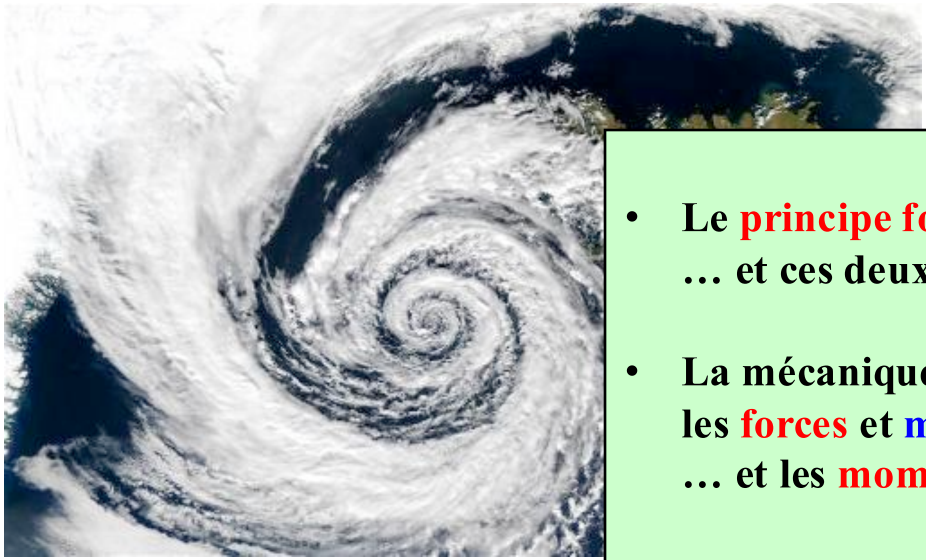
Menu du jour !
La mécanique de Newton



- **Le principe fondamental de la mécanique**
  … et ces deux corollaires.

- **La mécanique des corps solides,**
  les forces et masse,
  … et les moments de forces et moment d'inertie.

- **Accélération centripète**
  … accélération tangentielle et accélération de Coriolis.

La mécanique du point

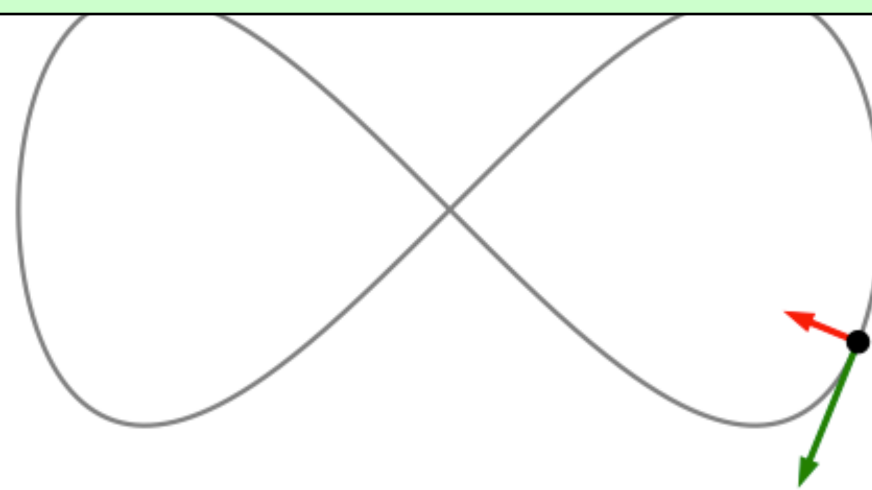
$$\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) = \vec{\mathbf{v}}(t)$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) = \vec{\mathbf{a}}(t)$$

$$m\,\vec{\mathbf{a}}(t) = \sum \vec{\mathbf{F}}(t)$$

- **La position, la vitesse, l'accélération, les forces sont des vecteurs !**
  Il faut donc bien maîtriser l'algèbre vectorielle !

- **A l'exception du mouvement rectiligne à vitesse constante, tout autre type de mouvement présente une accélération centripète due au changement de direction et/ou de norme de la vitesse.**

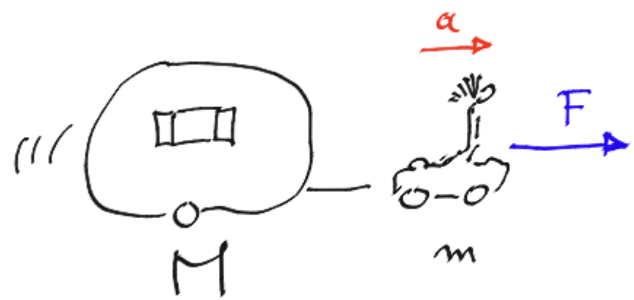


Principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

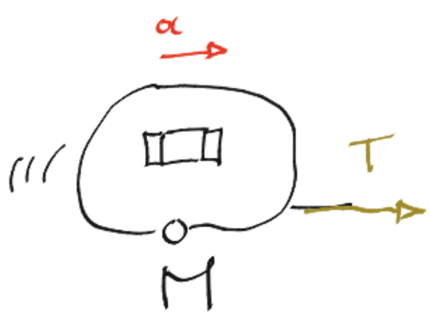
Ce principe est applicable uniquement à tout système de masse constante !
Même si ce système peut se composer de parties qui se séparent !

Et action, réaction ?



$$(M+m)\,a = F$$

$$M a = T$$



$$m a = F - T$$

La mécanique du point…

Pour analyser la stabilité d'un pont,
pour prédire le fonctionnement d'une machine ou du corps humain,
on va isoler les diverses composantes
en tirant profit de la troisième loi de Newton !

Il est maintenant possible de prédire le comportement de systèmes avec plusieurs corps qu'on va approximer comme des particules (ou points matériels).

Une particule est un corps de volume nul,
mais de masse finie...

C'est évidemment une fiction mathématique !
Mais cela permet d'utiliser le modèle mathématique très simple qu'est la mécanique du point.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{v}}(t) \\
\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) &= \vec{\mathbf{a}}(t) \\
m\,\vec{\mathbf{a}}(t) &= \sum \vec{\mathbf{F}}(t)
\end{aligned}
$$

Les 3 lois de Newton !

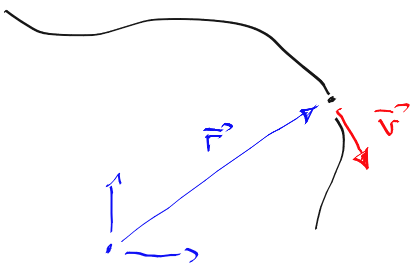
- **Si la somme de forces sur un corps est nulle, tout corps reste au repos ou en mouvement à vitesse constante dans un repère inertiel !**

- **La seconde loi de Newton (F=ma) met en relation l'accélération, la masse et les forces dans un repère inertiel !**

- **La force exercée par un objet sur un autre est opposée à celle exercée par l'autre corps sur lui-même. C'est le fameux principe : action-réaction :-)**

$$\begin{array}{ccc} \frac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}} & = & \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}} \\ & \uparrow & \\ \frac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{F}} \\ & \downarrow & \\ \vec{\mathbf{r}}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}} \end{array}$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \times m\vec{v}}_{=0\ :-)}$$



Deux principes corollaires…

$$\begin{array}{ccc} \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}} \\ & \uparrow & \\ \frac{d}{dt}\left(m\vec{\mathbf{v}}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{F}} \\ & \downarrow & \\ \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}}\times m\vec{\mathbf{v}}\right) & = & \sum \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}} \end{array}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overbrace{m\ \vec{\mathbf{v}}}^{\text{QUANTITÉ DE MVT}}\right) = \boxed{\begin{array}{l}\text{Forces}\\ \sum \vec{\mathbf{F}}\end{array}}$$

$\downarrow$ En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right)\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\,dt$$

$\downarrow$ En supposant que les forces sont constantes.

$$\Big[m\ \vec{\mathbf{v}}\Big]_b - \Big[m\ \vec{\mathbf{v}}\Big]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\ (t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \boxed{\begin{array}{l}\sum \vec{\mathbf{F}}\ \Delta t\\ \text{Impulsions}\end{array}}$$

Bilan de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{Puissance des forces}\\ \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\end{array}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right)\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\,dt = \sum \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

En supposant que les forces sont constantes.

$$\left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_b - \left[\tfrac{1}{2}m\,v^2\right]_a = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot(\vec{\mathbf{x}}_b - \vec{\mathbf{x}}_a)$$

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2\right) = \boxed{\begin{array}{l}\sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{x}}\\ \text{Travail des forces}\end{array}}$$

Bilan d'énergie cinétique

$$\vec{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) \;=\; \boxed{\begin{array}{l}\text{Moments des forces}\\ \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\end{array}}$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right)}_{\text{moment cinétique}} \;=\; \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b.

