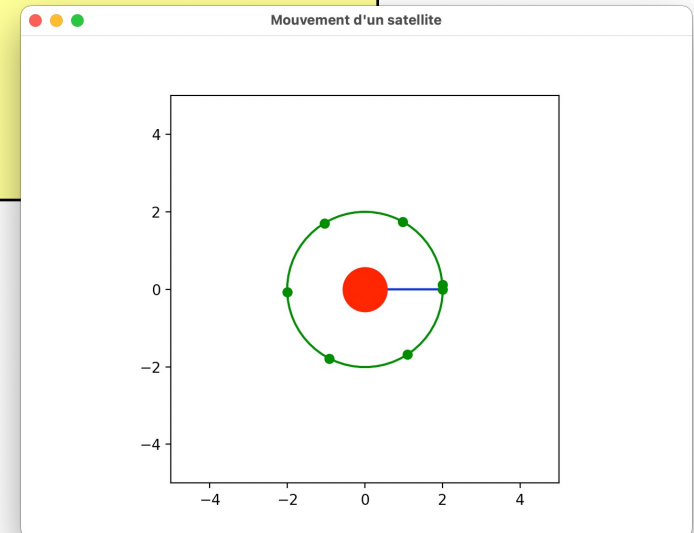


```

def g(x):
    g = zeros(2)
    g[0] = -x[0] / (x[0]*x[0] + x[1]*x[1])** (3/2)
    g[1] = -x[1] / (x[0]*x[0] + x[1]*x[1])** (3/2)
    return g

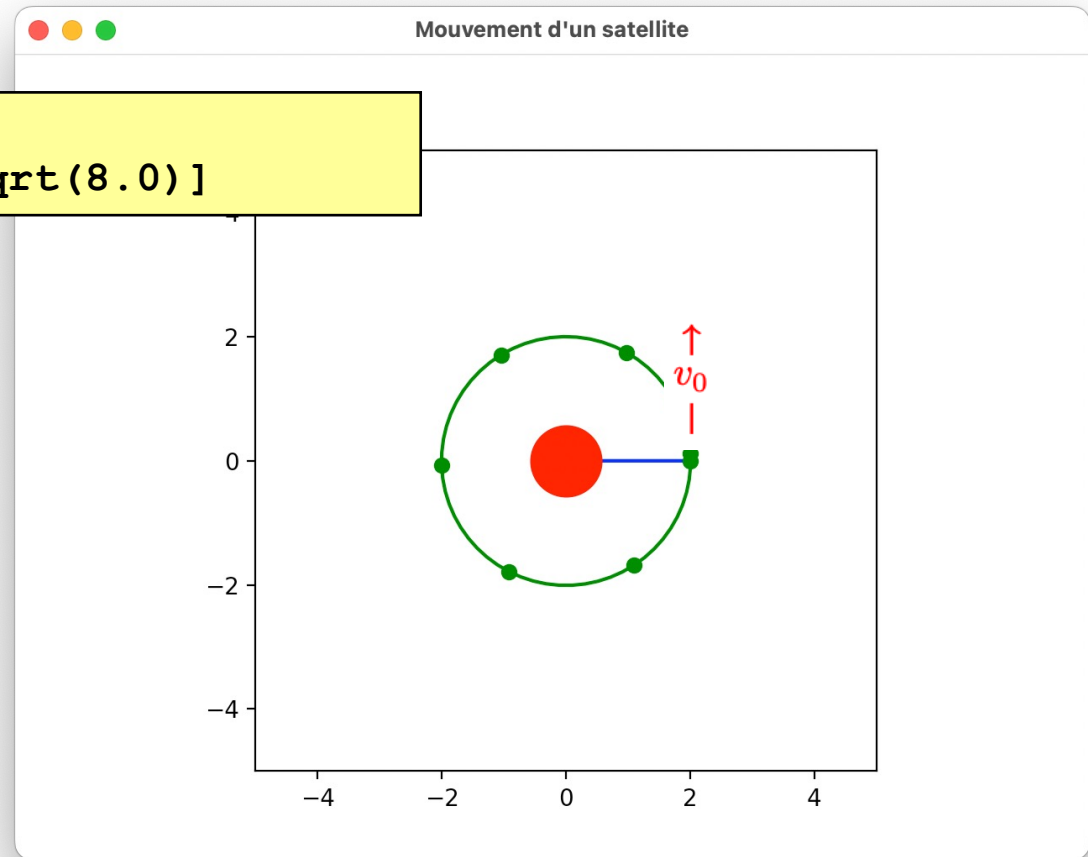
X = zeros((n+1,2)); X[0,:] = [2.0,0.0]
V = zeros((n+1,2)); V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0)]
n = 18001; dt = 10e-4
for i in range(n):
    V[i+1,:] = V[i,:] + dt * g(X[i,:])
    X[i+1,:] = X[i,:] + dt * V[i,:]

