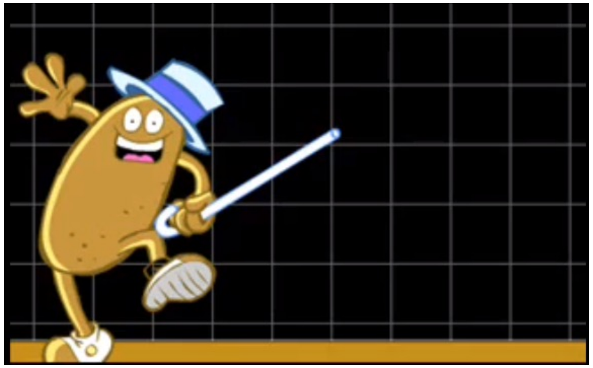
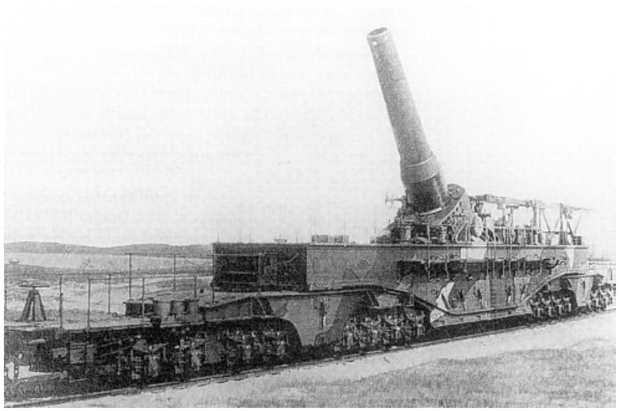
Quelle est la différence entre un point et une patate ?



Lorsqu'une patate fait une rotation, cela se voit :-)

La mécanique d'un point...



$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

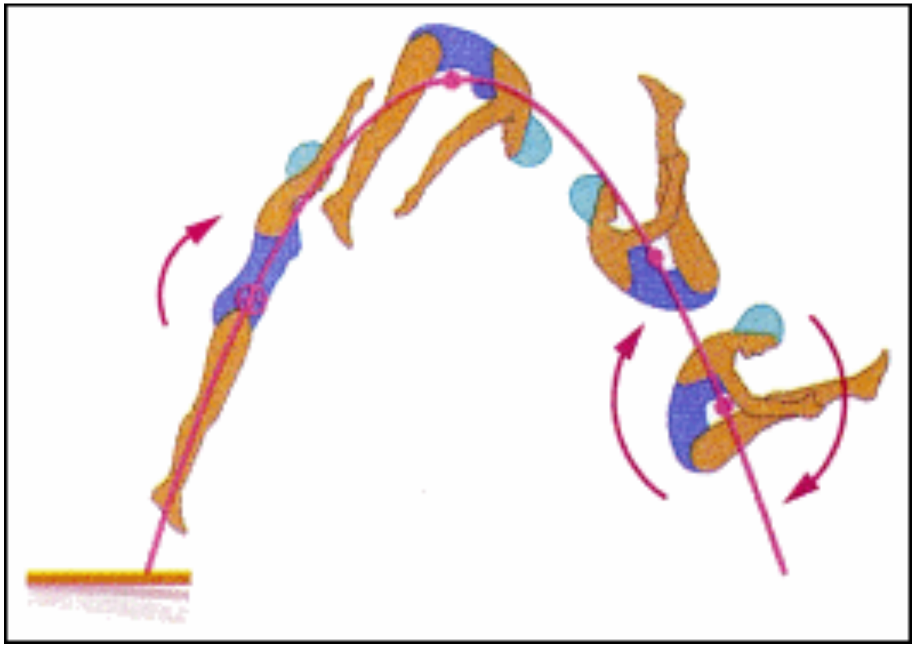
Les deux équations fondamentales !

Bilan de la quantité de mouvement
Bilan de l'énergie cinétique

Dans beaucoup d'applications, on peut se restreindre à l'analyse du mouvement du centre de masse et réduire le corps à un simple point où on a concentré toute la masse !

Ce que nous avons fait jusqu'à présent !
Mais, un skieur, une auto, un bloc, ce n'est pas un point !

La trajectoire de son centre de masse est parabolique, comme notre obus !
Mais, son mouvement est nettement plus complexe avec des vrilles et des pirouettes !



mais un corps,
ce n’est pas un point !

La mécanique d'un corps...

Les trois équations fondamentales !

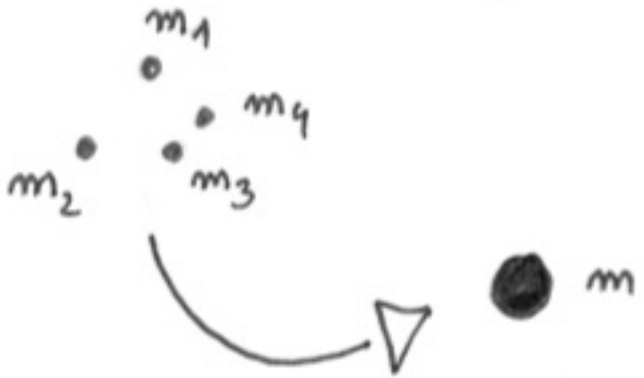
Bilan de la quantité de mouvement
Bilan de l'énergie cinétique
Bilan du moment cinétique

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\ v^2 + \frac{1}{2}I\ \omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) = \sum M_i$$

C’est quoi un point ?



On remplace une série de particules,
par un grosse particule virtuelle
de masse équivalente !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

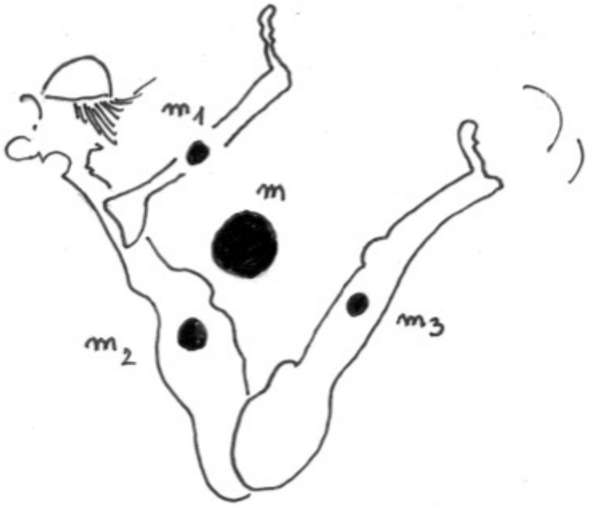
C'est quoi un point ?

Tant que le bloc ne tourne pas,
la mécanique du point est suffisante
pour résoudre pas mal de problèmes !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

C'est quoi un corps ?

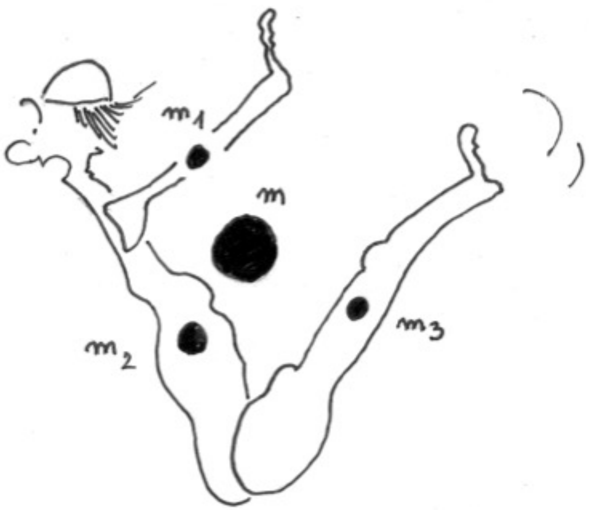


Mais lorsque notre athlète fait des pirouettes, il faut avoir un modèle mécanique plus compliqué !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

Le centre de masse...



La position d'une particule plus grande doit compter davantage !

Tronc-tête : 58% de la masse corporelle
Jambes : 32% de la masse corporelle
Bras : 10 % de la masse corporelle

$$m = \sum m_i$$

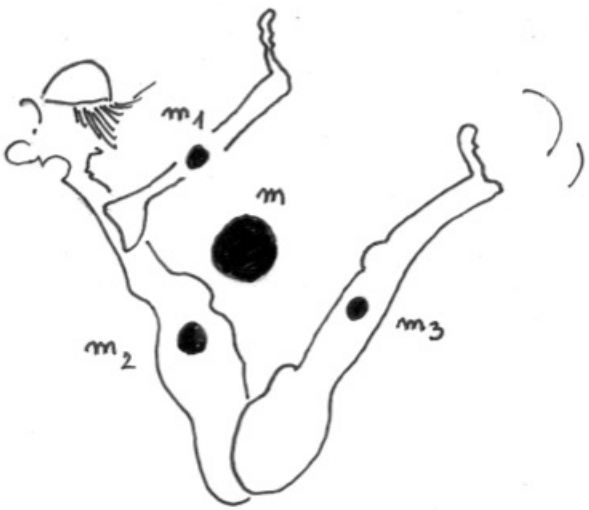
$$m\,\vec{\mathbf{x}} = \sum \left(m_i\, \vec{\mathbf{x}}_i \right)$$

... est la position moyenne pondérée des positions

Calcul
du centre de masse

La vitesse du centre de masse...

La position d'une particule plus grande doit compter davantage !



$$m = \sum m_i$$

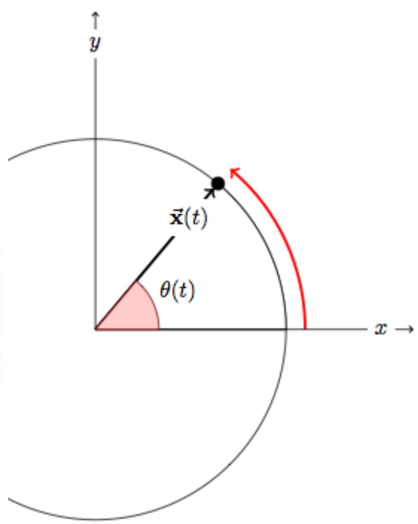
$$m\,\vec{\mathbf{x}} = \sum \left(m_i\,\vec{\mathbf{x}}_i\right)$$

$$m\,\vec{\mathbf{v}} = \sum \left(m_i\,\vec{\mathbf{v}}_i\right)$$

... est aussi obtenue comme la moyenne pondérée des vitesses

L’énergie cinétique...

Le centre de masse ne bouge pas !
Mais, l’énergie cinétique n’est pas nulle !
Et ici, la symétrie est rompue !



$$
\begin{aligned}
m &= \sum m_i \\
m\ \vec{\mathbf{x}} &= \sum \left(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i \right) \\
m\ \vec{\mathbf{v}} &= \sum \left(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i \right) \\
\tfrac{1}{2}\ m\ v^2 &\neq \sum \left(\tfrac{1}{2}\ m_i\ v_i^2 \right)
\end{aligned}
$$

... est aussi obtenue comme la moyenne pondérée des énergies

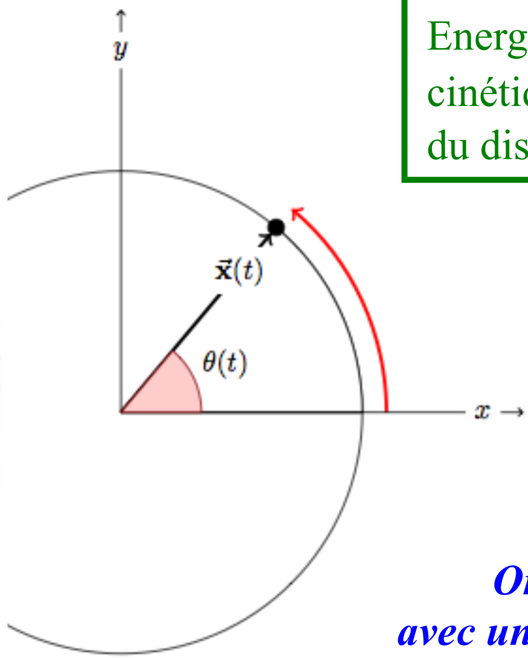
Calcul de l'énergie cinétique de rotation

Et l'énergie cinétique de rotation d'un disque ?

$$\boxed{\sum \tfrac{1}{2} m_i\, v_i^2} = \tfrac{1}{2} \underbrace{\left(\sum m_i\, r_i^2\right)}_{I} \omega^2$$

Energie cinétique du disque

Moment d'inertie du corps



Et le centre de masse ne bouge pas !

On peut donc avoir une énergie cinétique avec un centre de masse totalement immobile !

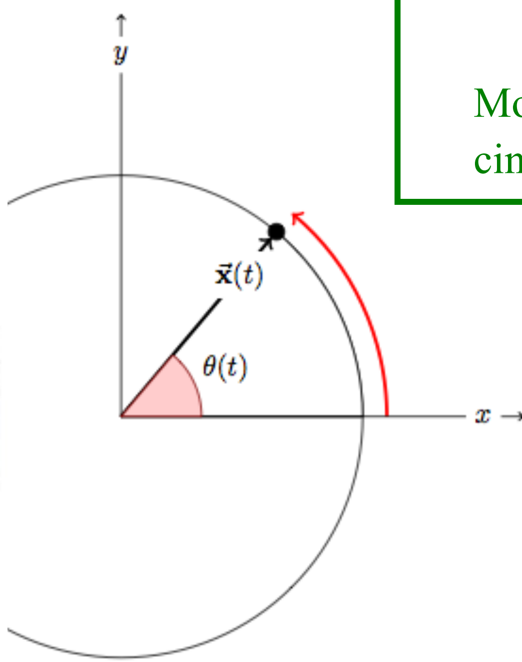
Calcul du moment cinétique

Et le moment cinétique d’un disque ?

$$\sum r_i\, m_i\, v_i = \underbrace{\left(\sum m_i\, r_i^2\right)}_{I} \omega$$

Moment cinétique

Moment d’inertie du corps



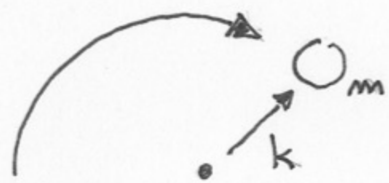
Et le centre de masse ne bouge pas !

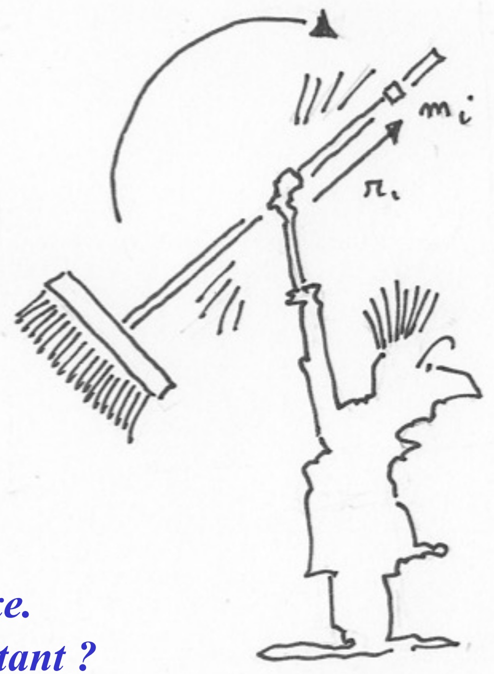
Pas de quantité de mouvement !
Mais un moment cinétique non nul car le disque tourne !