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right)\,dt \;=\; \sum \int_a^b \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\,dt$$

En supposant que les moments sont constants.

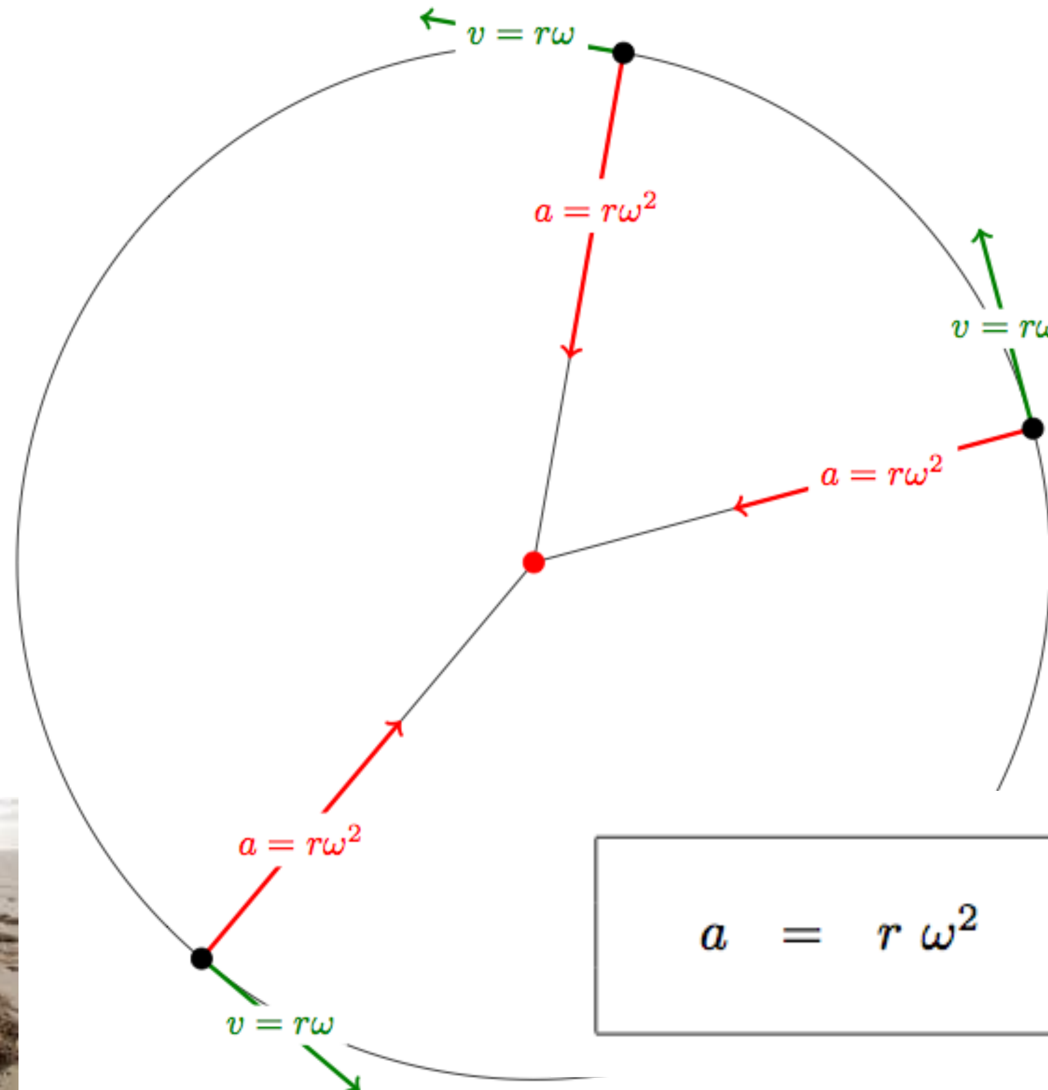
$$\left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_b - \left[m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]_a \;=\; \sum(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\,(t_b - t_a)$$

$$\Delta\left(m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) \;=\; \boxed{\begin{array}{l}\sum(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}})\,\Delta t\\ \text{Impulsions angulaires}\end{array}}$$

Bilan de moment cinétique

Mouvement circulaire uniforme

$$v = r\,\omega$$

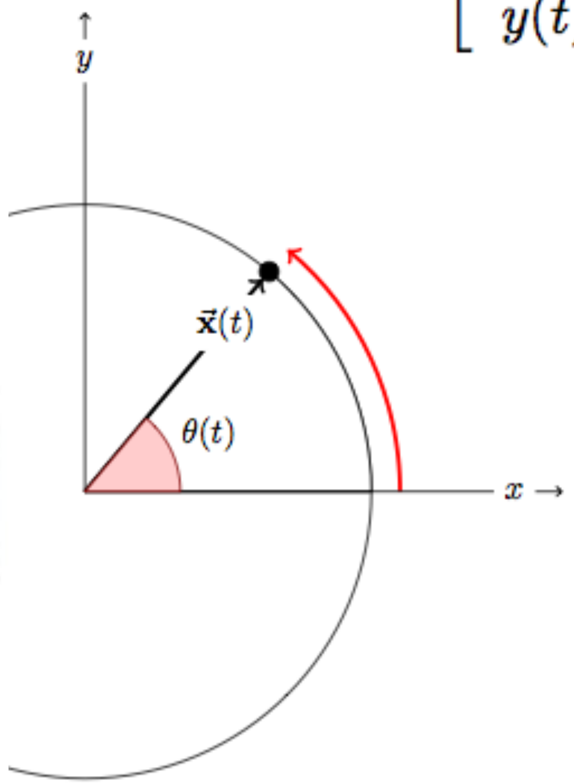


$$a = r\,\omega^2$$

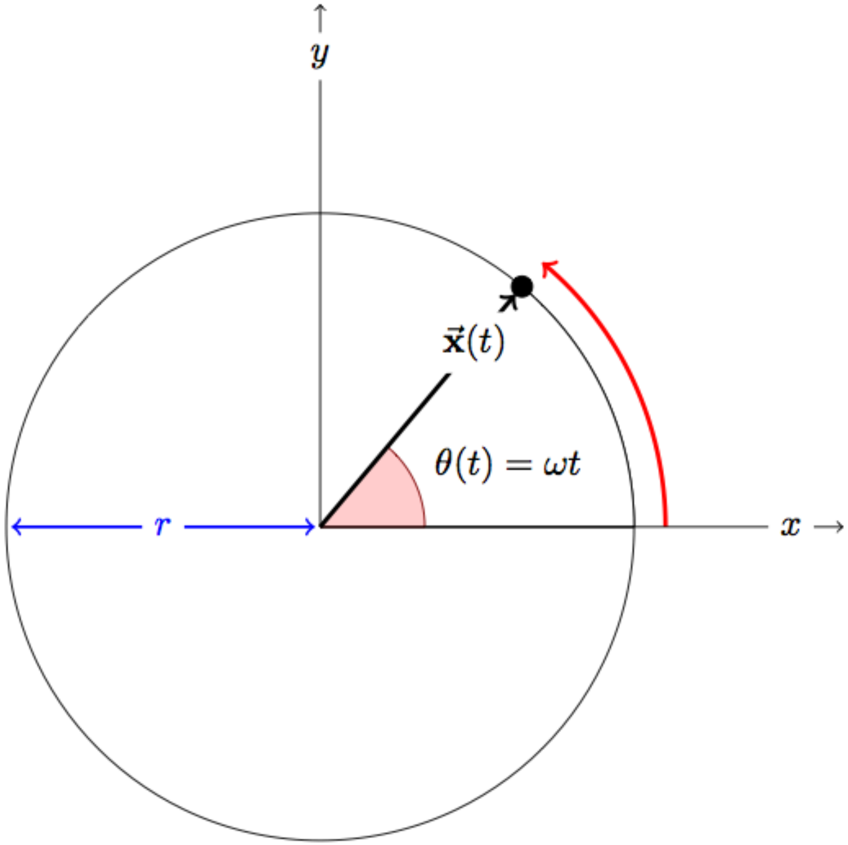
Vitesse angulaire constante : ω
Vitesse tangentielle
Accélération centripète