```



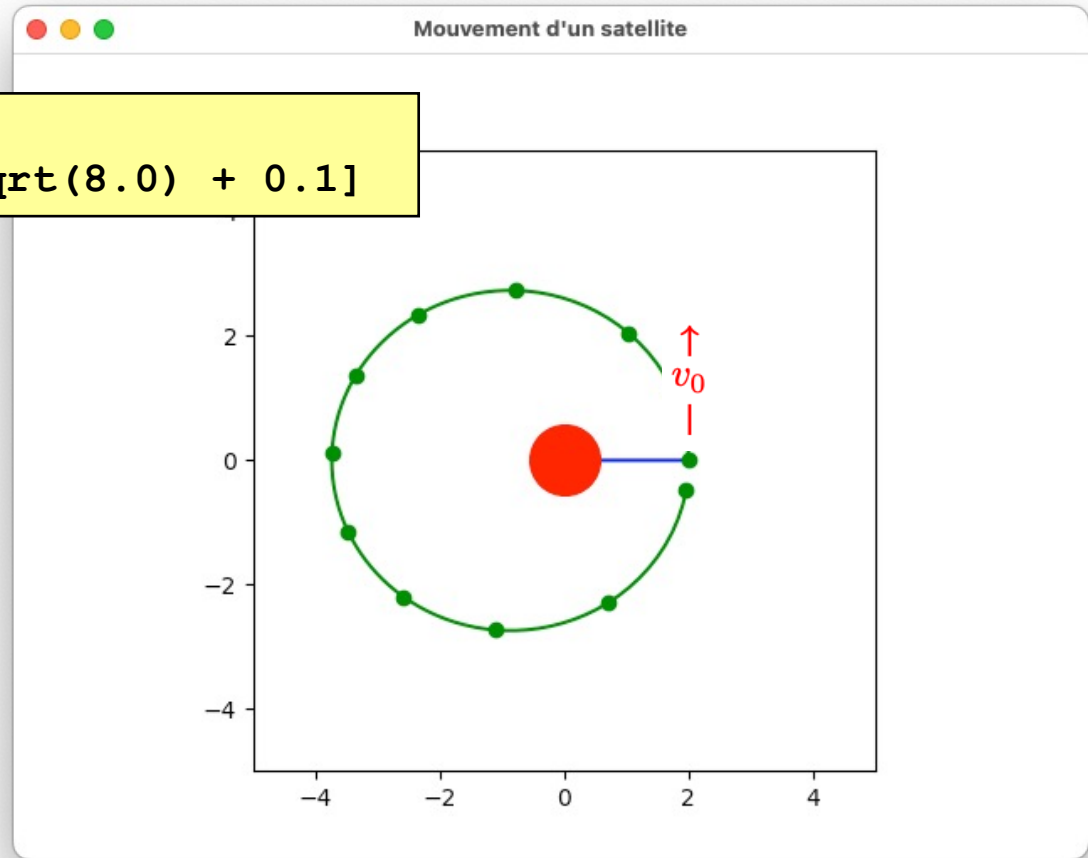
Eh oui !
 Les lignes de champ
 ne sont pas les trajectoires !
 Python : so cool :-)

```
x[0,:] = [2.0,0.0]  
v[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0)]
```