Qu'est ce qui influence le moment d'inertie ?

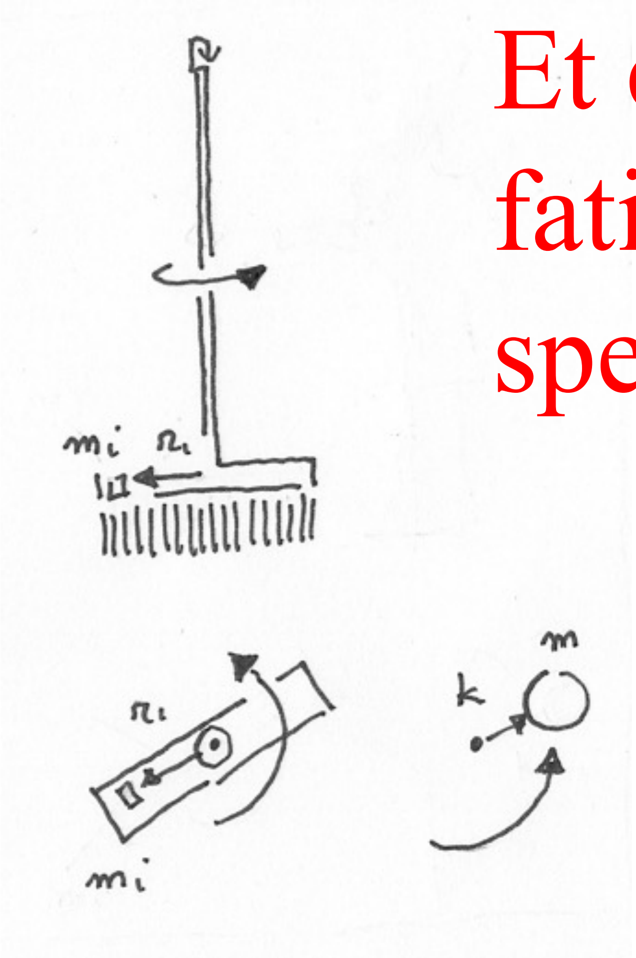
Le moment d'inertie dépend de :

- **la masse du balai**
- **la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation**





On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?



Et ceci est moins fatiguant et moins spectaculaire !

On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?

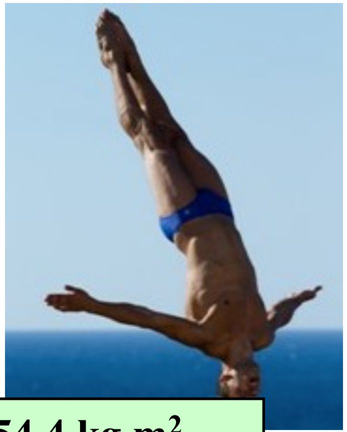
Moment d'inertie du plongeur

Le moment d'inertie dépend de :

- la **masse** du plongeur
- la **distribution de la masse** par rapport à l'axe de rotation

I = 12.6 kg m²

I = 23.8 kg m²

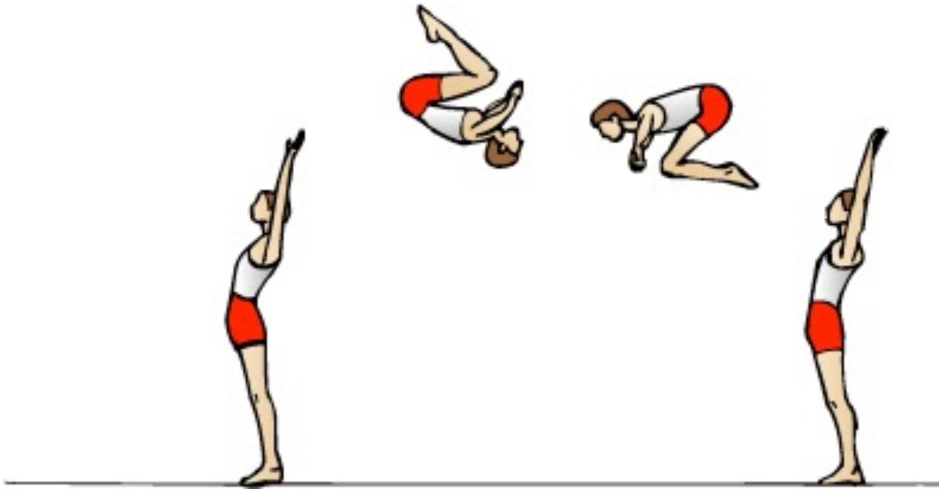


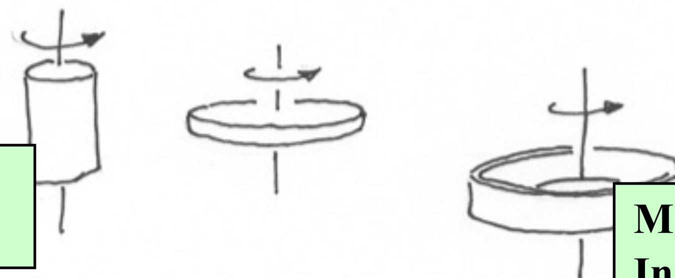
I = 54.4 kg m²

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i \, r_i^2$$

Pourquoi est-ce que
la gymnaste se recroqueville
pour faire la pirouette ?





Masse identique
Inertie minimale

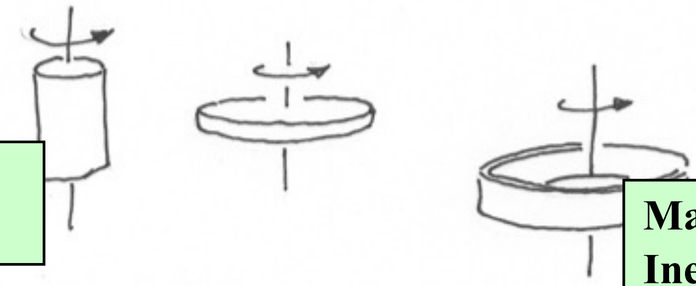
Masse identique
Inertie maximale

Cylindres, disques, anneaux…
Veaux, vaches, cochons !

Une bibliothèque de moments d'inertie

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i \, r_i^2$$



Masse identique
Inertie minimale

Masse identique
Inertie maximale

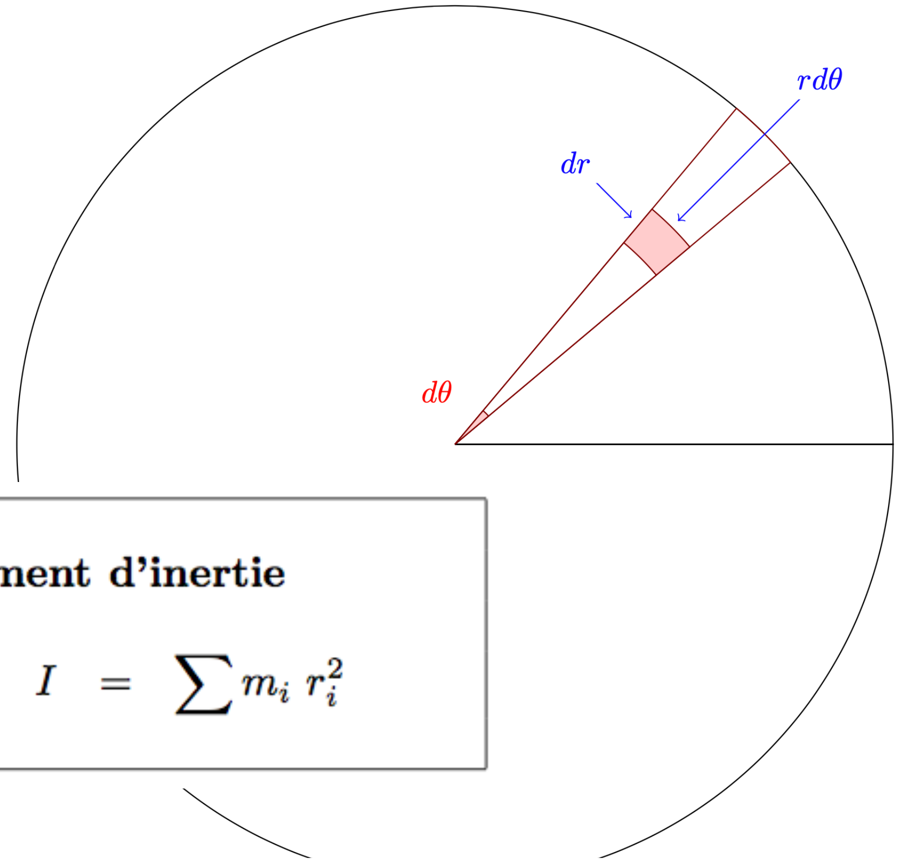
Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\,R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\,\dfrac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\,\dfrac{L^2}{12}$

Intégration des moments d'inertie



Moment d'inertie

$$I \;=\; \sum m_i \, r_i^2$$

$$m \;=\; \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \; dr \; r d\theta \; dz \;=\; 2\pi L\rho \int_0^R r dr \;=\; 2\pi L\rho \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \;=\; \rho\pi L R^2$$

$$I \;=\; \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \, r^2 \; dr \; r d\theta \; dz \;=\; 2\pi L\rho \int_0^R r^3 dr \;=\; 2\pi L\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \;=\; \frac{\rho\pi L R^4}{2} \;=\; \frac{m L R^2}{2}$$

Théorème de Huygens
Moment d'inertie quelconque

$$I_h = \sum m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{h}}\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{h}}\right)$$

$$= \underbrace{\sum m_i\, \vec{\mathbf{r}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}}_i}_{=I} + \underbrace{\sum m_i\, \vec{\mathbf{h}} \cdot \vec{\mathbf{h}}}_{=mh^2} + 2 \left(\cancel{\underbrace{\sum m_i\, \vec{\mathbf{r}}_i}_{=0}}\right) \cdot \vec{\mathbf{h}}$$

En vertu de la définition du centre de masse !

Une conséquence immédiate de ce théorème est qu'il est toujours moins coûteux (en énergie) de faire tourner un corps autour d'un axe passant par le centre de masse.

Théorème des axes parallèles

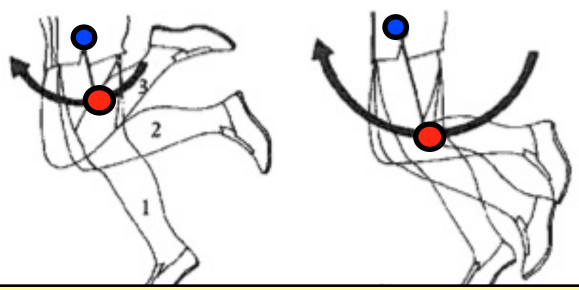
$$I_h = m\, h^2 + I$$

Théorème de Huygens ou des axes parallèles...

Moment d'inertie de la jambe par rapport à la hanche

Lors d'un sprint, le coureur va chercher à ramener ses jambes le plus rapidement possible en avant.

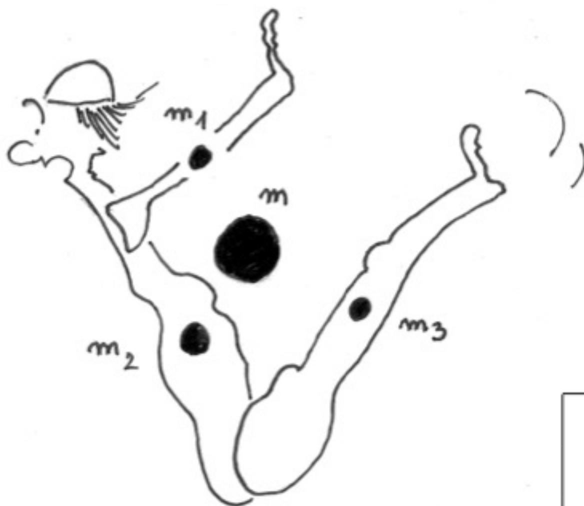
Il va attirer le talon vers le haut durant la phase d'oscillation.
Le moment d'inertie par rapport à la hanche est diminué.



Pour les courses de fond, le coureur va dépenser moins d'énergie à relever le talon.

Le moment d'inertie par rapport à la hanche reste plus grand.
La vitesse est évidemment aussi moins rapide !

En résumé :



Ensemble de particules : un corps !

$$
\begin{aligned}
m &= \sum m_i \\
m\,\vec{\mathbf{x}}(t) &= \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i(t) \Big) \\
m\,\vec{\mathbf{v}}(t) &= \sum \Big(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i(t) \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}} \right) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \\
\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\ m\ \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \right) &= \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \\
\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}} \times m\ \vec{\mathbf{v}} \right) &= \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}} \right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2} m\ v^2 + \tfrac{1}{2} I\ \omega^2 \right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(I\ \omega \right) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}} & = & \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}} \\
 & \uparrow & \\
\dfrac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{F}} \\
 & \downarrow & \\
\vec{\mathbf{r}}\times\dfrac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}
\end{array}
$$

Deux principes corollaires…

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}} \\
 & \uparrow & \\
\dfrac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{F}} \\
 & \downarrow & \\
\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}}\times m\vec{\mathbf{v}}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}
\end{array}
$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\begin{array}{l}\text{Forces}\\ \sum \vec{\mathbf{F}}\end{array}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\,dt$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[m\,\vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\,\vec{\mathbf{v}}\right]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\,(t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\begin{array}{l}\sum \vec{\mathbf{F}}\,\Delta t\\ \text{Impulsions}\end{array}}$$

Bilan de la quantité de mouvement

Puissance des forces

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}} \;=\; \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) \;=\; \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right)dt \;=\; \sum\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\,dt \;=\; \sum\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\,dt = \sum\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_b - \left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_a \;=\; \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot(\vec{\mathbf{x}}_b-\vec{\mathbf{x}}_a)$$

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) \;=\; \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}$$

Travail des forces

Bilan d'énergie cinétique

$$\vec{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\text{Moments des forces} \quad \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right)\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\,dt$$

En supposant que les moments sont constants.

$$\left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_a = \sum (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\;(t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\sum (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\;\Delta t \quad \text{Impulsions angulaires}}$$

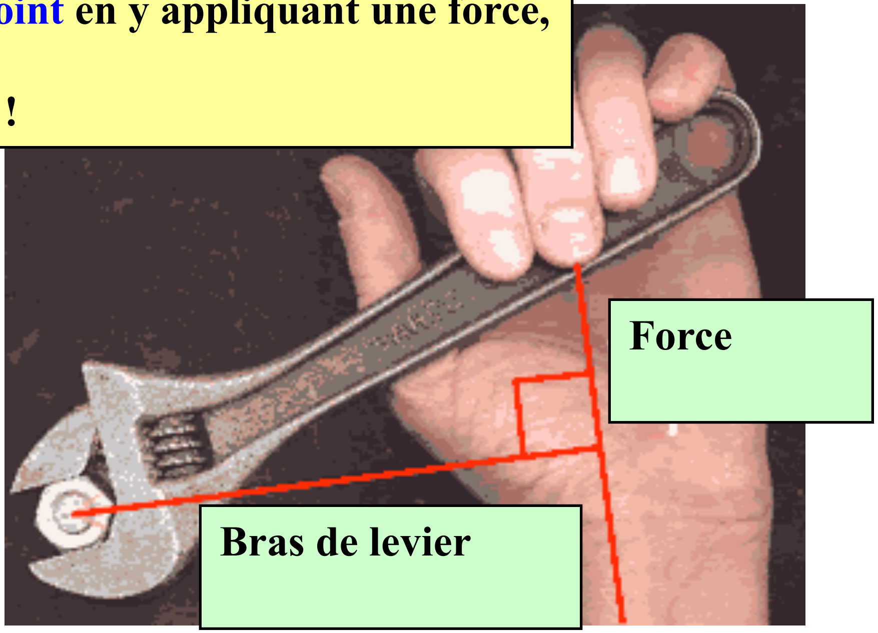
Bilan de moment cinétique

Forces
Moments
C'est quoi tout cela ?