Le mouvement circulaire est harmonique

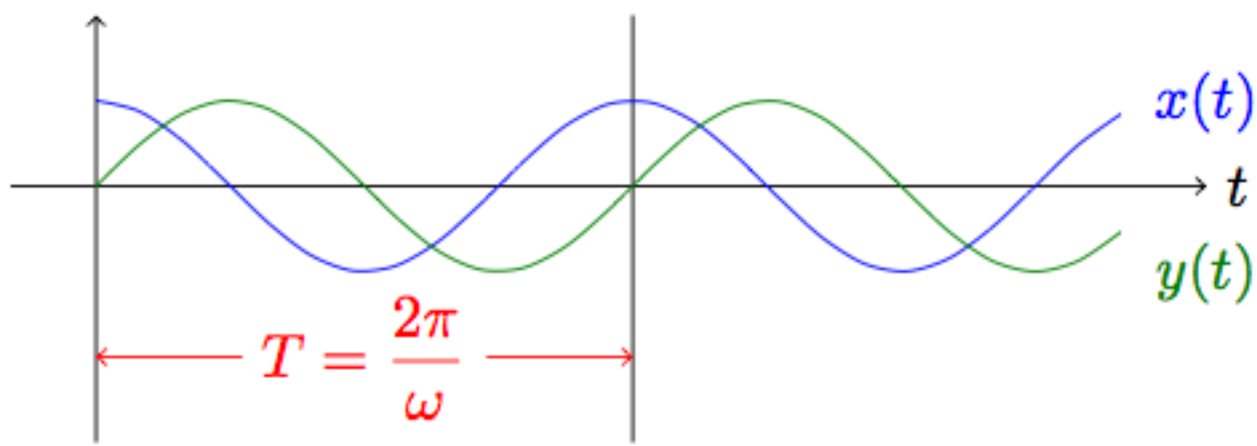
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

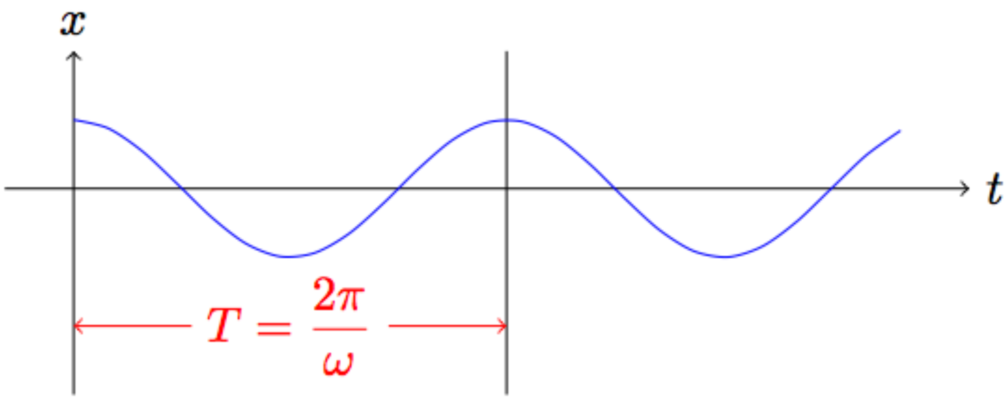


Le retour du cos et du sin



$$
\begin{aligned}
x(t) &= r\ \cos\left(\omega\ t\right) \\
y(t) &= r\ \sin\left(\omega\ t\right)
\end{aligned}
$$





$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}}$$

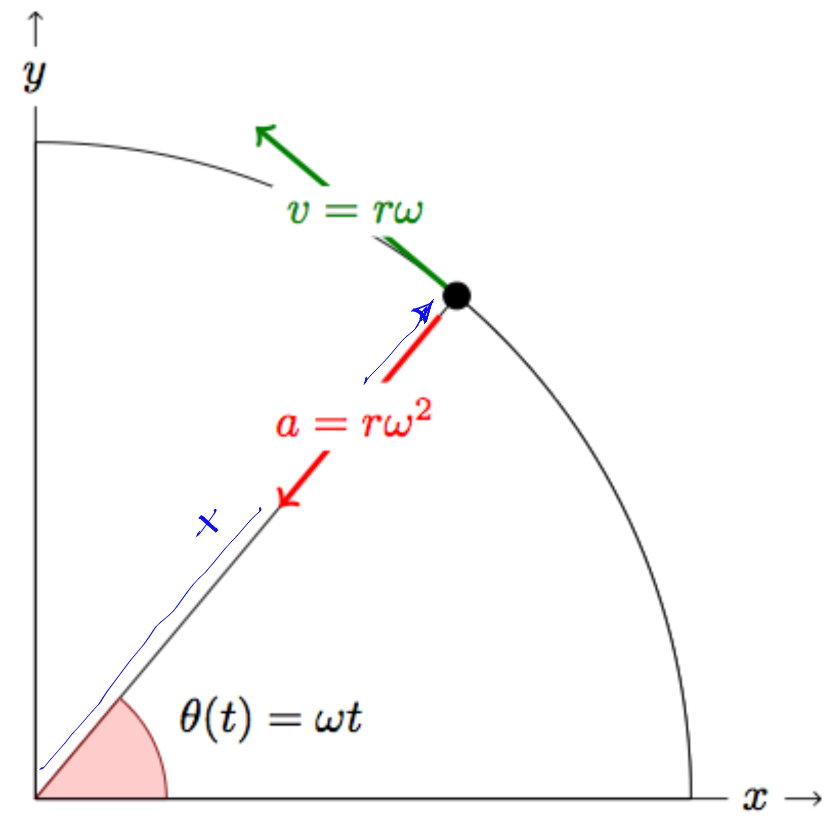
$$\boxed{v = r\,\omega}$$

Période : T

Fréquence : f

Vitessse angulaire : ω

Accélération centripète



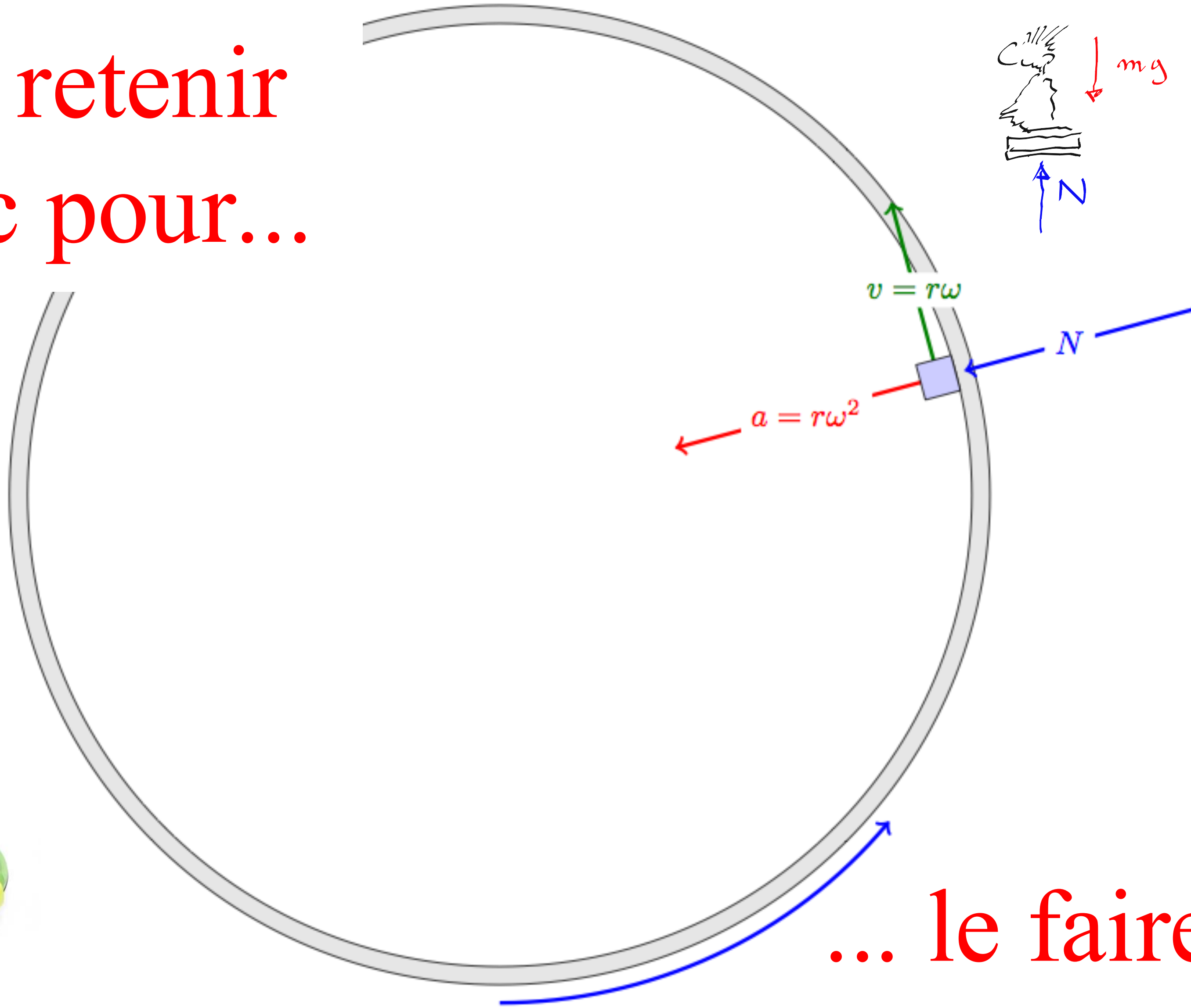
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\omega^2 \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