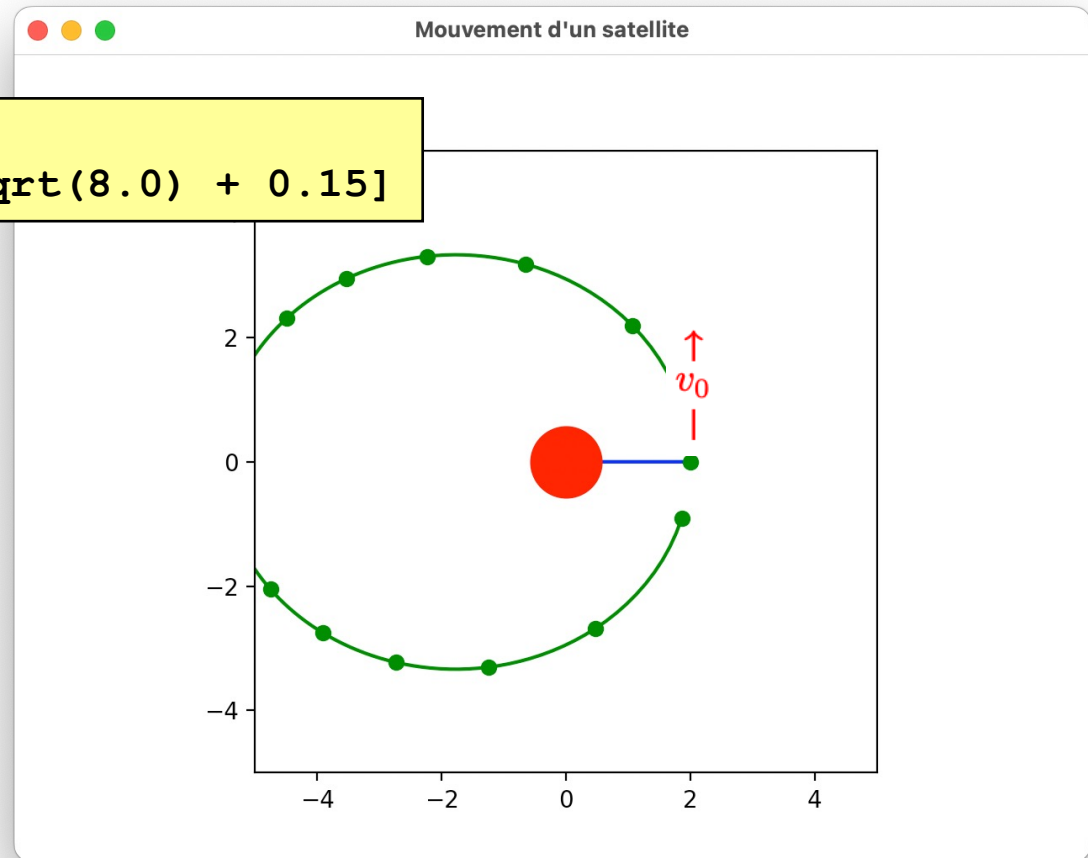
Lâchons
un satellite !

```
x[0,:] = [2.0,0.0]  
v[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) + 0.1]
```