Le mouvement de chaque particule de la clé à molette est complexe
Mais, la vitesse du centre de masse est nulle…
On n'exercerait donc aucune force sur le centre de gravité ?

Ce qui fait tourner la clé, c’est le moment !

Supposons que l’on fixe une barre en un point et
que l’on souhaite la faire tourner autour de ce point en y appliquant une force,
l’accélération angulaire sera proportionnelle
au moment de cette force par rapport à ce point !



$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{bmatrix}$$

$$C = AB\sin(\theta)$$

Cross Product

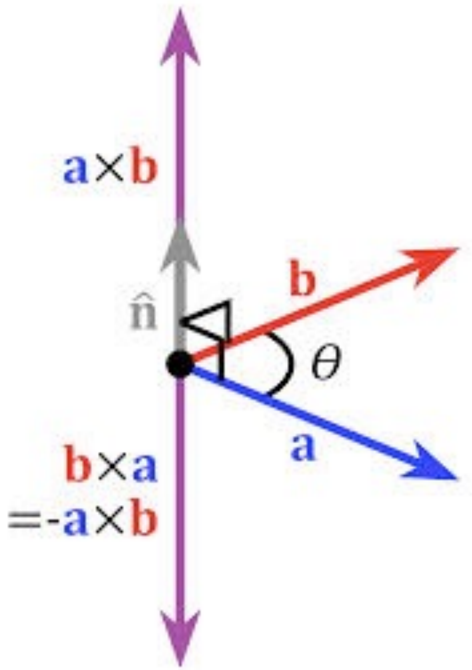
$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

Produit vectoriel de vecteurs

Attention ! $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$

Le produit vectoriel n'est pas commutatif !

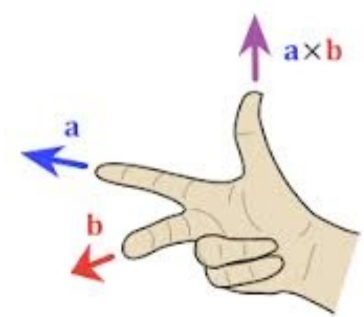


$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{bmatrix}$$

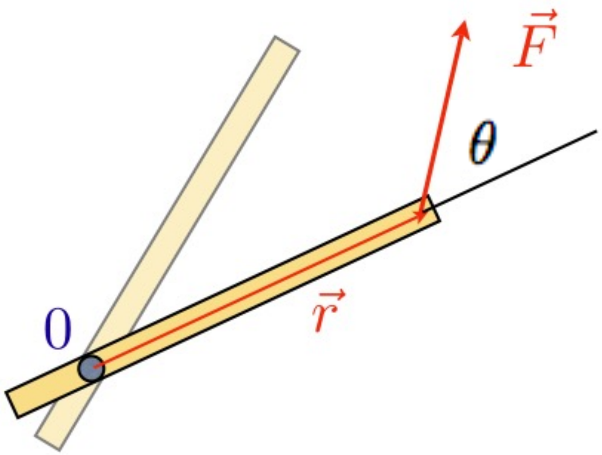
$$C = AB\sin(\theta)$$

Cross Product

Produit vectoriel de vecteurs



Et c'est quoi le moment d'une force par rapport à un point ?



Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\, r_\perp = F_\perp\, r = F r \sin(\theta)$$

Direction du moment = axe de rotation
Norme de moment = vitesse de rotation
Signe du moment = sens de la rotation suivant la fameuse règle de la main droite !

Les 3 manières
de calculer
le moment d'une force !

Moments

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

Forces

Bilan de la quantité de mouvement

La cause : la force !

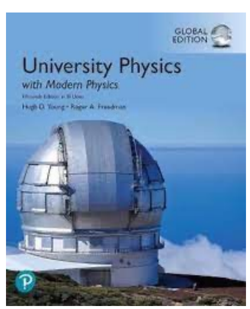
Résistance au mouvement = masse

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)} = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}_i}$$

La conséquence : l'accélération !

Quelle est la voiture qui va accélérer le plus vite pour la même force motrice ?

Linear Momentum



La cause :
le moment de force !

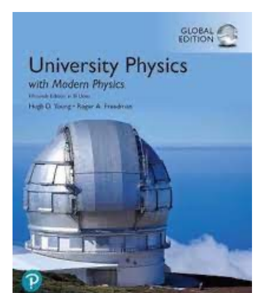
Résistance à la rotation
= moment d'inertie

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right)} = \boxed{\sum M_i}$$

La conséquence :
l'accélération angulaire !

Bilan
du moment
cinétique

Que fait la danseuse
pour tourner plus vite
sur elle-même ?



Angular
Momentum

- La masse mesure la résistance d'un corps à une accélération causée par une force.
- Le moment d'inertie mesure la résistance d'un corps à une accélération angulaire causée par un moment de force.

$$\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) = \sum M_i$$

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

Equilibre de rotation

$$\frac{d}{dt}\cancel{\left(I\,\omega\right)} = \sum M_i$$

$$\frac{d}{dt}\cancel{\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)} = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

Equilibre de translation

Etudions d’abord les forces et les moments de corps au repos !

Concept d’ équilibre statique

Equilibre de rotation

$$0 = \sum M_i$$

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

Lorsque le corps ne bouge pas,
son accélération angulaire est nulle
pour n'importe quel point !

Dans ce cas, on peut donc calculer
les moments de force par rapport
à n'importe quel point alors !

Equilibre de translation

Quelles sont
les forces exercées
par les deux gars ?

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

Deux équations !
Deux inconnues !

Quelle force as-tu dans le biceps ?

On cherche la force dans l'articulation et dans le muscle du biceps !

Choisir astucieusement le point par rapport on calcule les moments peut fortement simplifier les calculs :-)

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

Trois équations !
Trois inconnues !

A quelle vitesse la voiture fera-t-elle un tonneau ?

Equilibre statique

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
0 &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Trois équations !
Trois inconnues !

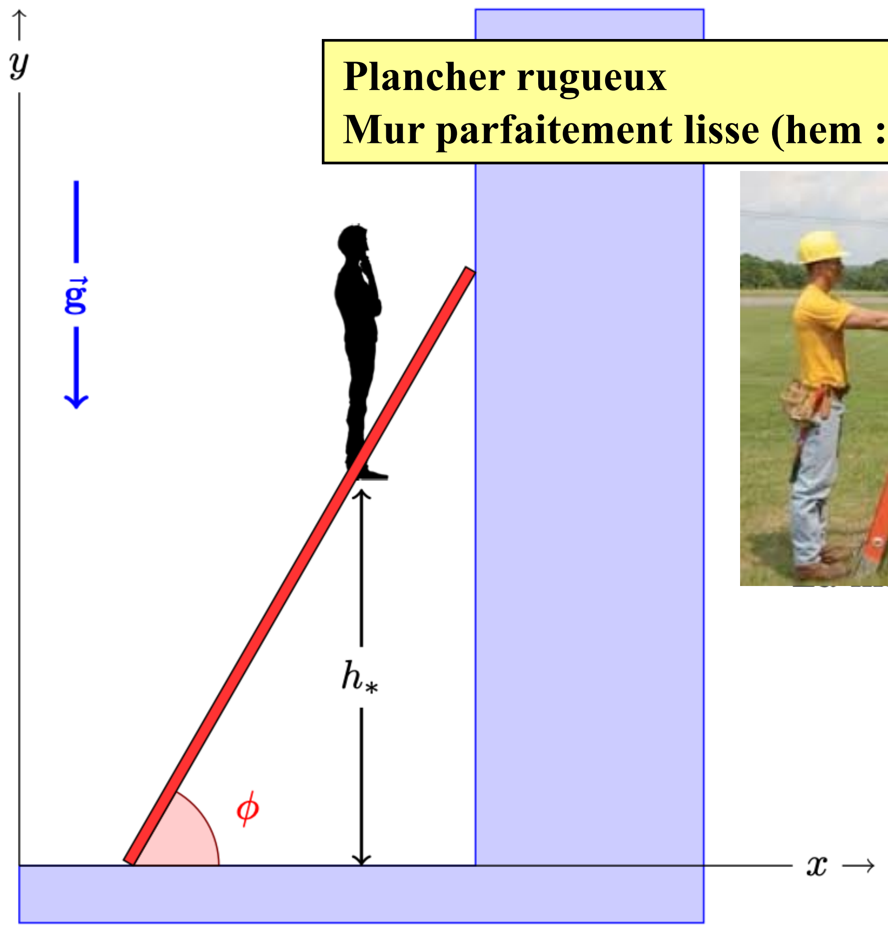
Trois équations !
Trois inconnues !

Calcul de la vitesse critique !

C'est indépendant du coefficient de frottement !

Concevoir une voiture
qui ne fera pas trop vite un tonneau !

Est-ce que l'échelle va glisser ?



Plancher rugueux
Mur parfaitement lisse (hem :-)

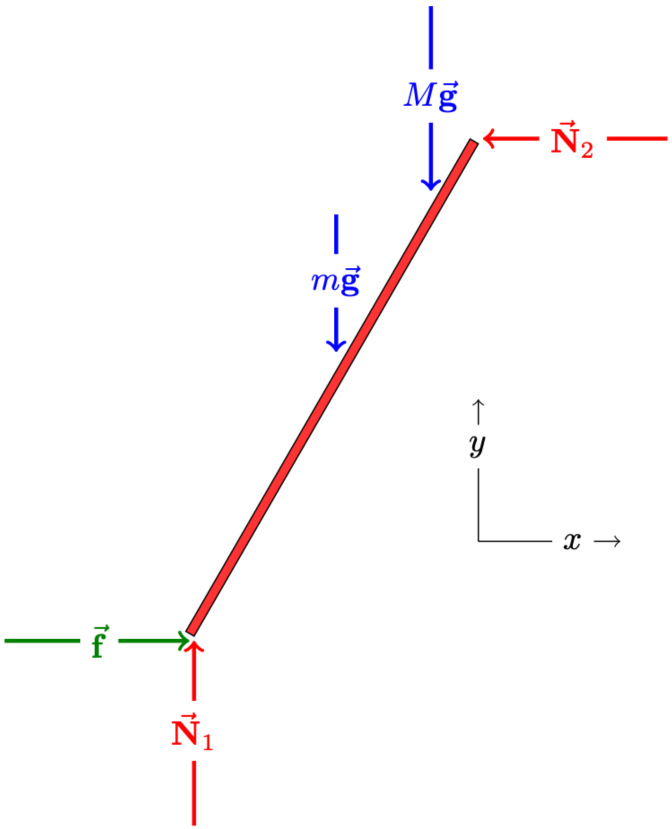
Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

Par contre, pour une échelle totalement rigide, le problème est mal posé si il y a du frottement sur le sol et sur le mur !

Ce n'est pas toujours aussi simple qu'il n'y paraît !



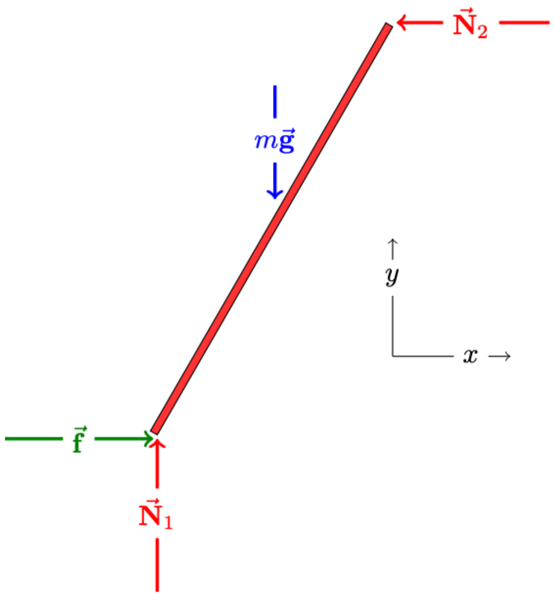
- *Poids de l'échelle :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- *Poids de l'ouvrier :* $M\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ (m+M)g \end{bmatrix}$
- *Force de frottement au sol :* $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(m+M)g \\ 0 \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du mur :* $\vec{\mathbf{N}}_2 = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix}$

Trois équations !
Trois inconnues !

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_s mg - N_2 \\ 0 &= N_2 L \sin(\phi) - mg\frac{L}{2}\cos(\phi) \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\mu_* mgL \underbrace{\sin(\phi)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = mg\frac{L}{2}\underbrace{\cos(\phi)}_{\frac{1}{2}}$$

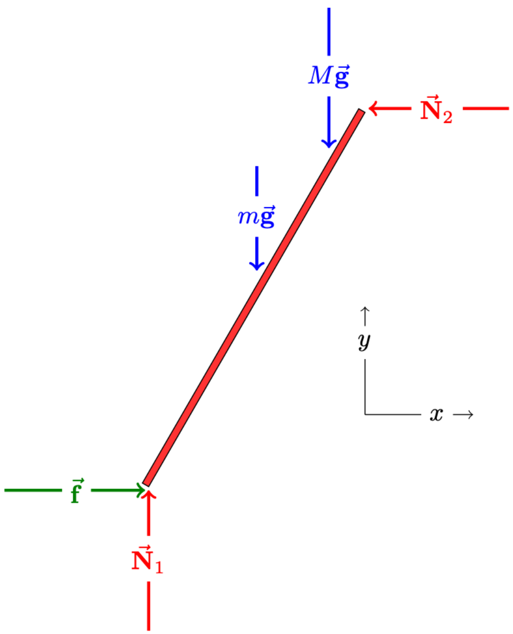


Echelle = 10 kg et 3 mètres
Angle de 60 degrés
Coefficient de frottement statique 0.5
Coefficient de frottement cinétique 0.1
Accélération de la gravité = 10 m/s2

$$\boxed{\mu_* = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.29 < \mu_s}$$

Tout d'abord, est-ce que l'échelle sans l'ouvrier va glisser ?