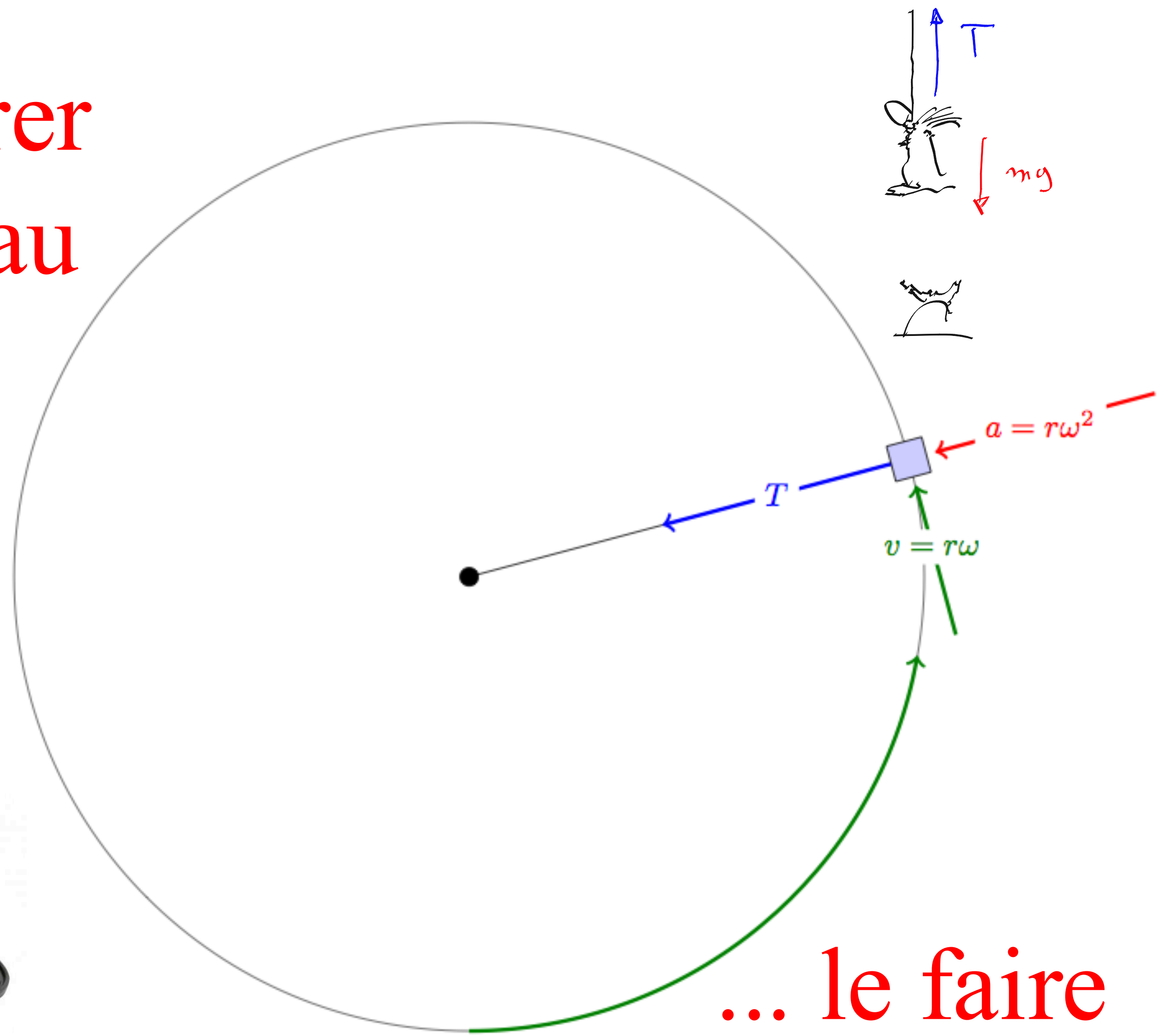
Vitesse tangentielle

Il faut retenir le bloc pour...



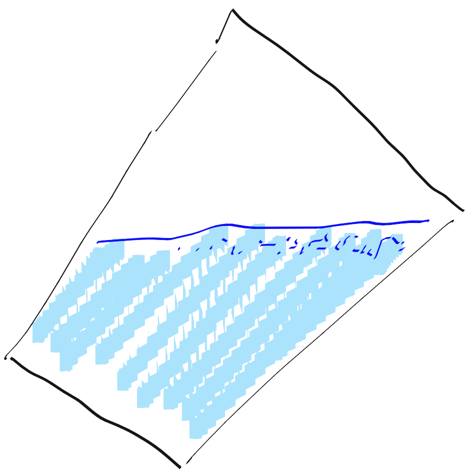
... le faire tourner !

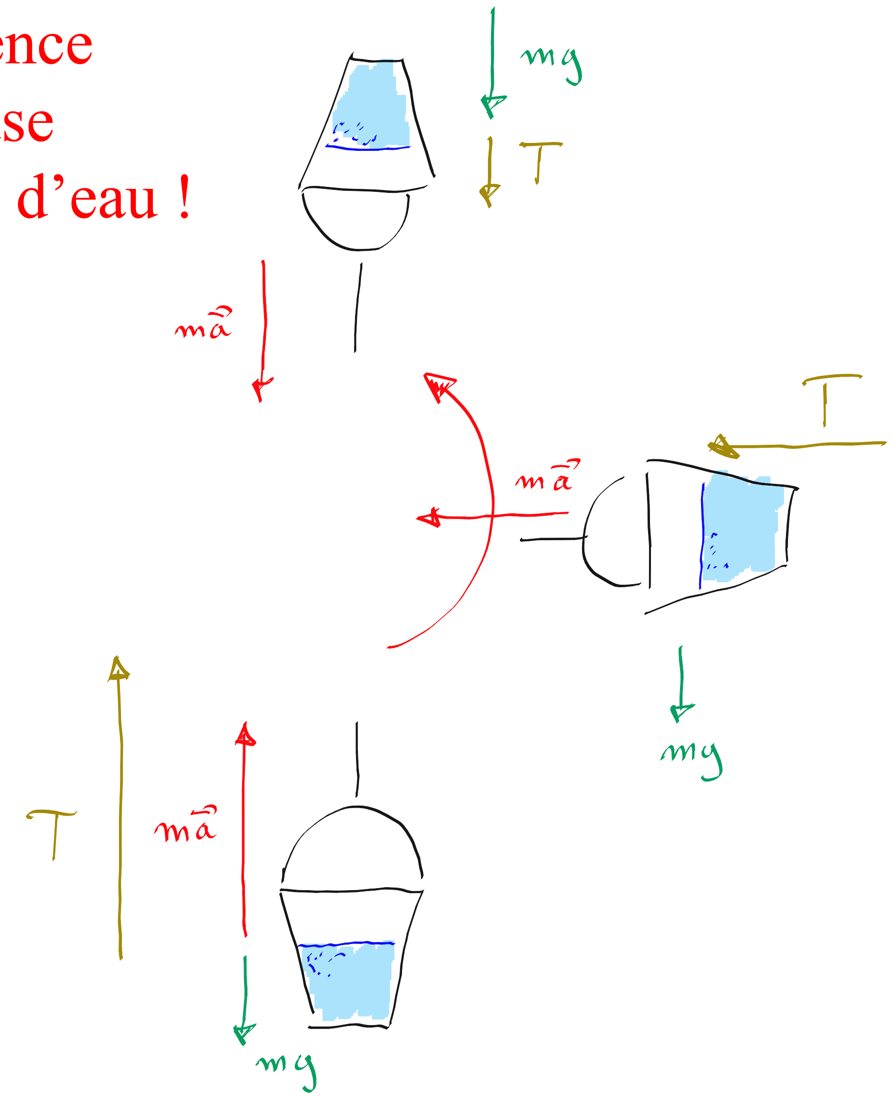
Il faut tirer sur le seau pour...