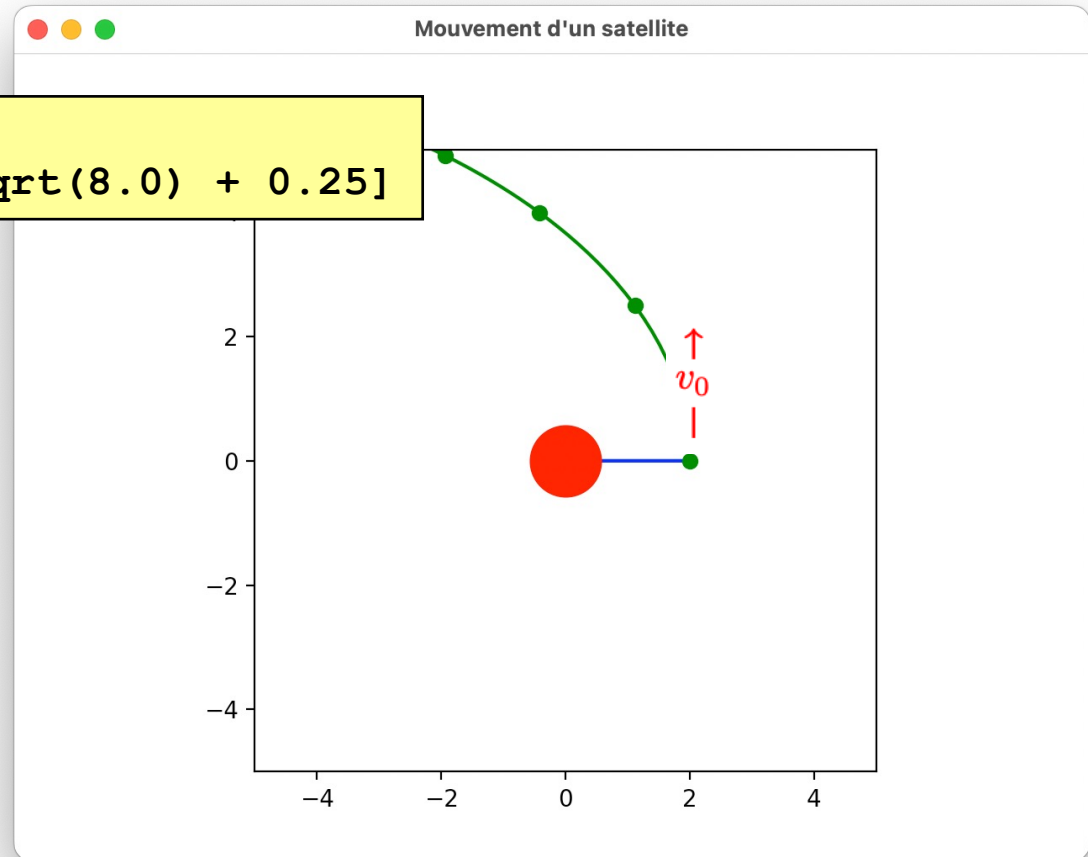
Lâchons
un fifrelin plus vite !

```
x[0,:] = [2.0,0.0]  
v[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) + 0.15]
```



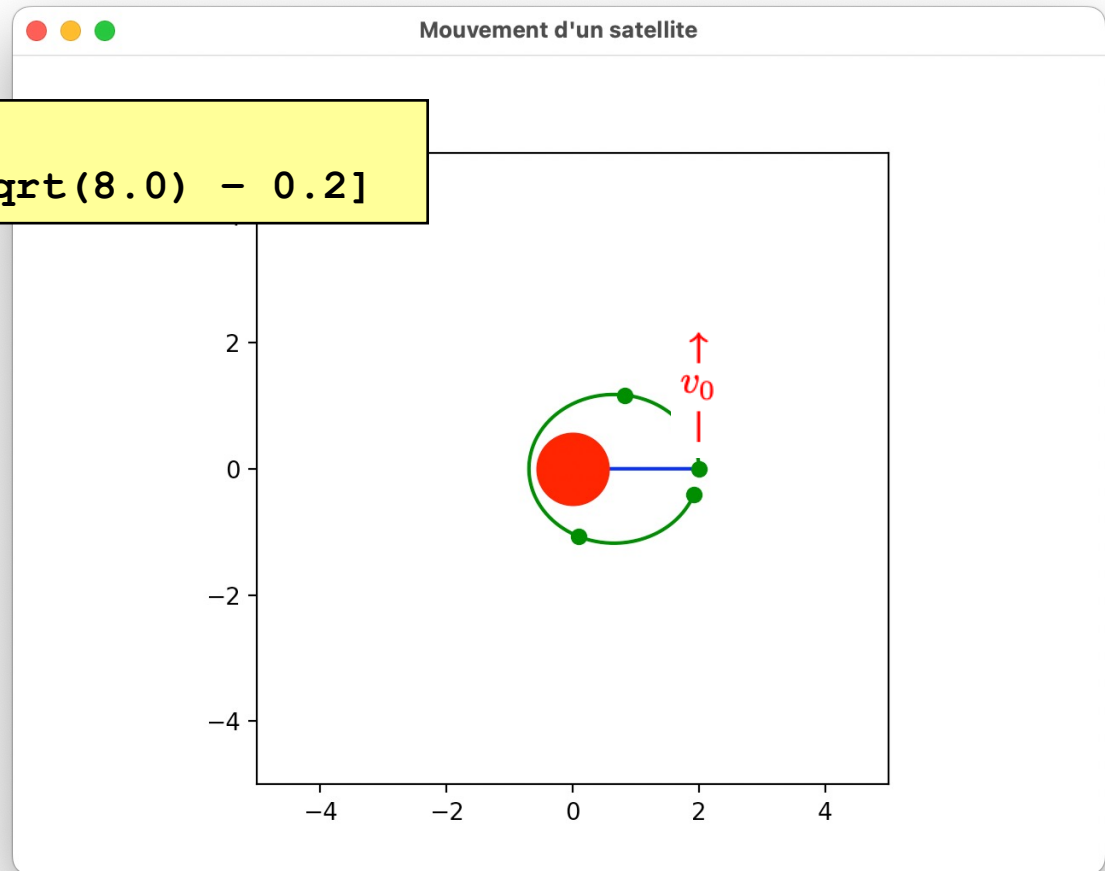
Et encore
un tout petit plus vite !

```
x[0,:] = [2.0,0.0]  
v[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) + 0.25]
```