Ouvrier avec sacoche = 120 kg
Echelle = 10 kg et 3 mètres
Angle de 60 degrés
Coefficient de frottement statique 0.5
Accélération de la gravité = 10 m/s2



$$\mu_s(m+M)gL\sin(\phi) \quad = \quad mg\frac{L}{2}\cos(\phi) + Mg\frac{h_*}{\sin(\phi)}\cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$L\;\frac{\mu_s(m+M)6 - m\sqrt{3}}{4M} \quad = \quad h_*$$

$$\boxed{h_* \quad = \quad \frac{390 - 10\sqrt{3}}{160} \quad = \quad 2.33 \text{ m}}$$

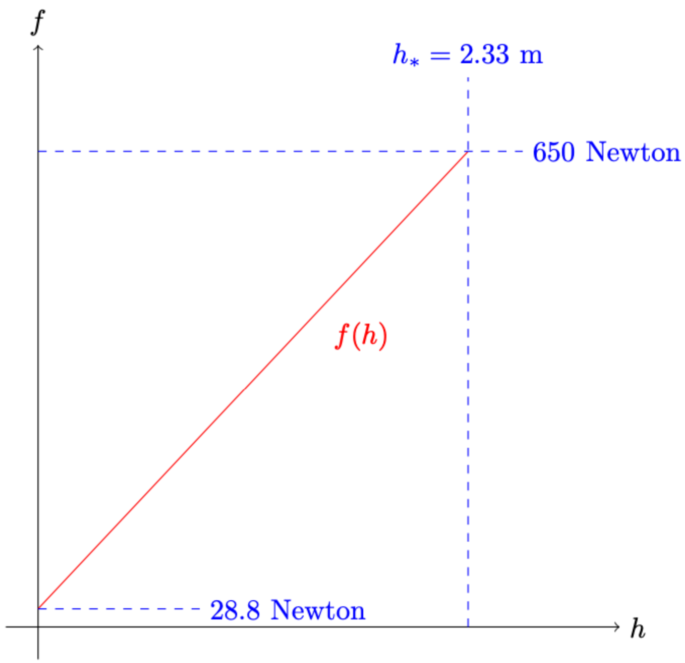
Quelle hauteur l'ouvrier peut atteindre
avant que l'échelle ne glisse ?

$$f(h)\ L\sin(\phi) \quad = \quad mg\frac{L}{2}\cos(\phi) + Mg\frac{h}{\sin(\phi)}\cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$f(h) \quad = \quad \underbrace{\frac{mg\cos(\phi)}{2\sin(\phi)}}_{28.8675} + h\ \underbrace{\frac{Mg\cos(\phi)}{L\sin^2(\phi)}}_{266.6667}$$

Ouvrier avec sacoche = 120 kg
Echelle = 10 kg et 3 mètres
Angle de 60 degrés
Coefficient de frottement statique 0.5
Accélération de la gravité = 10 m/s2



Evolution de la force de frottement en fonction de la hauteur de l'ouvrier

- **Le moment est le produit du bras de levier par la force.**

- **L'énergie cinétique d'un corps est la somme de l'énergie du mouvement du centre de masse et de l'énergie de la rotation du corps autour de ce point.**

- **Pour la rotation d'un corps autour de son centre de masse, les moments de force, le moment cinétique et le moment d'inertie du corps sont l'équivalent des forces, de la quantité de mouvement et de la masse pour le mouvement de ce point !**

- **Un corps est à l'équilibre si la somme des forces et des moments est nulle : c'est l'équilibre statique.**

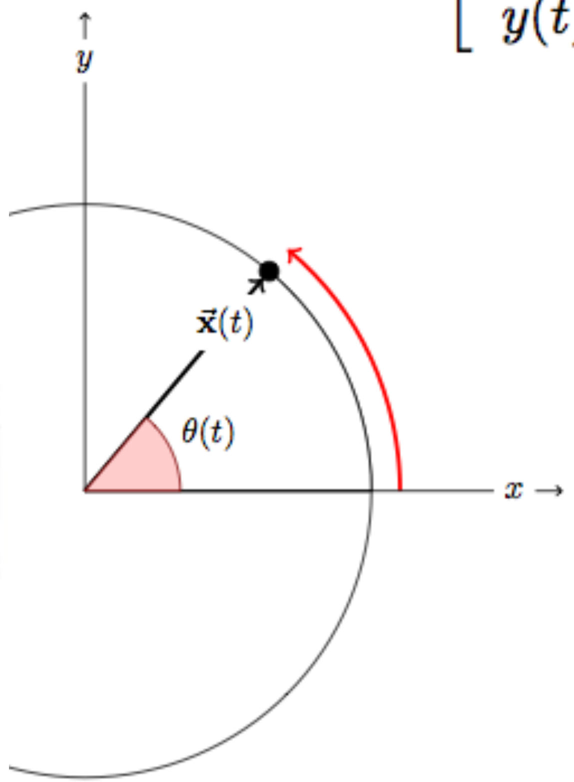
$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\ v^2 + \frac{1}{2}I\ \omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

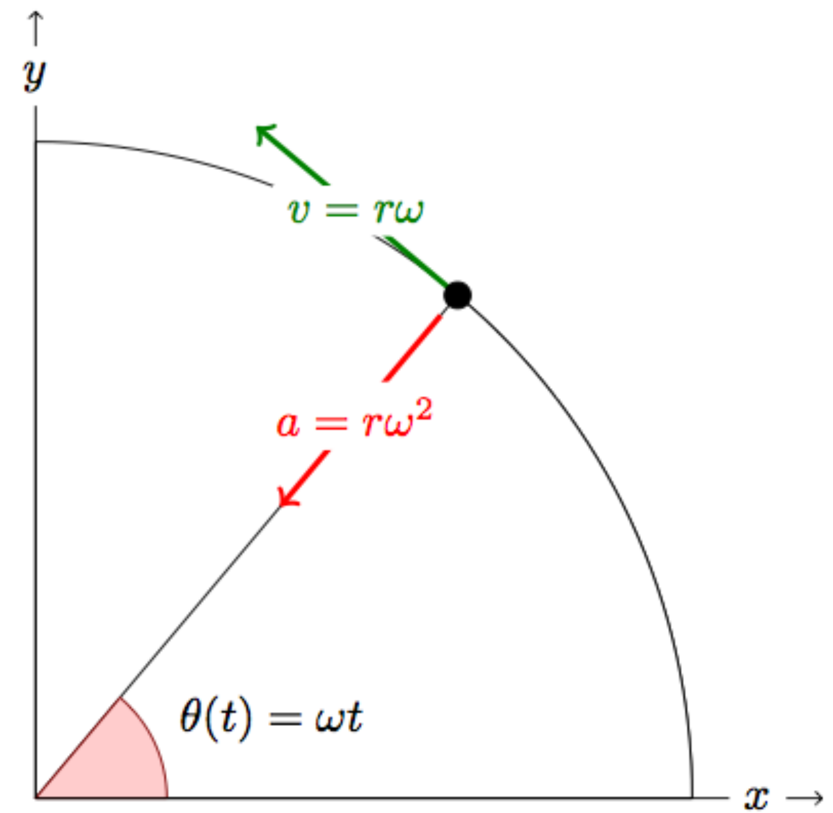
$$\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) = \sum M_i$$

Le disque tourne…

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Accélération centripète



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\omega^2 \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Vitesse tangentielle

Exercice classique
et pas tout-à-fait réaliste
de tous les livres de physique

Le MRUA :-)

$$
\begin{aligned}
y''(t) &= a \\
y'(t) &= \overbrace{v_0 + a\, t}^{v(t)} \\
y(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a\, t^2}{2}
\end{aligned}
$$

Des millions de gens ont vu tomber une pomme,
Newton est le seul qui se soit demandé pourquoi...
(Bernard Baruch)

Le MCUA :-)

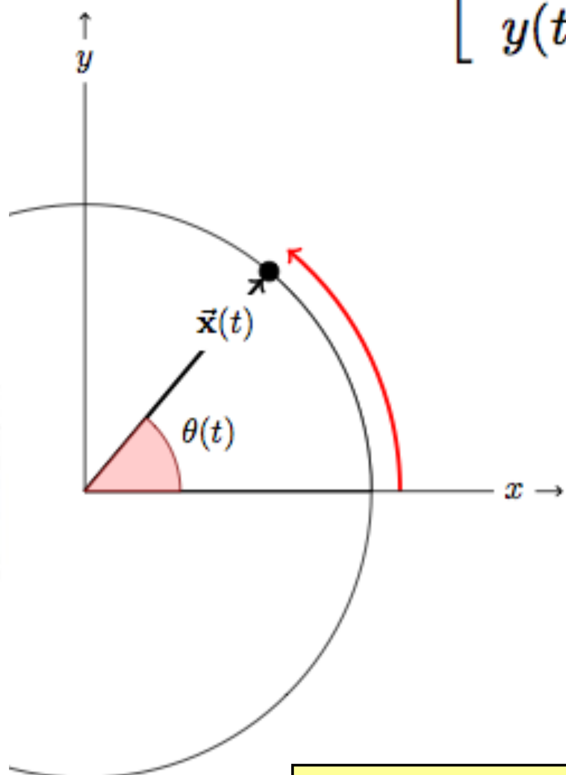
$$\begin{aligned}\theta''(t) &= \alpha \\ \theta'(t) &= \overbrace{\omega_0 + \alpha\, t}^{\omega(t)} \\ \theta(t) &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha\, t^2}{2}\end{aligned}$$

Maintenant, faisons strictement et exactement la même chose avec un mouvement circulaire !

Définissons le MCUA !

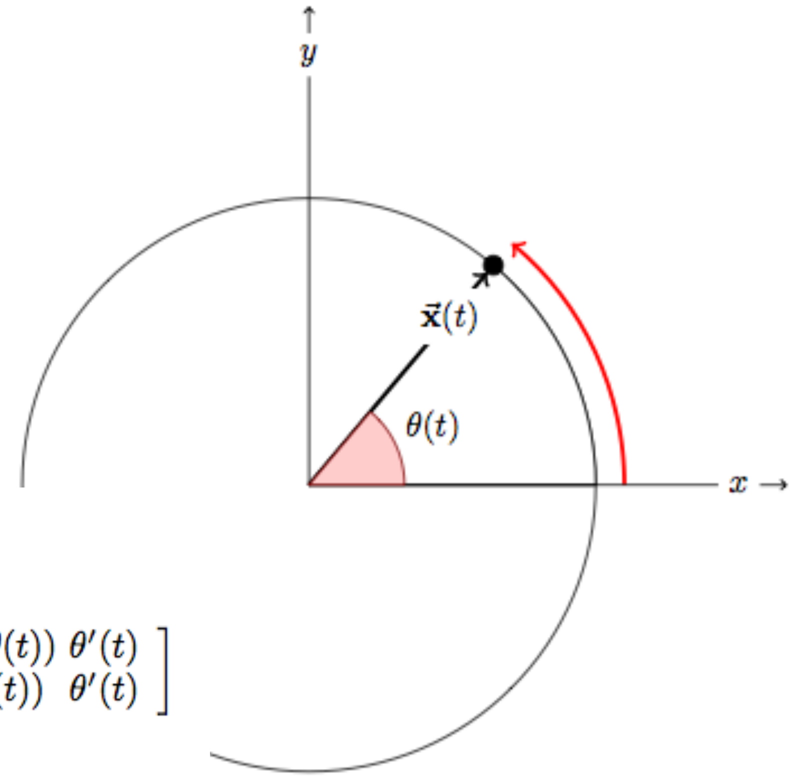
Le MCUA :-)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Mouvement circulaire non-uniforme...
Vitesse angulaire non-constante
Accélération angulaire constante

Calculons la vitesse et l'accélération !



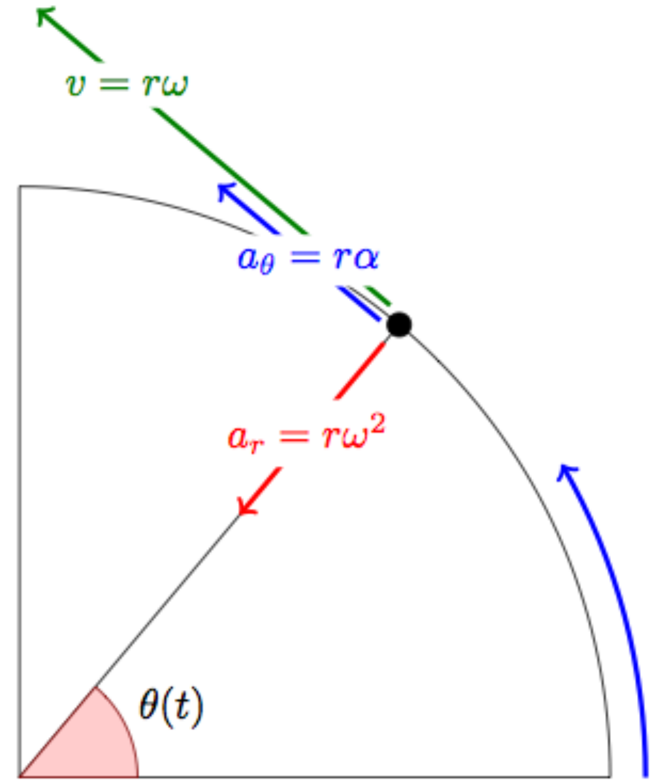
$$\vec{\mathbf{v}}(t) = r\,\omega(t)\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = r\omega'(t)\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega(t)\begin{bmatrix} -\cos(\theta(t))\;\theta'(t) \\ -\sin(\theta(t))\;\theta'(t) \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$= r\alpha\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t)\begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

La vitesse est toujours bien tangente au mouvement !
Mais son module est désormais variable
car la vitesse angulaire n'est pas constante !



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Accélération tangentielle

Accélération centripète

Le truc vraiment le plus non intuitif de la physique...

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{I}\ \vec{\boldsymbol{\omega}}\right) = \sum \vec{\mathbf{M}}_i$$

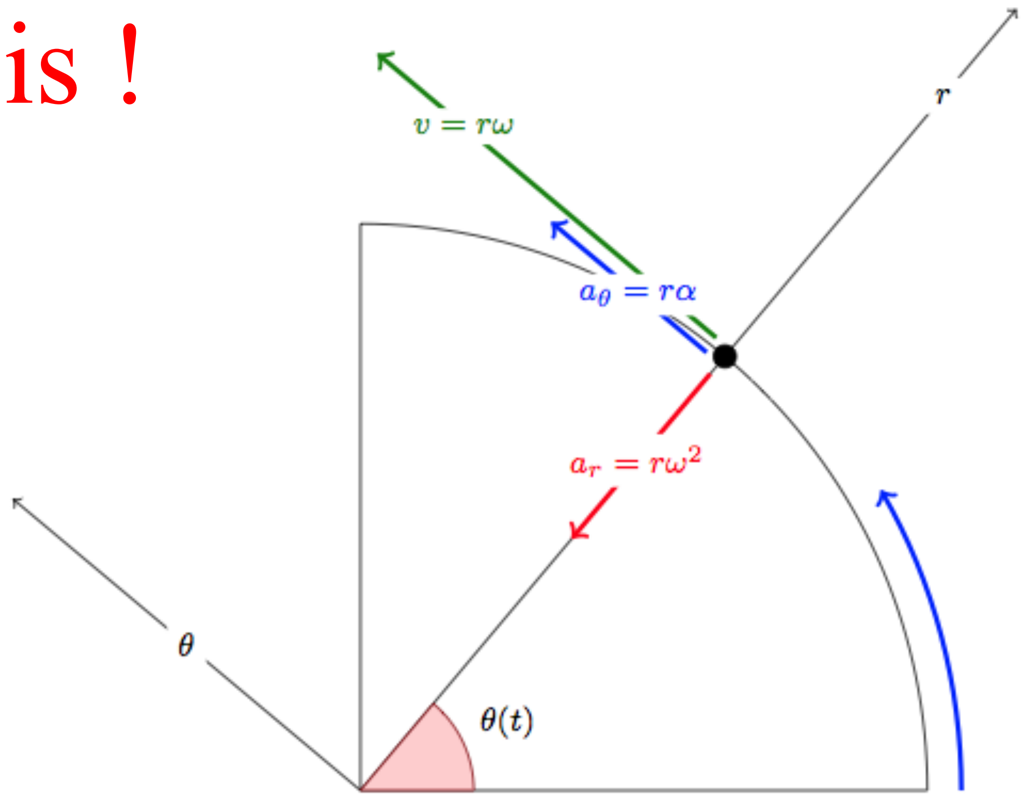
Résumé des épisodes précédents :-)

Episode 1 : Décrire le mouvement
Episode 2 : Newton et la force de gravité
Episode 5 : Le frottement
Episode 6 : L'énergie c'est formidable !
Episode 9 : La mécanique des corps : ooouuupppsss : cela tourne !