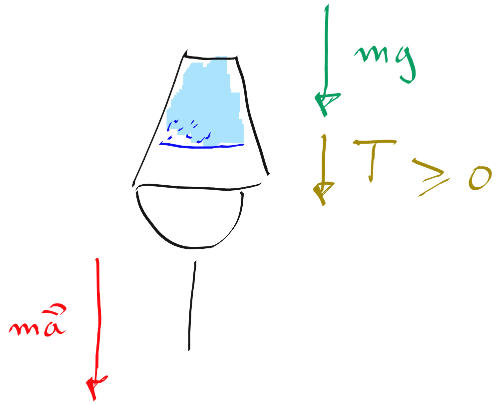


... le faire tourner !

Expérience périlleuse du seau d'eau !







$T = 0$

$$g = \underbrace{R}_{1}\,\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\underset{10}{g}} =$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6.28}{3.1} \simeq 2 \text{ sec}$$

Période
de rotation
du seau !

Calculons
la période de rotation
de la Terre autour du soleil !

$R = 15 \quad 10^{10} \quad [m]$

$M = 2 \quad 10^{30} \quad [kg]$

$G = 67 \quad 10^{-12} \quad [N/m^2 kg^2]$

$$\cancel{m} R \omega^2 = \frac{\cancel{m} M G}{R^2}$$

$$\omega^2 = \frac{MG}{R^3}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{MG}{R^3}$$

$134 = \cancel{9} \times \cancel{15}$

$$\frac{\underbrace{67}\times\underbrace{2}}{\underbrace{15\times15}\times\cancel{15}} \quad 10^{-12}$$

$\cancel{3}\times5\times\cancel{3}\times5$

$$\sqrt{\frac{1}{25}\;10^{-12}} = \frac{1}{5}\;10^{-6}$$

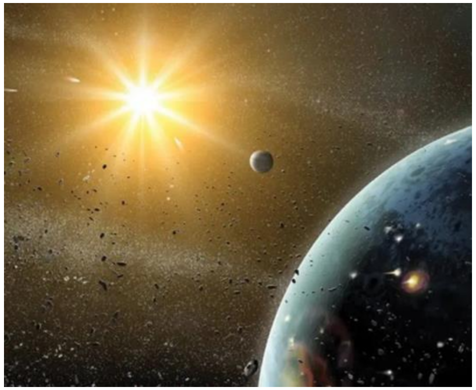
$$\underbrace{\frac{1}{5}\;10^{-6}} = \frac{\cancel{2}\pi}{T}$$

$\cancel{2}\;10^{-7}$

$$T = \frac{\pi \quad 10^{-7}}{24 \times 3600} \simeq \frac{32 \quad 10^{6}}{36 \times 24 \quad 10^{2}} = \frac{\cancel{8}}{9 \times \cancel{8} \times 3}\;10^{4} = \frac{10000}{27}$$

370 jours :-)

8100
1900



Terre

1 tour/année

R = 1.5 10^{10} m

$$f = 3.17\ 10^{-8}\ \text{Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 3.15\ 10^{7}\ \text{s} = 365\ \text{jours}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1.99\ 10^{-7}\ \text{rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 29797\ \text{m/s}$$

$$a = r\,\omega^2 = 0.0059\ \text{m/s}^2$$

L'accélération centripète est toute petite !
C'est cinq fois moins important que celle due à la rotation de la Terre !

Aspirateur
600 tours/minute
R = 10 cm

$$f = 10 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.1 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 62.8 \text{ rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 6.28 \text{ m/s}$$

$$a = r\,\omega^2 = 394.4 \text{ m/s}^2$$

C'est quarante fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur très élevée !

Machine à laver
3600 tours/minute
R = 15 cm

$$f = 60 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.017 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 377 \text{ rad/s}$$

$$v = r\,\omega = 56.5 \text{ m/s}$$

$$a = r\,\omega^2 = 21318 \text{ m/s}^2$$

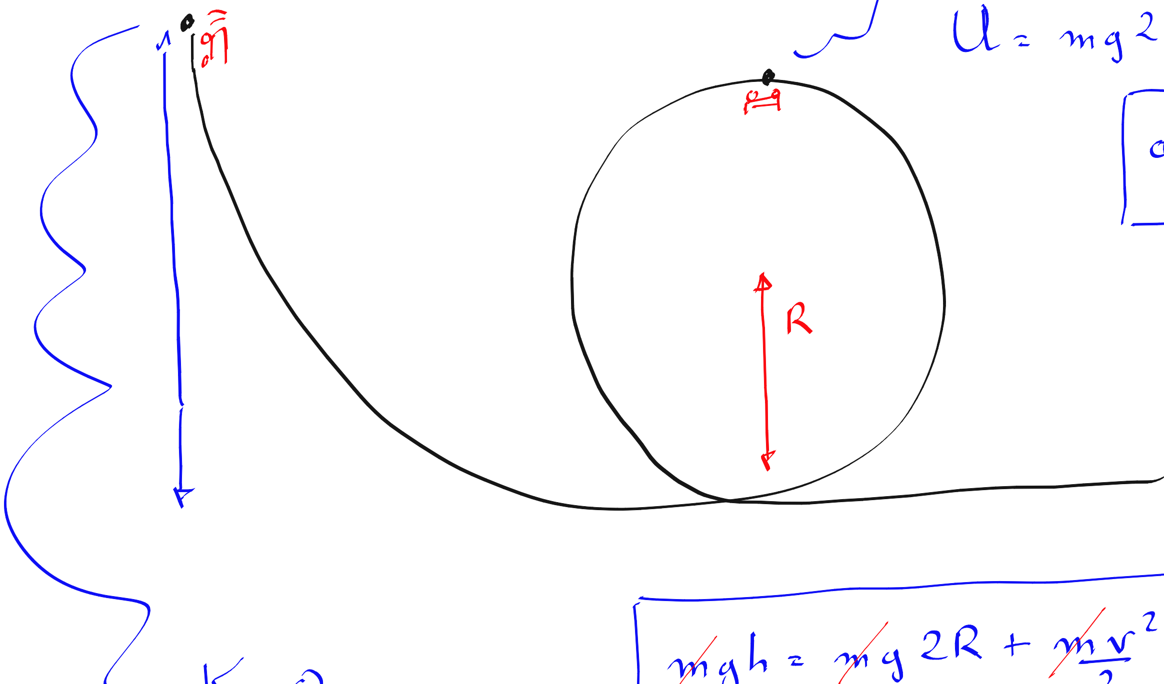
C'est deux mille fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur vraiment très très élevée !

Exercice classique
et pas tout-à-fait réaliste
de tous les livres de physique

$K = \frac{mv^2}{2}$

$U = mg2R$

$\boxed{a_c = \frac{v^2}{R} \geq g}$



$K = 0$

$U = mgh$

$\boxed{\cancel{m}gh = \cancel{m}g2R + \frac{\cancel{m}v^2}{2}}$

$2g(h-2R) = v^2$

$\frac{2\cancel{g}(h-2R)}{R} \geq \cancel{g}$

$2h - 4R \geq 5$

$h \geq 5R/2$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\,m\,\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

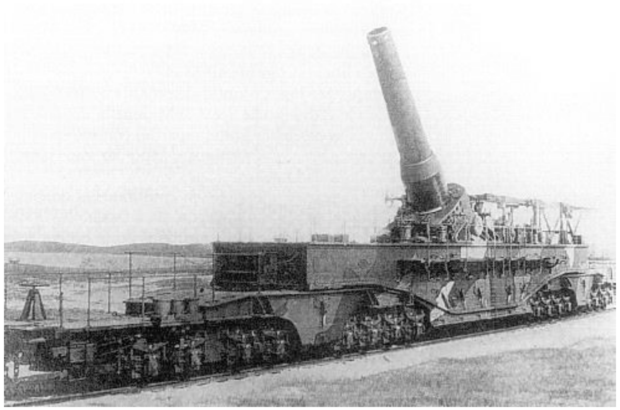
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}}\times m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}$$

- **Dans un mouvement circulaire, l'accélération a toujours une composante centripète. Les variations de la vitesse angulaire génèrent une composante tangentielle.**

- **Seules les forces dont le moment n'est pas nul par rapport au centre de rotation permettent de modifier la vitesse angulaire d'un mouvement circulaire.**

- **Les forces modifient la quantité de mouvement**
  Les moments modifient le moment cinétique

La mécanique d'un point...