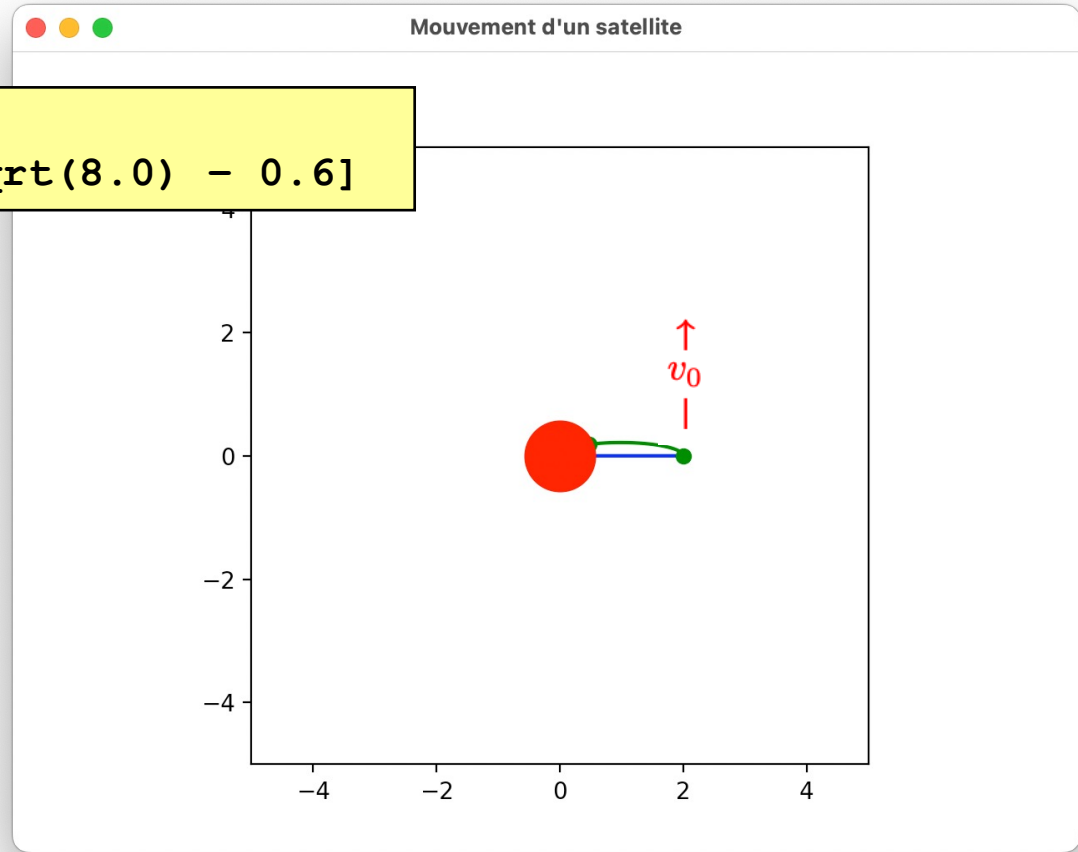
Est-ce qu'il va revenir ?

```
x[0,:] = [2.0,0.0]  
v[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) - 0.2]
```



Et en le lâchant
un fifrelin plus lentement !

```
x[0,:] = [2.0,0.0]  
v[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) - 0.6]
```



Trop lent : le satellite
retombe sur la planète !