Avec des axes bien choisis !

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$



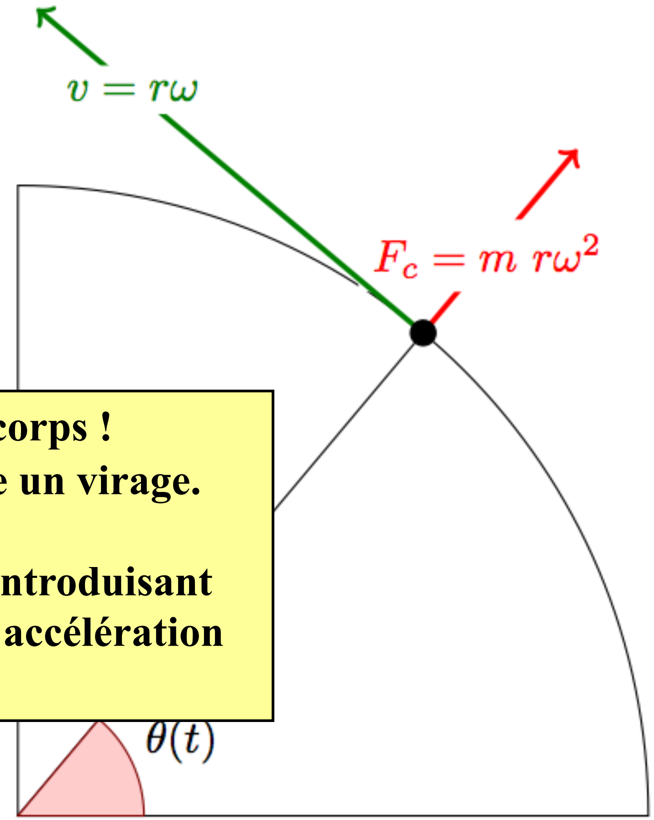
Vitesse : $v = r\omega$ [m/s]

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$ [m/s^2]

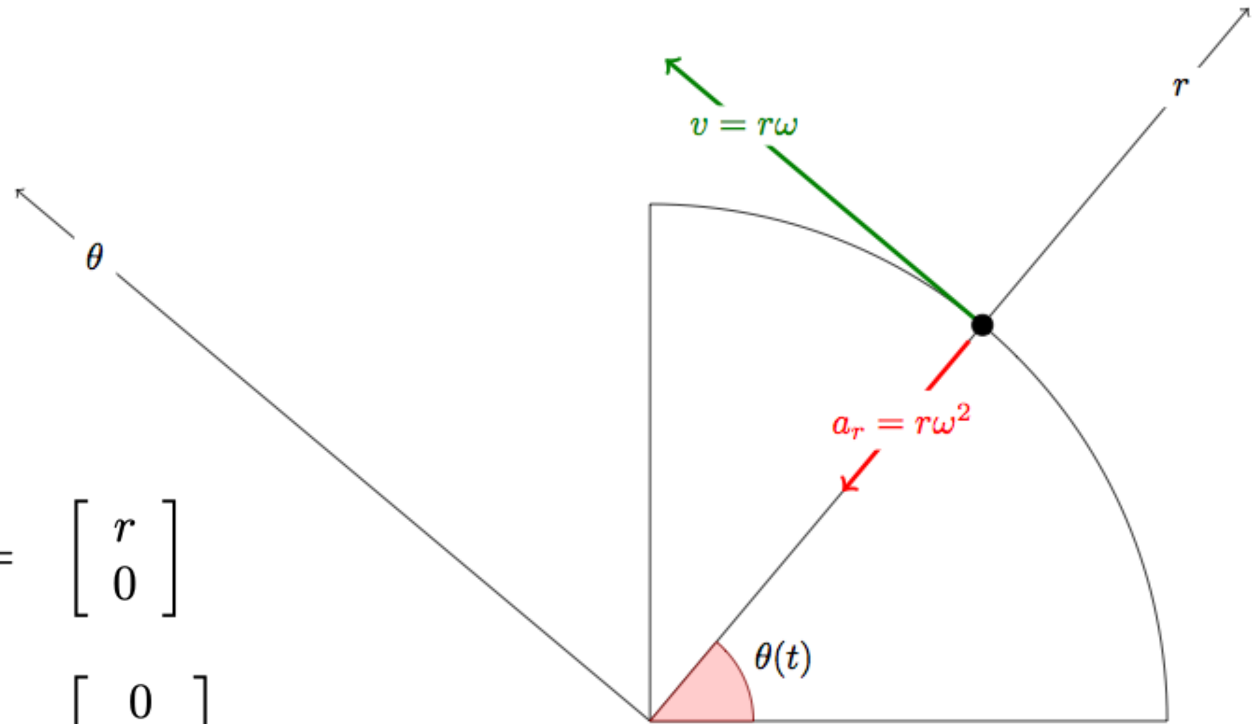
Vitesse angulaire ω [radians/s] et accélération angulaire α [radians/s^2]

On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.

Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant une pseudo-force centrifuge qui aura le même effet que l'accélération centripète qu'on obtient dans un repère fixe !



Remplacer l'accélération centripète par la pseudo-force centrifuge !



$$\vec{\mathbf{x}}(t) : \begin{bmatrix} x_r \\ x_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) : \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

La vitesse
est-elle toujours
la dérivée de la position ?

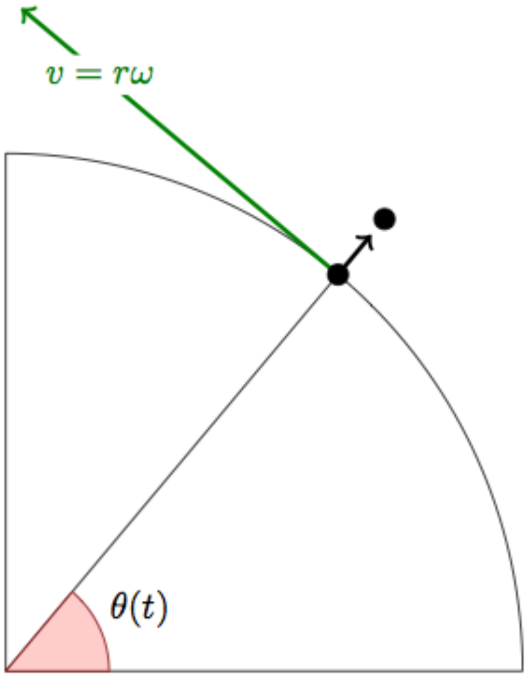
$$\vec{\mathbf{x}}(t) = r\ \vec{\mathbf{e}}_r(t)$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) = r\ \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_r}{dt}(t)}_{\omega\ \vec{\mathbf{e}}_\theta(t)}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) = r\ \omega\ \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_\theta}{dt}(t)}_{-\omega\ \vec{\mathbf{e}}_r(t)}$$

Oui, oui, oui !
La vitesse est bien
la dérivée de la position !

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = r(t)\ \vec{\mathbf{e}}_r(t)$$



Et si on bouge radialement sur un plateau qui tourne ?

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}(t) = r'(t)\ \vec{\mathbf{e}}_r(t) + r(t)\ \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_r}{dt}(t)}_{\omega\ \vec{\mathbf{e}}_\theta(t)}$$

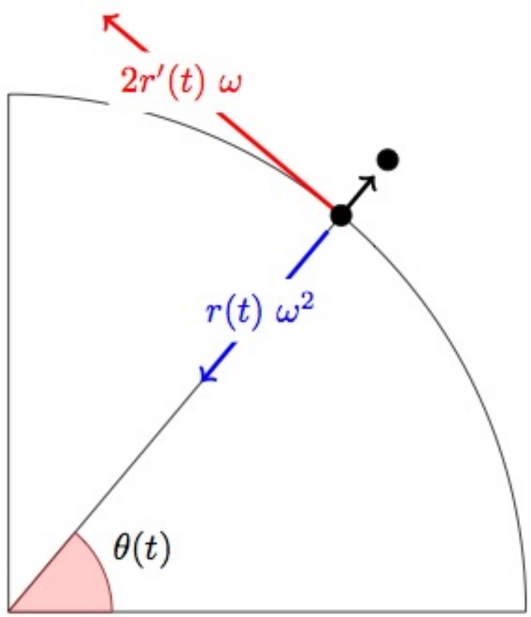
Avec un peu d'algèbre un brin fastidieuse...

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) = r''(t)\ \vec{\mathbf{e}}_r(t) + r'(t)\ \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_r}{dt}(t)}_{\omega\ \vec{\mathbf{e}}_\theta(t)} + r'(t)\ \omega\ \vec{\mathbf{e}}_\theta(t) + r(t)\ \omega\ \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_\theta}{dt}(t)}_{-\omega\ \vec{\mathbf{e}}_r(t)}$$

$$= r''(t)\ \vec{\mathbf{e}}_r(t) + 2r'(t)\ \omega\ \vec{\mathbf{e}}_\theta(t) - r(t)\ \omega^2\ \vec{\mathbf{e}}_r(t)$$

Accélération de Coriolis

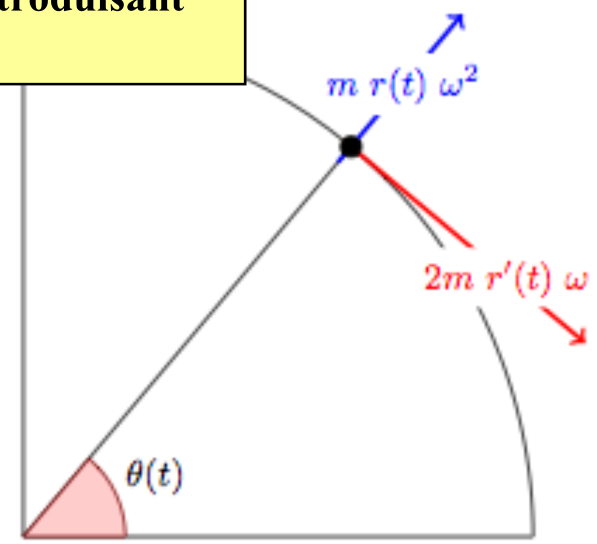
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = r''(t)\ \vec{\mathbf{e}}_r(t) + \boxed{2r'(t)\ \omega\ \vec{\mathbf{e}}_\theta(t)} - \boxed{r(t)\ \omega^2\ \vec{\mathbf{e}}_r(t)}$$



Accélération centripète

On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.

Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant des pseudo-forces centrifuge et de Coriolis



Remplacer
l'accélération de Coriolis
par la pseudo-force de Coriolis !

La résultante de la force de Coriolis et de la force due au gradient de pression atmosphérique fait tourner l'air autour des zones de basse et de haute pression !

Eh oui : la Terre tourne !

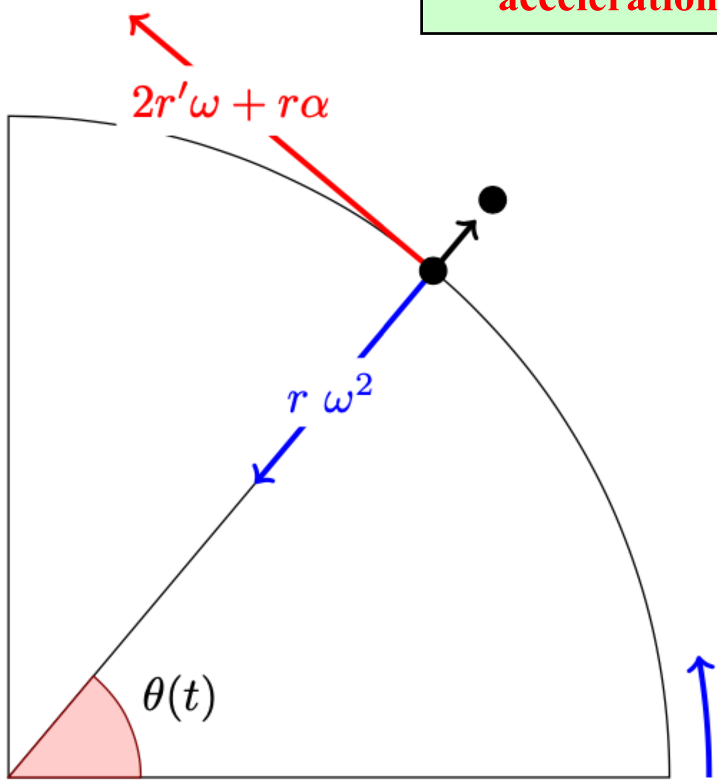
Et voilà le résultat de la pseudo-force de Coriolis !

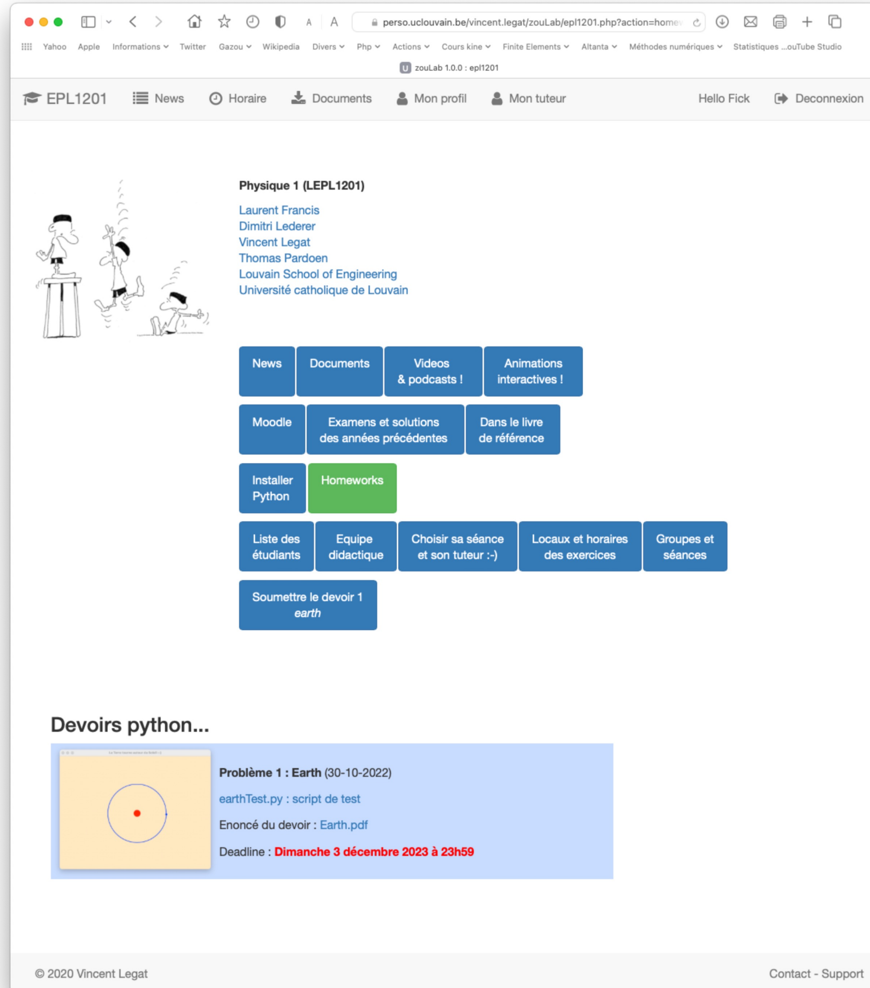
Et bien non, contrairement à la légende,
l'eau du lavabo ne tourne pas à l'envers dans l'hémisphère sud.