$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

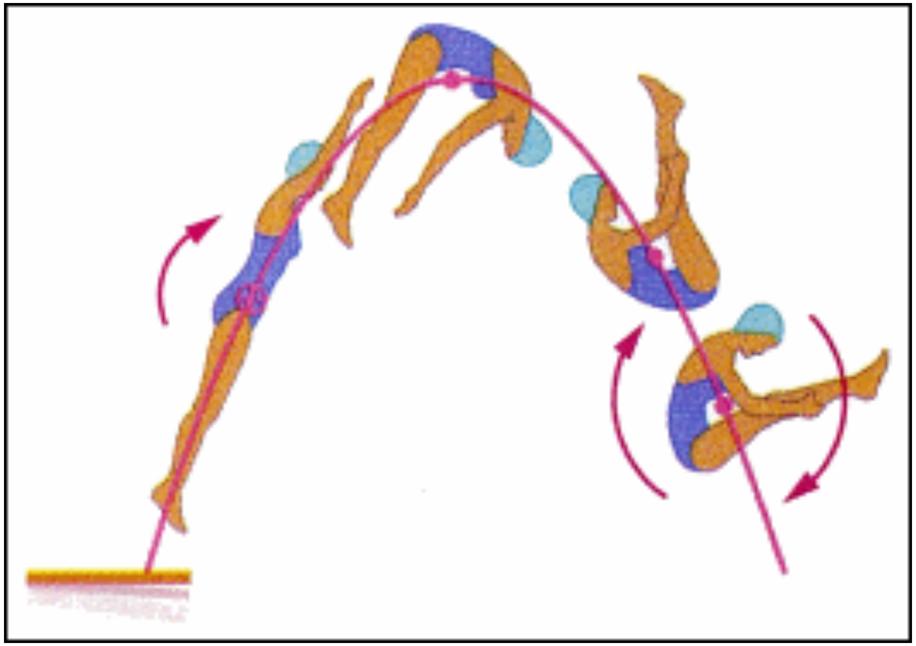
Les deux équations fondamentales !

Bilan de la quantité de mouvement
Bilan de l'énergie cinétique

Dans beaucoup d'applications, on peut se restreindre à l'analyse du mouvement du centre de masse et réduire le corps à un simple point où on a concentré toute la masse !

Ce que nous avons fait jusqu'à présent !
Mais, un skieur, une auto, un bloc, ce n'est pas un point !

La trajectoire de son centre de masse est parabolique, comme notre obus !
Mais, son mouvement est nettement plus complexe avec des vrilles et des pirouettes !



mais un corps,
ce n’est pas un point !

La mécanique d'un corps...

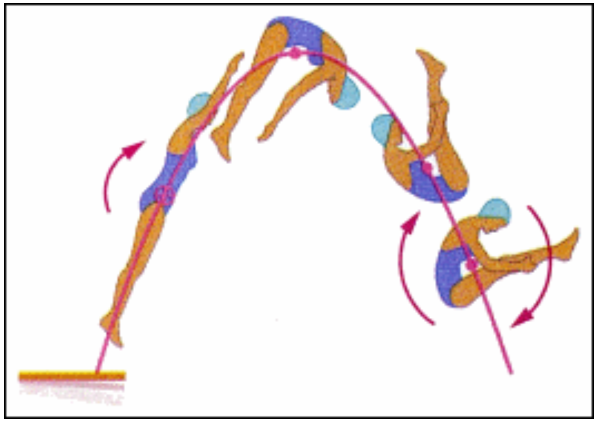
Les trois équations fondamentales !

Bilan de la quantité de mouvement
Bilan de l'énergie cinétique
Bilan du moment cinétique

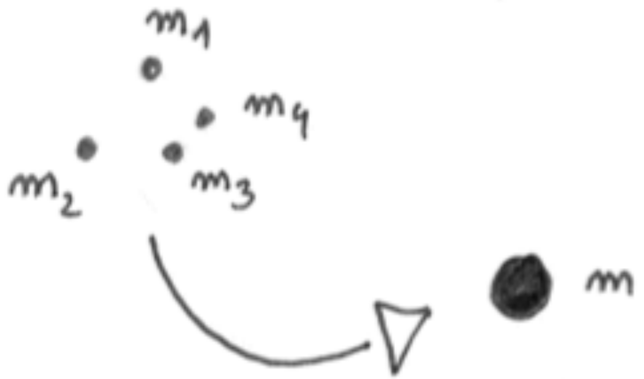
$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$



C'est quoi un point ?

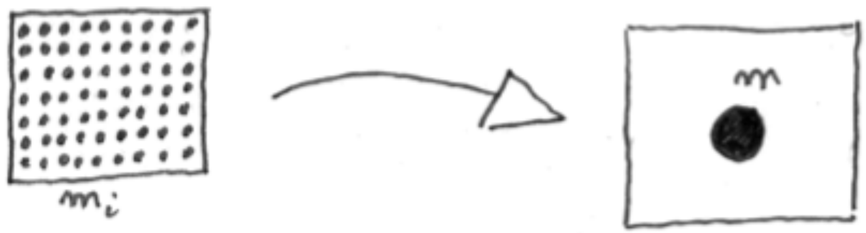


On remplace une série de particules,
par une grosse particule virtuelle
de masse équivalente !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

C'est quoi un point ?

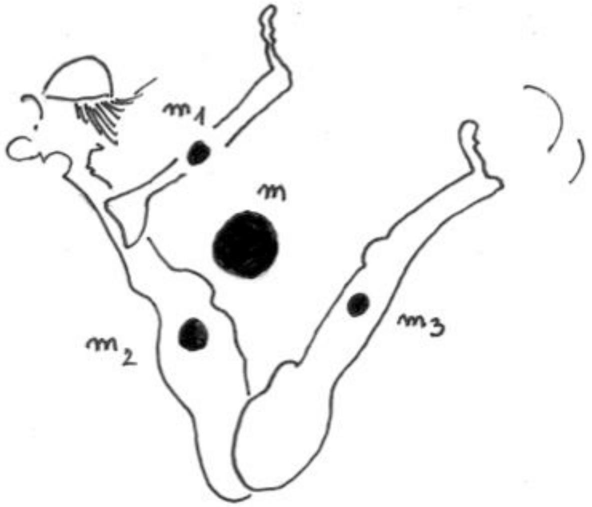


Tant que le bloc ne tourne pas,
la mécanique du point est suffisante
pour résoudre pas mal de problèmes !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

C'est quoi un corps ?



Mais lorsque notre athlète fait des pirouettes, il faut avoir un modèle mécanique plus compliqué !

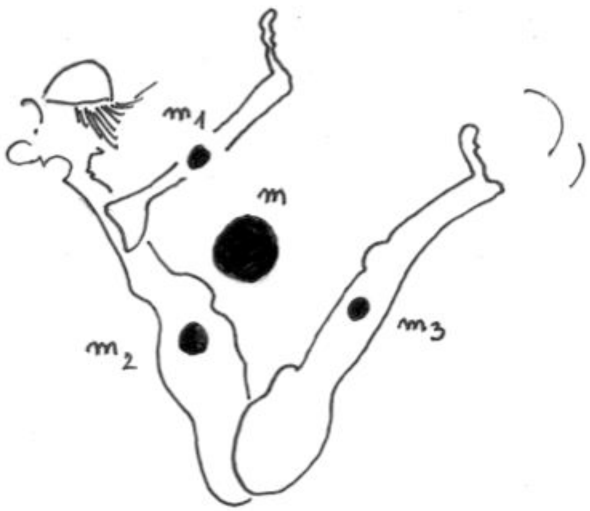
$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

$\vec{x} = 0.58\ \vec{x}_{TRONC} + 0,32\ \vec{x}_{JAMBES} + 0,1\ \vec{x}_{BRAS}$

Le centre de masse...