Soumettre son devoir !

perso.uclouvain.be/vincent.legat/zouLab/epl1201.php?action=compil

zouLab 1.0.0 : epl1201

EPL1201 News Horaire Documents Mon profil Mon tuteur Hello Fick Deconnexion

News Documents Videos & podcasts Animations interactives !

Moodle Exams et solutions des années précédentes Dans le livre de référence

Installer Python Homeworks

Liste des étudiants Equipe didactique Choisir sa séance et son tuteur :-) Locaux et horaires des exercices Groupes et séances

Soumettre le devoir 1
earth

Exécution et soumission d'un programme sur le serveur...

Deadline : December 03 2023 23:59:59.
Now : November 20 2023 16:50:06.

```
1 # -----  
2 # NE PAS AJOUTER D'AUTRES INSTRUCTION import / from :-)  
3 # UTILISER UNIQUEMENT PYTHON AVEC numpy  
4  
5 import numpy as np  
6  
7 #  
8 # -l- earthData() : paramètres physiques :-)  
9 #  
10 # G : constante universelle de la gravité en [UA^3/kg day^2]
```

Position: Ln 1, Ch 1 Total: Ln 57, Ch 1419

🔥 🔥 🔥 🔥 ❤️ ❤️ ❤️ ❤️ ❤️

Soumettre le programme Voir le diagnostic

Valider son programme

© 2020 Vincent Legat Contact - Support

Regarder le diagnostic !

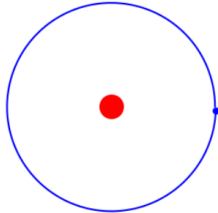
perso.uclouvain.be/vincent.legat/zouLab/epl1201.php?action=comp

zouLab 1.0.0 : epl1201

EPL1201 News Horaire Documents Mon profil Mon tuteur Hello Fick Deconnexion

Soumettre le devoir 1
earth

Exécution et soumission d'un programme sur le serveur...
Deadline : December 03 2023 23:59:59.
Now : November 20 2023 16:49:09.



Ton orbite :-)

```
=== Using python version 3.8.10
=== Using numpy version 1.17.4
=== Using matplotlib version 3.1.2

=== Computing the rotation of the Earth
= Using n = 10000
=== Calling G,M,m,v,T = earthData()
=== Gravitational constant = 1.49e-34 [UA^3/kg day^2]
=== Mass of the Sun        = 1.99e+30 [kg]
=== Mass of the Earth      = 5.97e+24 [kg]
```

© 2020 Vincent Legat Contact - Support

Valider son devoir !

perso.uclouvain.be/vincent.legat/zouLab/epl1201.php?action=compil

zouLab 1.0.0 : epl1201

EPL1201 News Horaire Documents Mon profil Mon tuteur Hello Fick Deconnexion

News Documents Videos & podcasts Animations interactives

Moodle Exams et solutions des années précédentes Dans le livre de référence

Installer Python Homeworks

Liste des étudiants Equipe didactique Choisir sa séance et son tuteur Locaux et horaires des exercices Groupes et séances

Soumettre le devoir 1 *earth*

Exécution et soumission d'un programme sur le serveur...

Deadline : December 03 2023 23:59:59.
Now : November 20 2023 16:50:06.

```
1 # -----  
2 # NE PAS AJOUTER D'AUTRES INSTRUCTION import / from :-)  
3 # UTILISER UNIQUEMENT PYTHON AVEC numpy  
4  
5 import numpy as np  
6  
7 #  
8 # -l- earthData() : paramètres physiques :-)  
9 #  
10 # G : constante universelle de la gravité en [UA^3/kg day^2]
```

Position: Ln 1, Ch 1 Total: Ln 57, Ch 1419

🔥 🔥 🔥 🔥 🍀 🍀 🍀 🍀 🍀 🍀

Soumettre le programme Voir le diagnostic

Valider son programme

© 2020 Vincent Legat Contact - Support