L'impact de la force de Coriolis est très très très faible à petite échelle !
Le sens de rotation dépendra davantage de la forme du lavabo
et de l'impulsion initiale lorsque vous retirez le bouchon... (si, si :-)

Mais, ceci est une légende urbaine !

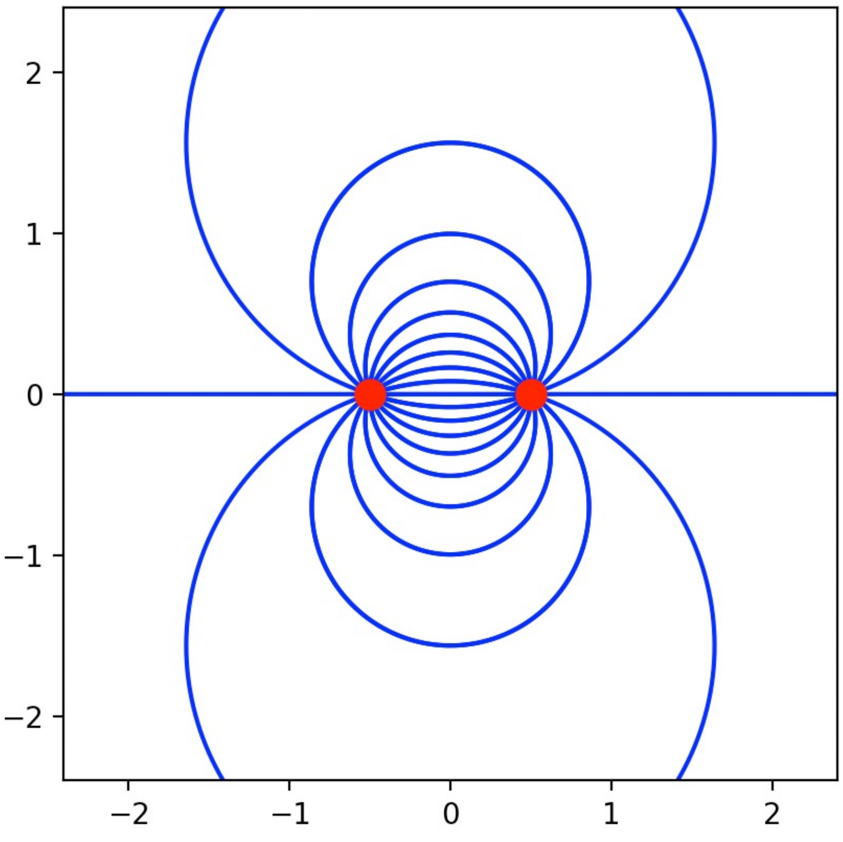
- **Dans tout mouvement circulaire, l'accélération a toujours une composante centripète.**
- **Une variation de la vitesse angulaire génère une accélération tangentielle.**
- **Un déplacement radial fait aussi apparaître une accélération tangentielle dite de Coriolis.**



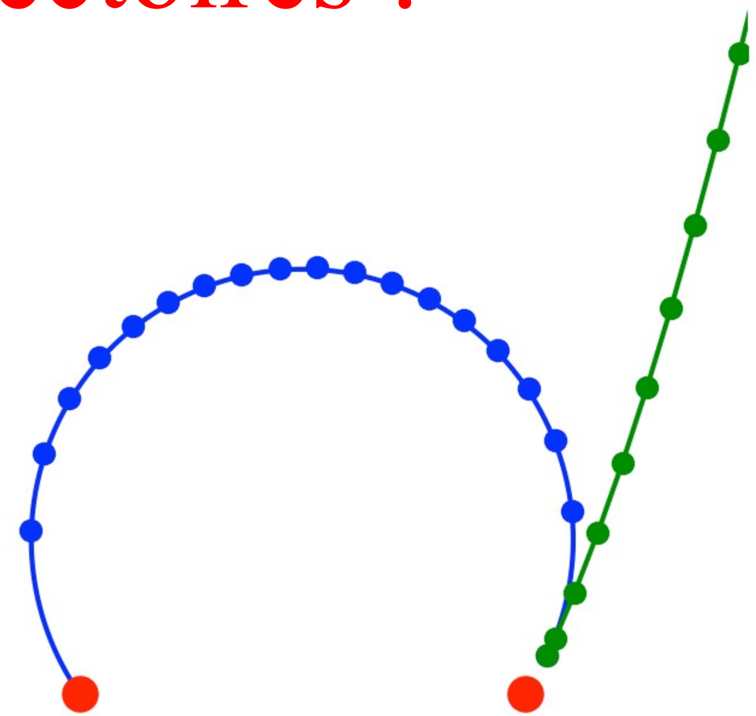


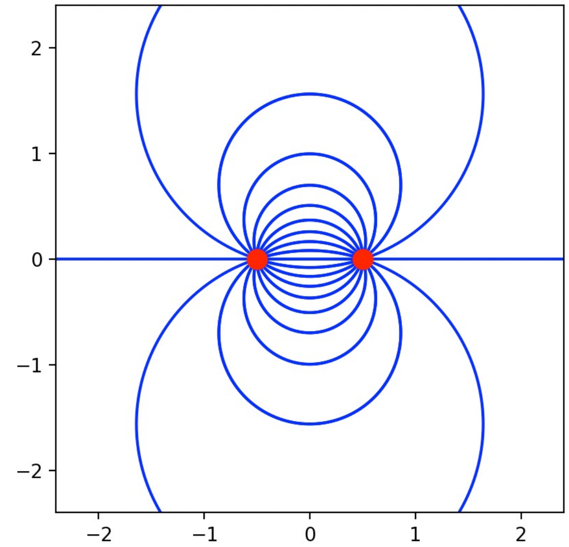
Le fameux devoir python !

Deux cables chargés perpendiculaires au plan

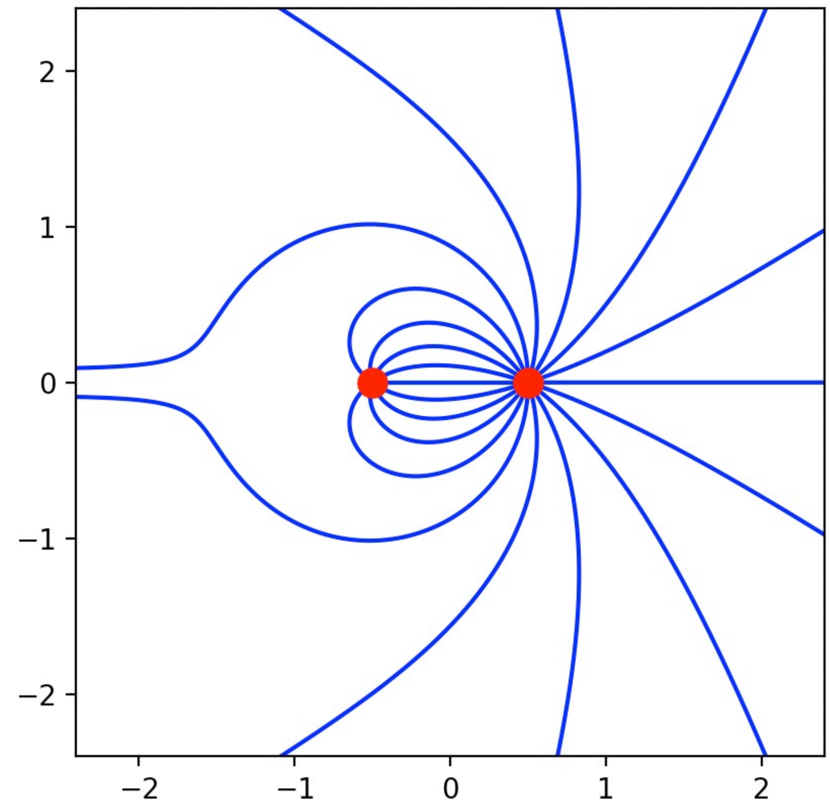


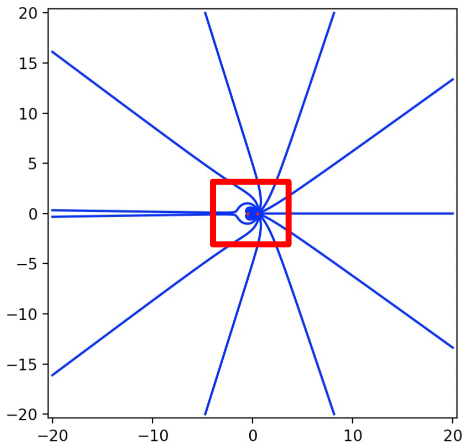
Les lignes du champ ne sont pas des trajectoires !

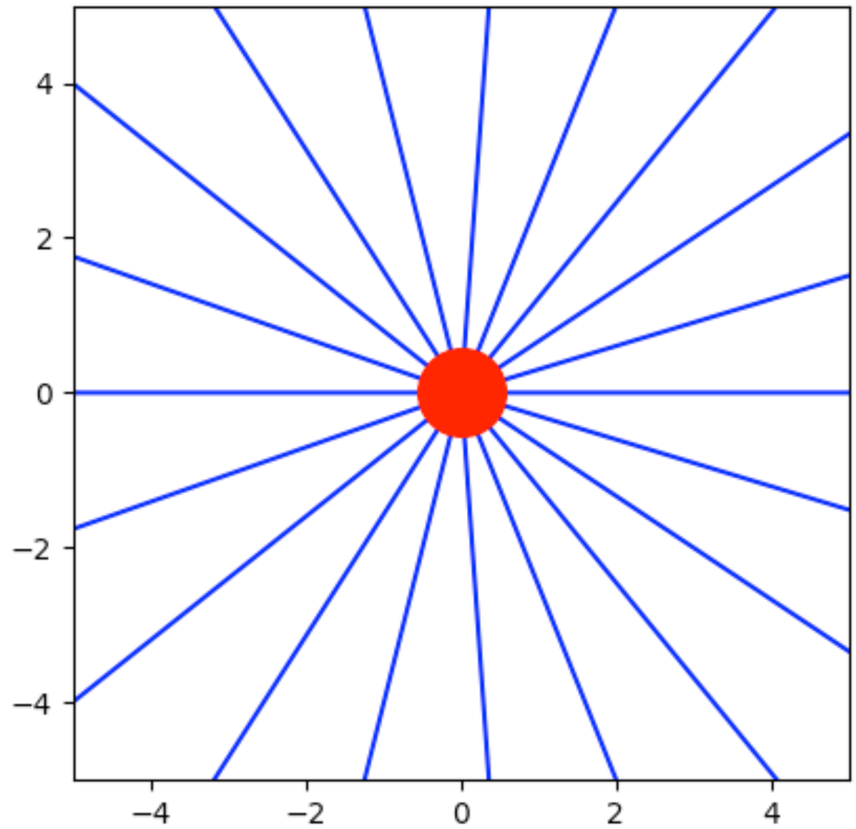




Avec des densités de charges différentes…





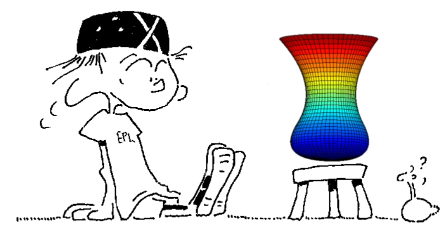


Lignes
du champ
gravitationnel
autour d’une étoile !

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{v}}(t)\\
\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}}(t))
\end{aligned}$$

Méthode dite d'Euler explicite !

Y a mieux !
On y reviendra plus tard !



$\downarrow$ En prenant un Δt suffisamment petit...

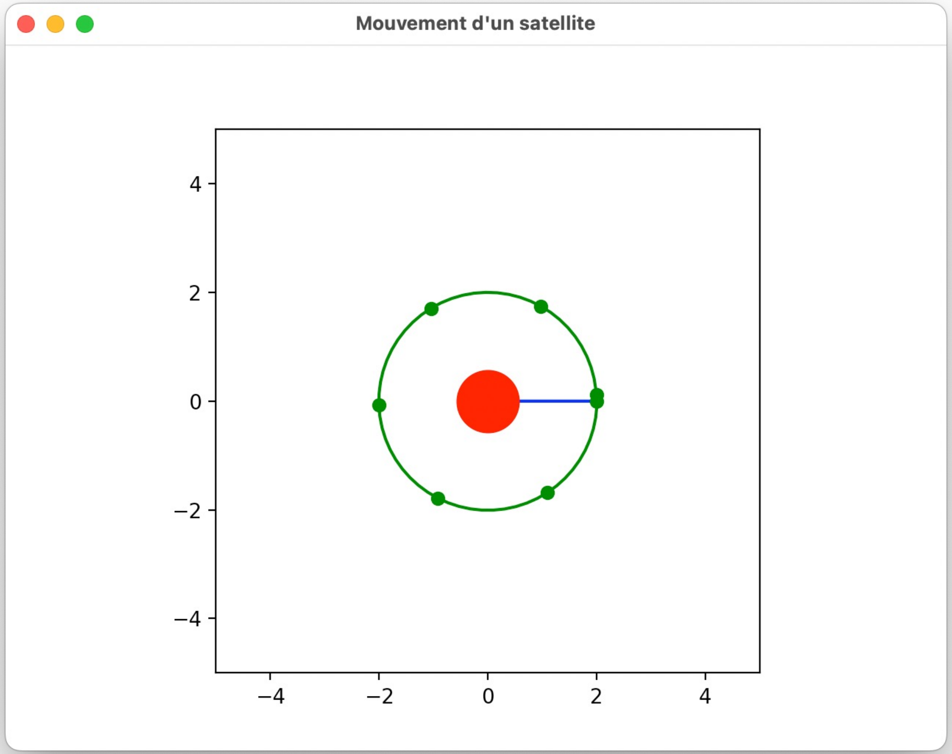
$$\begin{aligned}
\frac{\vec{\mathbf{x}}(t+\Delta t)-\vec{\mathbf{x}}(t)}{\Delta t} &= \vec{\mathbf{v}}(t)\\
\frac{\vec{\mathbf{v}}(t+\Delta t)-\vec{\mathbf{v}}(t)}{\Delta t} &= \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}}(t))
\end{aligned}$$

Il faut une position et une vitesse initiale pour entamer le calcul !