$0.58 + 0.32 + 0.1 = 1$



La position d'une particule plus grande doit compter davantage !

Tronc-tête : 58% de la masse corporelle
Jambes : 32% de la masse corporelle
Bras : 10 % de la masse corporelle

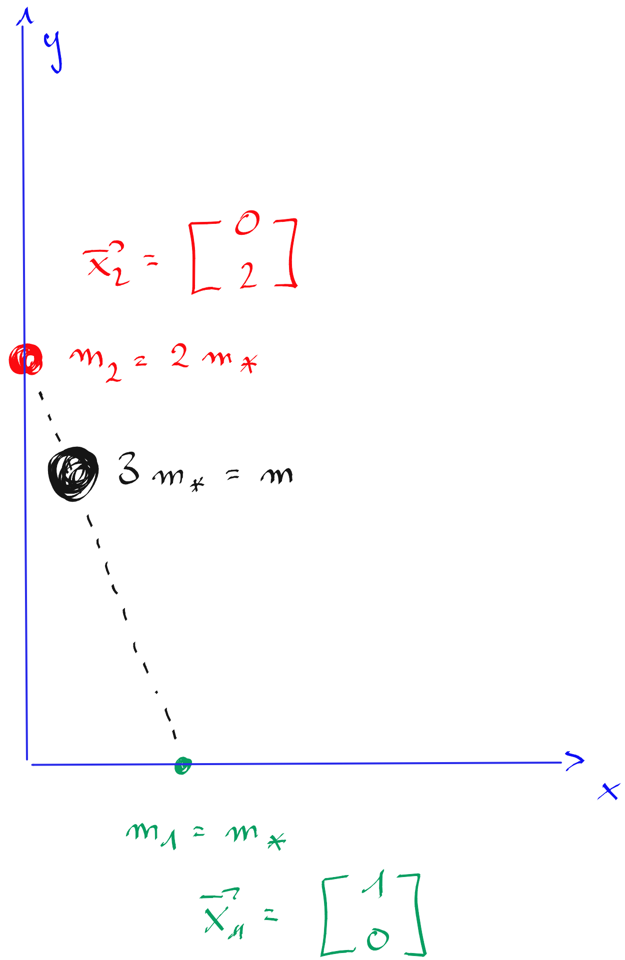
$$m = \sum m_i$$

$$m\,\vec{\mathbf{x}} = \sum \left(m_i\,\vec{\mathbf{x}}_i\right)$$

POSITION DU CENTRE DE MASSE

... est la position moyenne pondérée des positions

Calcul
du centre de masse



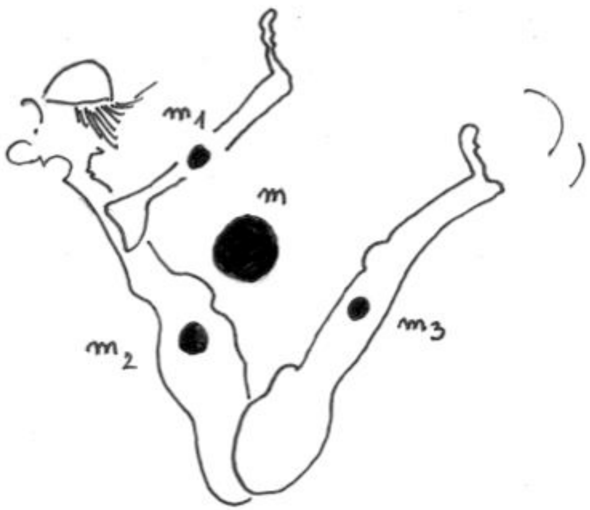
$$\boxed{\begin{aligned} m &= \sum m_i \\ &= m_* + 2\,m_* = 3\,m_* \end{aligned}}$$

$$m\,\vec{x} = \sum m_i\,\vec{x}_i$$

$$\vec{x} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}}$$

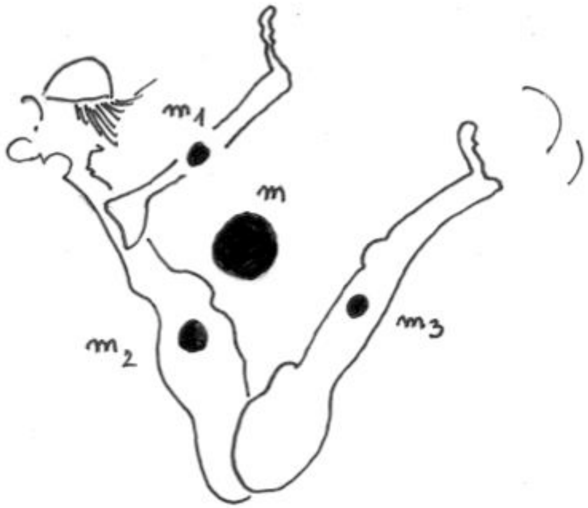
La vitesse du centre de masse...

La position d'une particule plus grande doit compter davantage !



$$
\begin{aligned}
m &= \sum m_i \\
m\,\vec{\mathbf{x}} &= \sum \left(m_i\,\vec{\mathbf{x}}_i\right) \\
m\,\vec{\mathbf{v}} &= \sum \left(m_i\,\vec{\mathbf{v}}_i\right)
\end{aligned}
$$

... est aussi obtenue comme la moyenne pondérée des vitesses



Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}} = \sum \left(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i \right)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}} = \sum \left(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i \right)$$

$$\frac{1}{2}\ m\ v^2 \neq \sum \left(\frac{1}{2}\ m_i\ v_i^2 \right)$$

$$\vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}} \neq \sum \left(\vec{\mathbf{r}}_i \times m\vec{\mathbf{v}}_i \right)$$

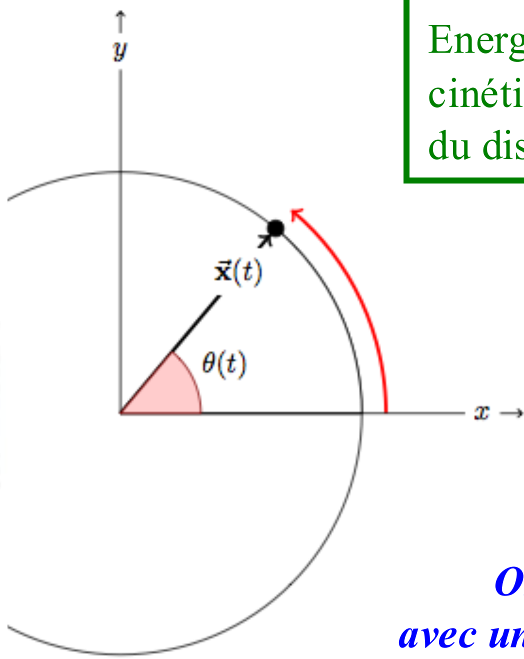
Pour l'énergie
et le moment cinétique,
c'est plus compliqué....

Et l'énergie cinétique de rotation d'un disque ?

$$\boxed{\sum \frac{1}{2} m_i\, v_i^2} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum m_i\, r_i^2\right)}_{I} \omega^2$$

Energie cinétique du disque

Moment d'inertie du corps



Et le centre de masse ne bouge pas !

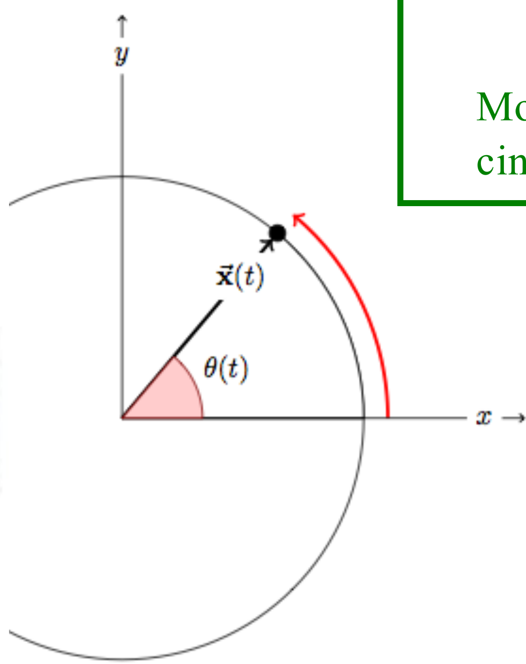
On peut donc avoir une énergie cinétique avec un centre de masse totalement immobile !