$\downarrow$ En definissant $\vec{\mathbf{x}}_i = \vec{\mathbf{x}}(t+i\Delta t)$ et $\vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{v}}(t+i\Delta t)$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}_{i+1} &= \vec{\mathbf{x}}_i + \Delta t\ \vec{\mathbf{v}}_i\\
\vec{\mathbf{v}}_{i+1} &= \vec{\mathbf{v}}_i + \Delta t\ \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{x}}_i)
\end{aligned}$$

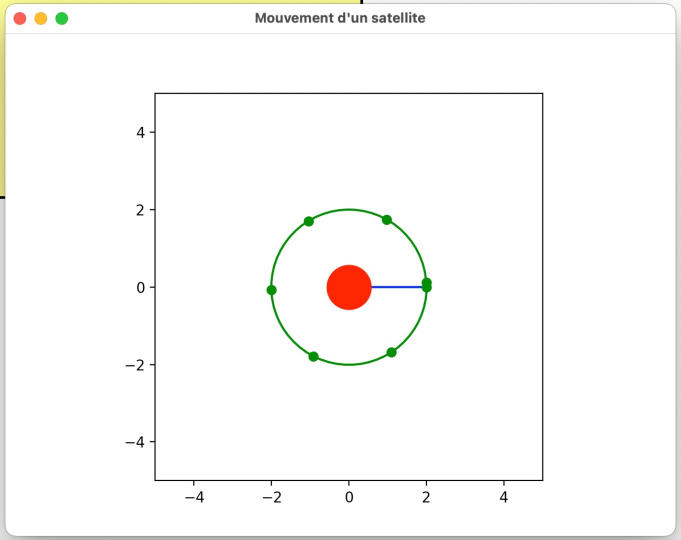
Une trajectoire avec python !



La Terre tourne
autour du Soleil !

```
def g(x):
  g = zeros(2)
  g[0] = -x[0] / (x[0]*x[0] + x[1]*x[1])**(3/2)
  g[1] = -x[1] / (x[0]*x[0] + x[1]*x[1])**(3/2)
  return g

X = zeros((n+1,2)); X[0,:] = [2.0,0.0]
X = zeros((n+1,2)); V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0)]
n = 18001;  dt = 10e-4
for i in range(n):
  V[i+1,:] = V[i,:] + dt * g(X[i,:])
  X[i+1,:] = X[i,:] + dt * V[i,:]
```



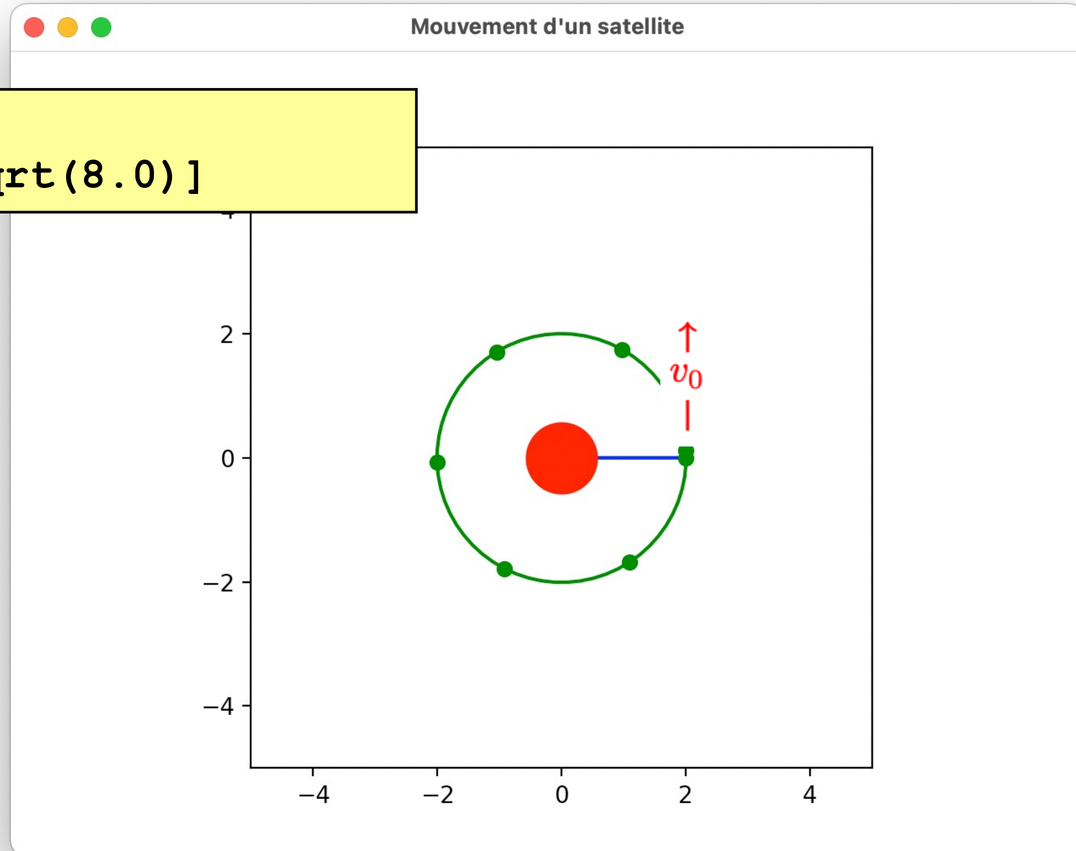
Eh oui !

Les lignes de champ

ne sont pas les trajectoires !

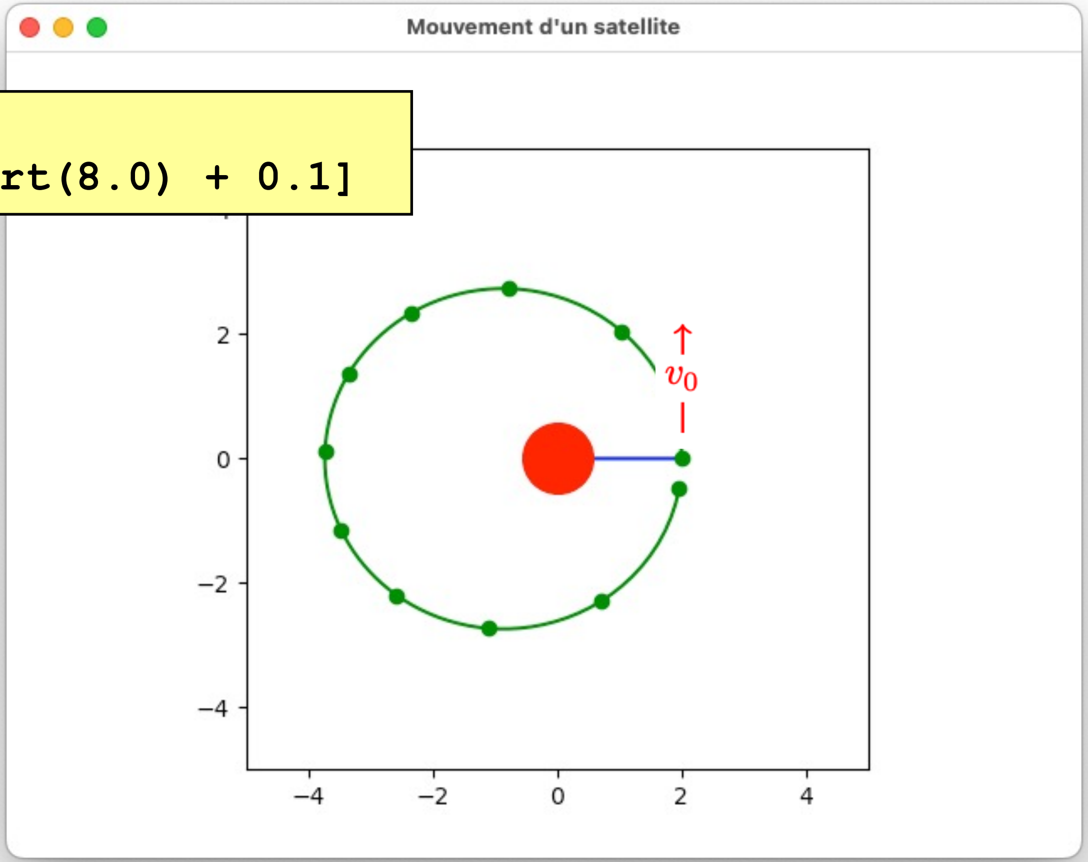
Python : so cool :-)

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0)]
```



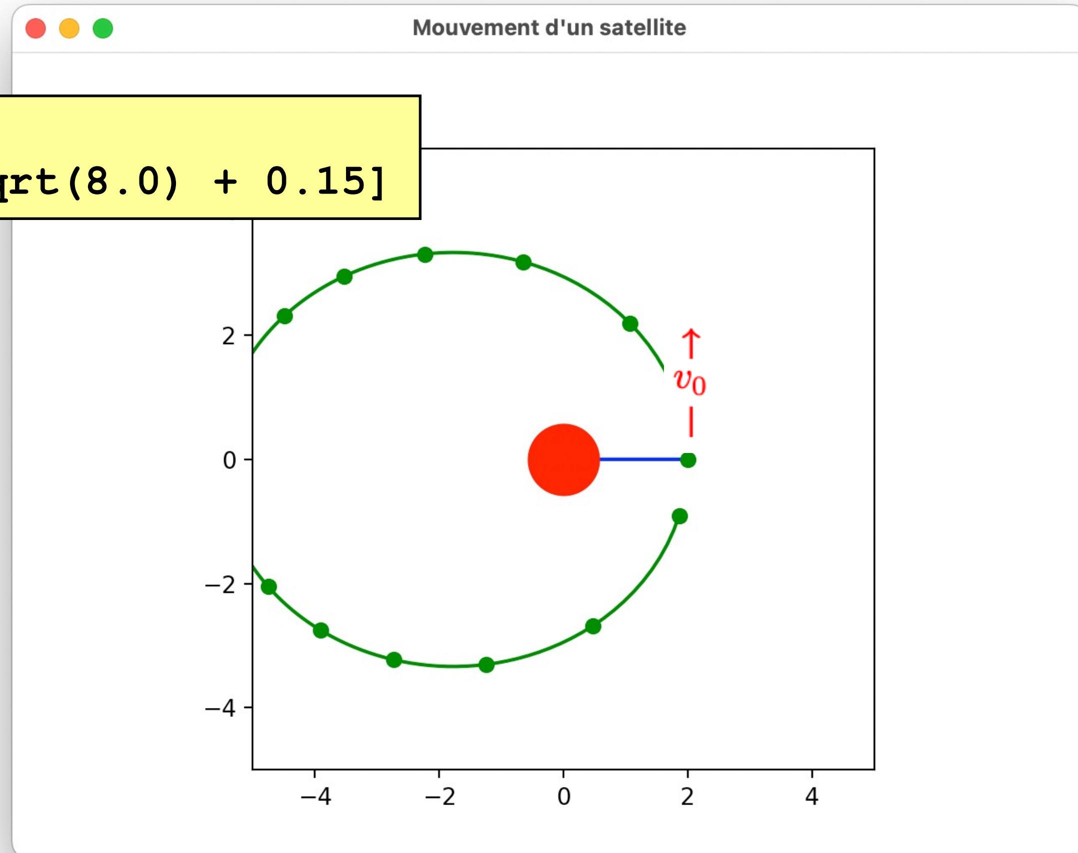
Lâchons un satellite !

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) + 0.1]
```



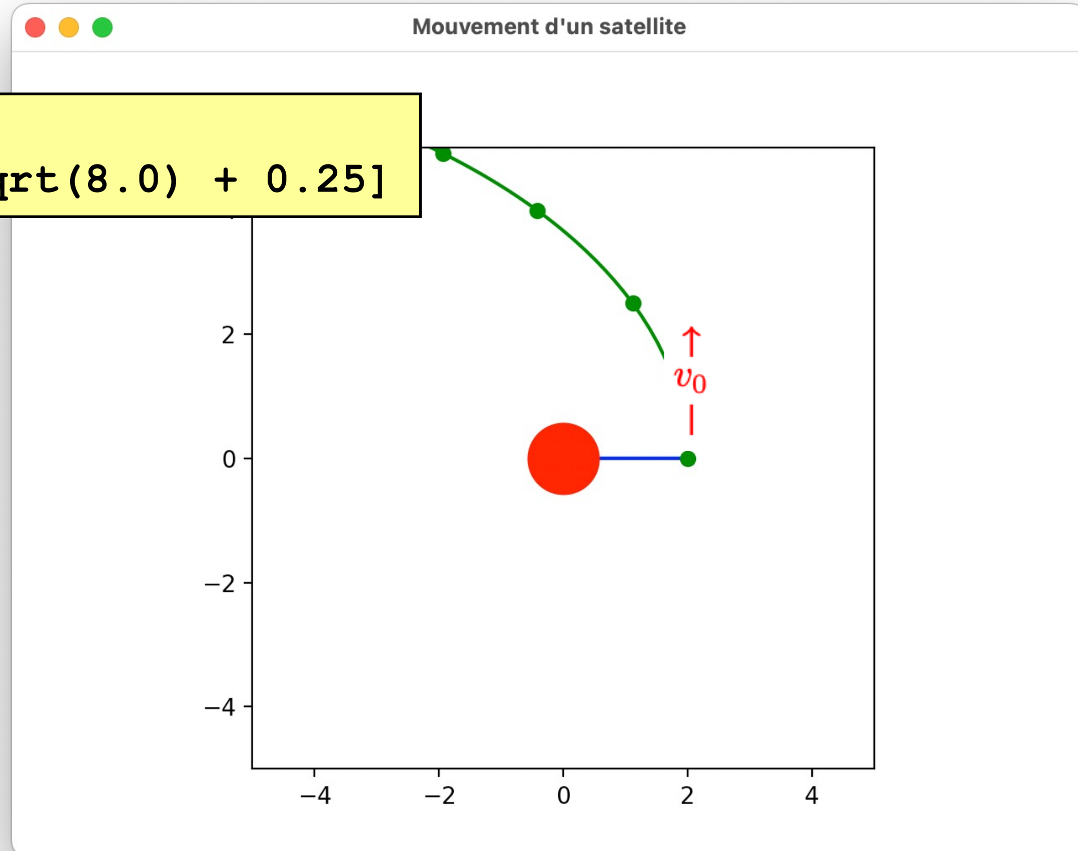
Lâchons un fifrelin plus vite !

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) + 0.15]
```



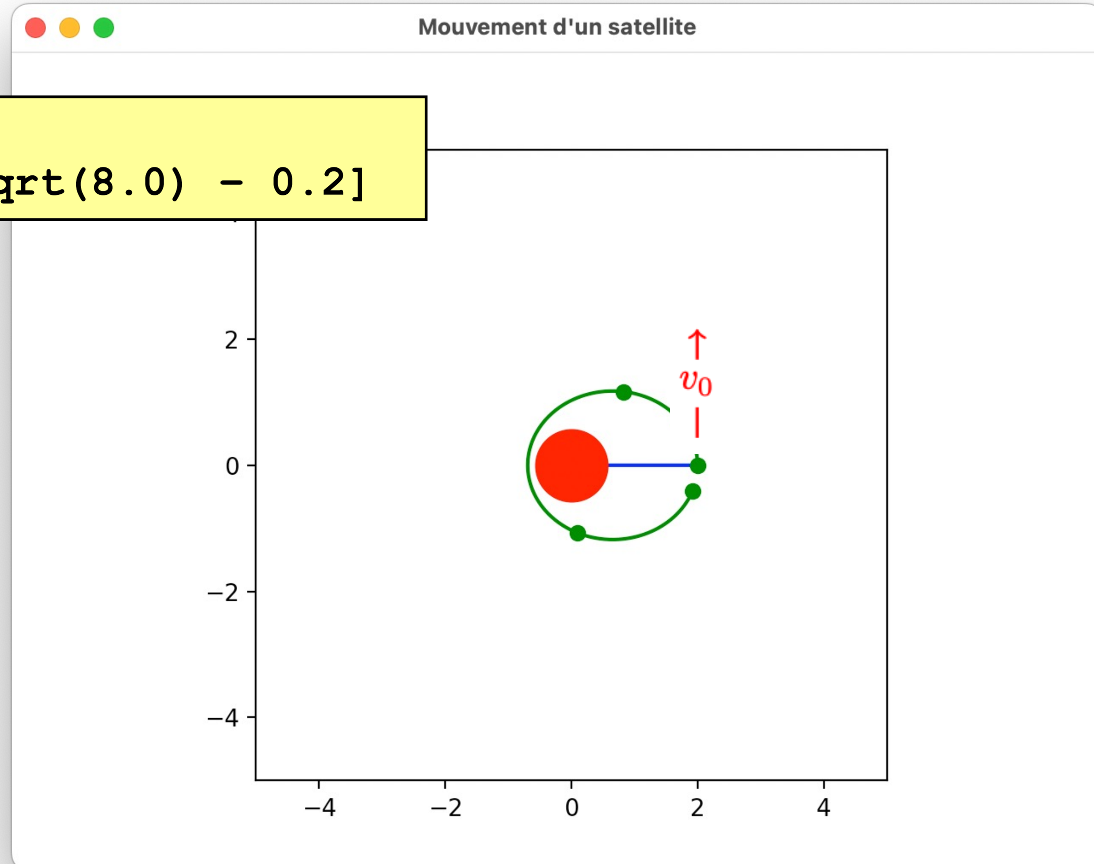
Et encore
un tout petit plus vite !

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) + 0.25]
```



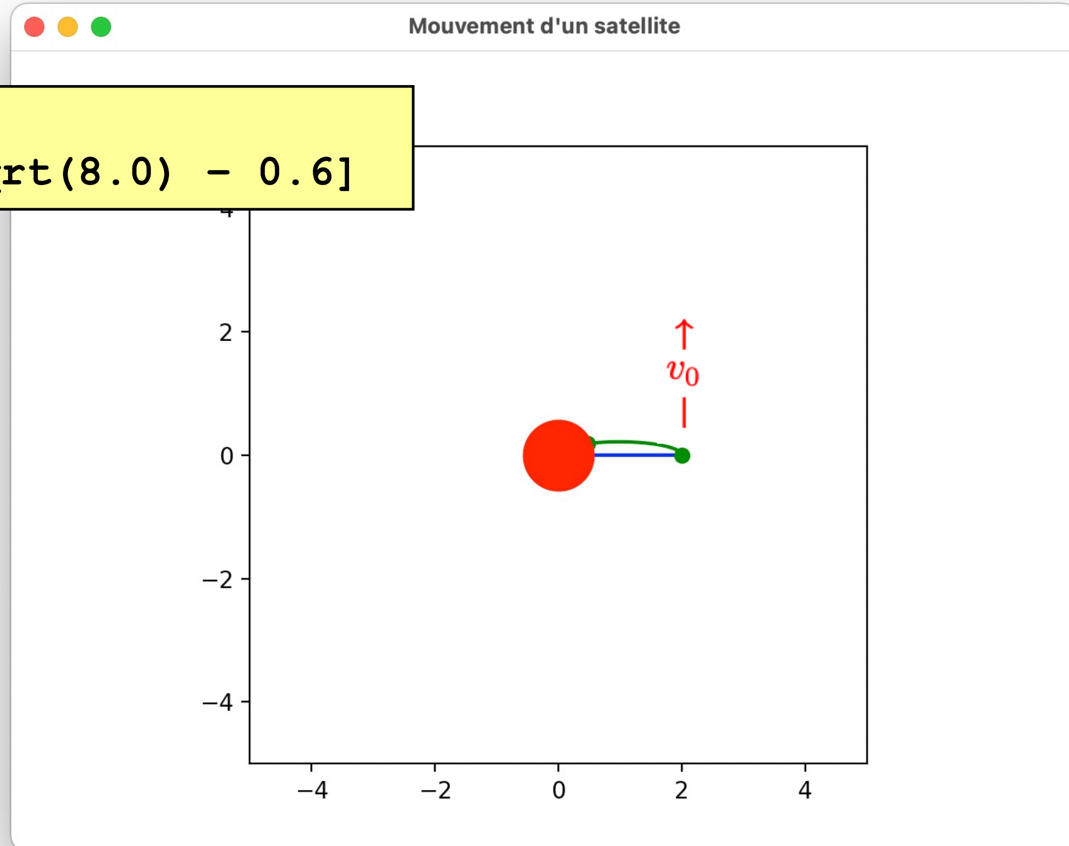
Est-ce qu'il va revenir ?

```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) - 0.2]
```

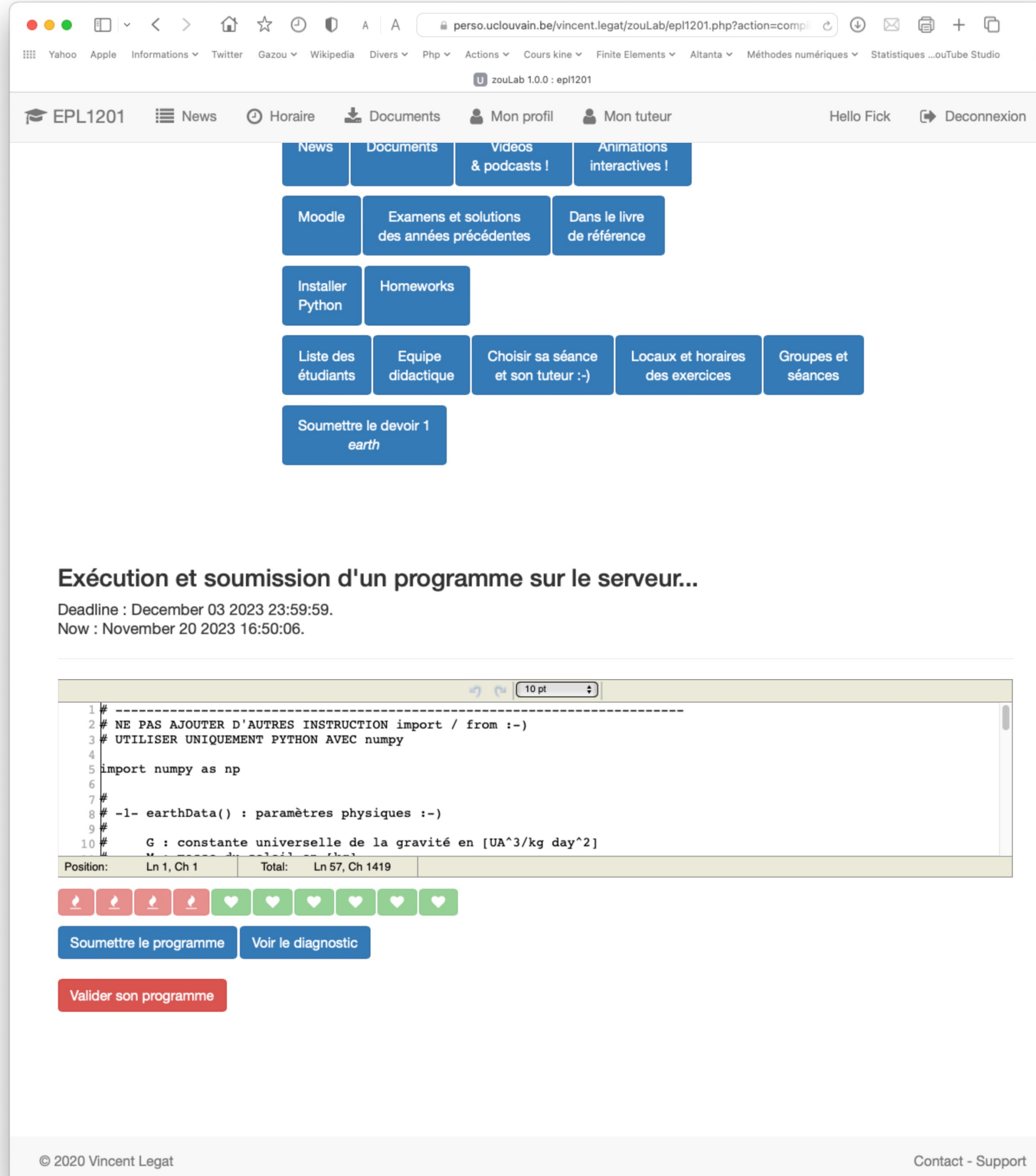


Et en le lâchant
un fifrelin plus lentement !

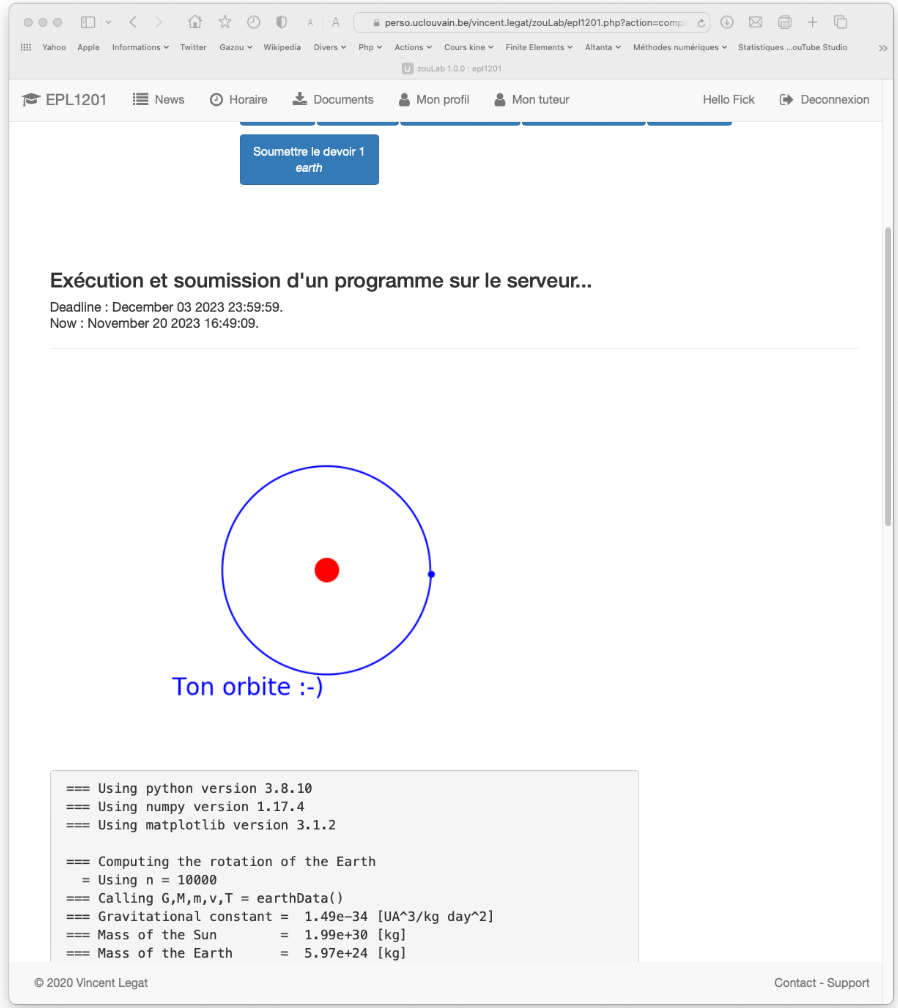
```
X[0,:] = [2.0,0.0]
V[0,:] = [0.0,2.0/sqrt(8.0) - 0.6]
```



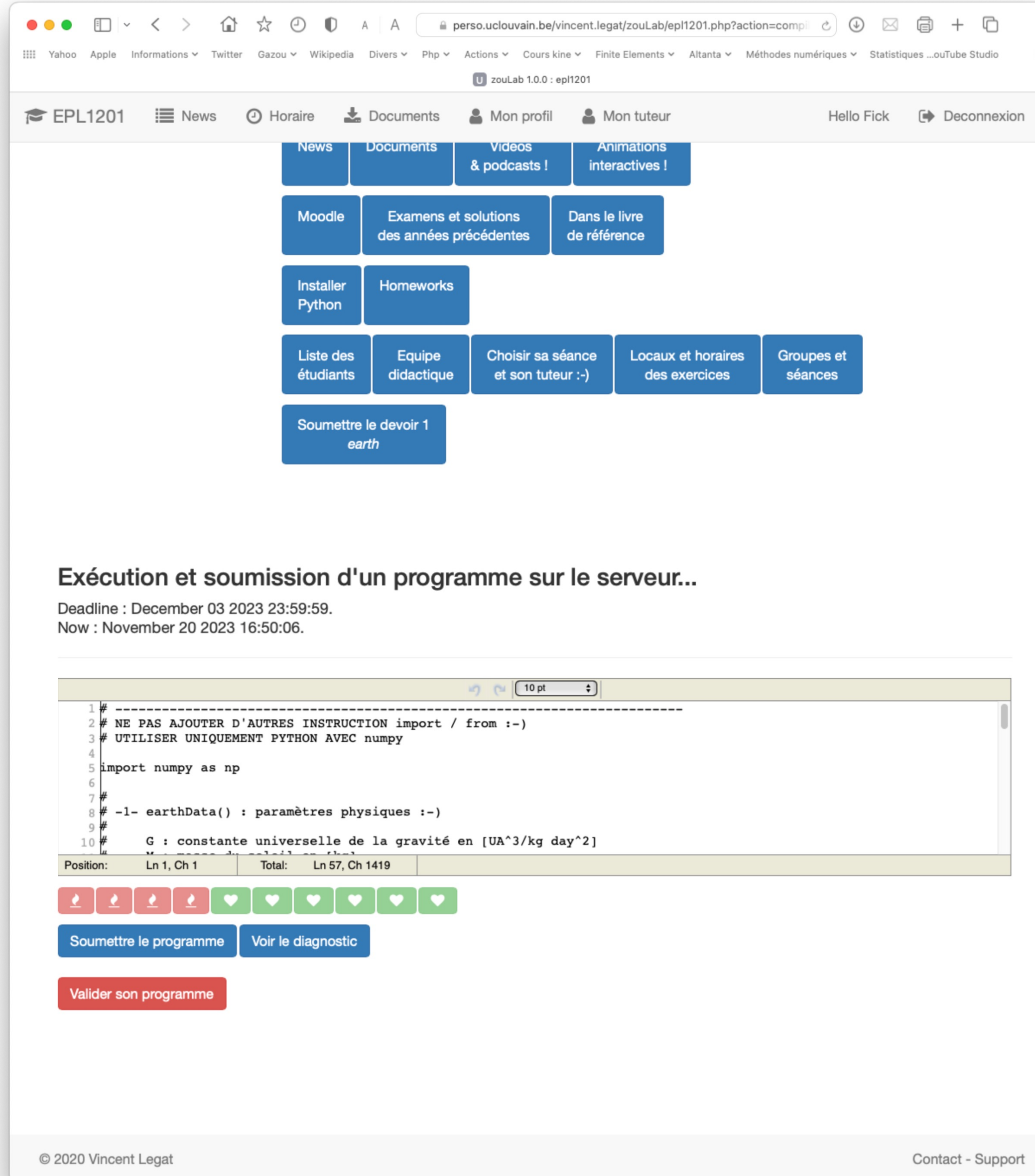
Trop lent : le satellite retombe sur la planète !



Soumettre son devoir !



Regarder
le diagnostic !



Valider son devoir !