Et le moment cinétique de rotation d'un disque ?

$$\boxed{\sum r_i\, m_i\, v_i} = \underbrace{\left(\sum m_i\, r_i^2\right)}_{I} \omega$$

Moment cinétique

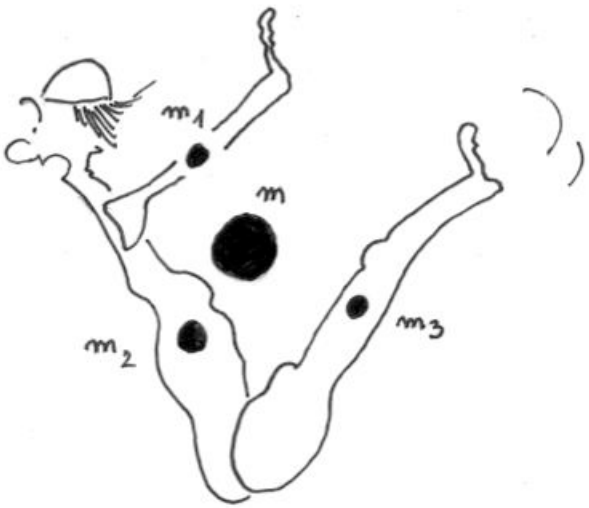
Moment d'inertie du corps



Et le centre de masse ne bouge pas !

Pas de quantité de mouvement !
Mais un moment cinétique non nul car le disque tourne !

En résumé :



$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) = \sum M_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\ m\ \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}} \times m\ \vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

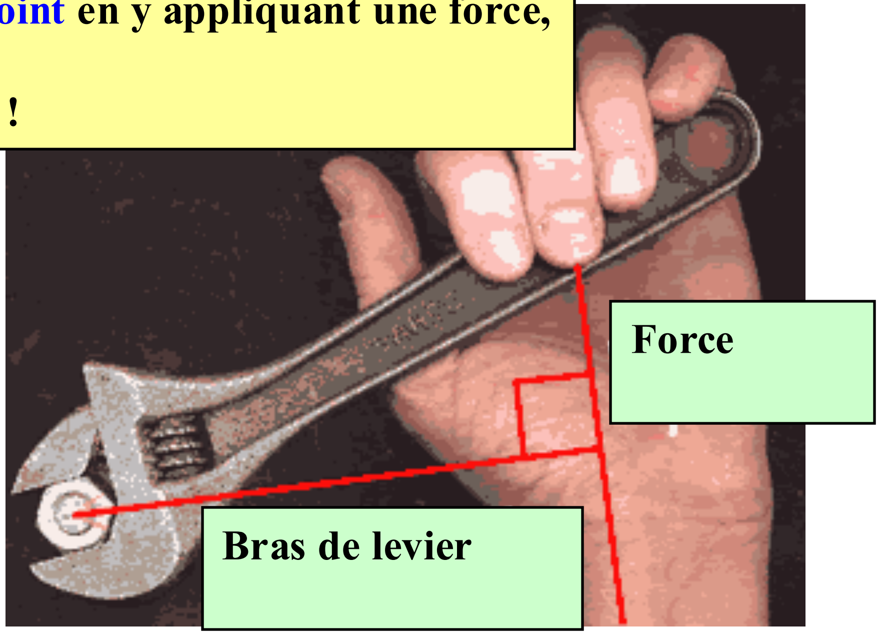
$$m = \sum m_i$$

$$m\ \vec{\mathbf{x}} = \sum \left(m_i\ \vec{\mathbf{x}}_i\right)$$

$$m\ \vec{\mathbf{v}} = \sum \left(m_i\ \vec{\mathbf{v}}_i\right)$$

Ce qui fait tourner la clé, c'est le moment !

Supposons que l'on fixe une barre en un point et
que l'on souhaite la faire tourner autour de ce point en y appliquant une force,
l'accélération angulaire sera proportionnelle
au moment de cette force par rapport à ce point !



$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{bmatrix}$$

$$C = AB\sin(\theta)$$

Cross Product

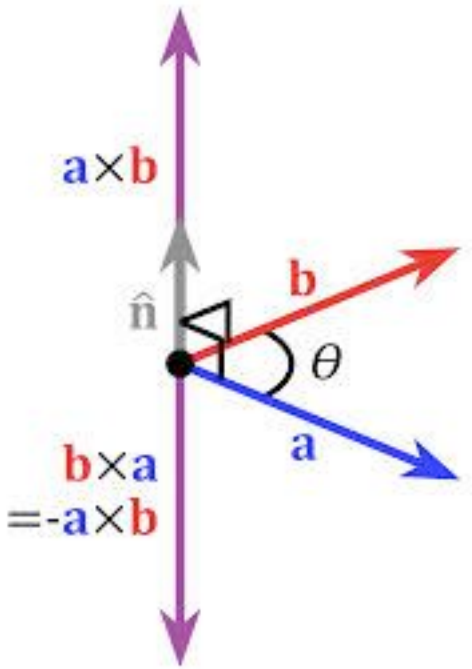
$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

Produit vectoriel de vecteurs

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

Attention !
Le produit vectoriel n'est pas commutatif !

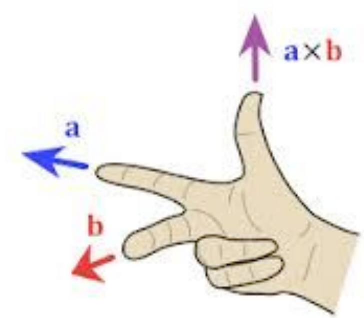


$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{bmatrix}$$

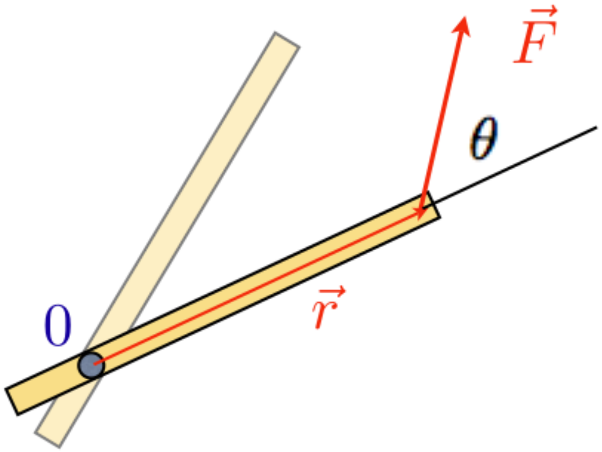
$$C = AB\sin(\theta)$$

Cross Product

Produit vectoriel de vecteurs



Et c'est quoi le moment d'une force par rapport à un point ?



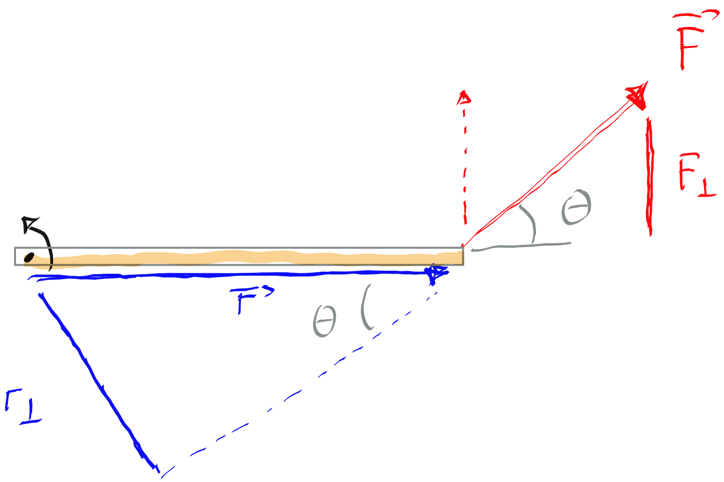
Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\, r_\perp = F_\perp\, r = F r \sin(\theta)$$

Direction du moment = axe de rotation
Norme de moment = vitesse de rotation
Signe du moment = sens de la rotation suivant la fameuse règle de la main droite !

Les 3 manières de calculer le moment d'une force !



$$M_z = r_x F_y - r_y F_x = r F \sin\theta = F_\perp r = F r_\perp$$

Equilibre de rotation

$$\frac{d}{dt}\cancel{\left(I\,\omega\right)} = \sum M_i$$

$$\frac{d}{dt}\cancel{\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)} = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

Equilibre de translation

Etudions d'abord les forces et les moments de corps au repos !

Concept d' équilibre statique

Equilibre de rotation

$$0 = \sum M_i$$

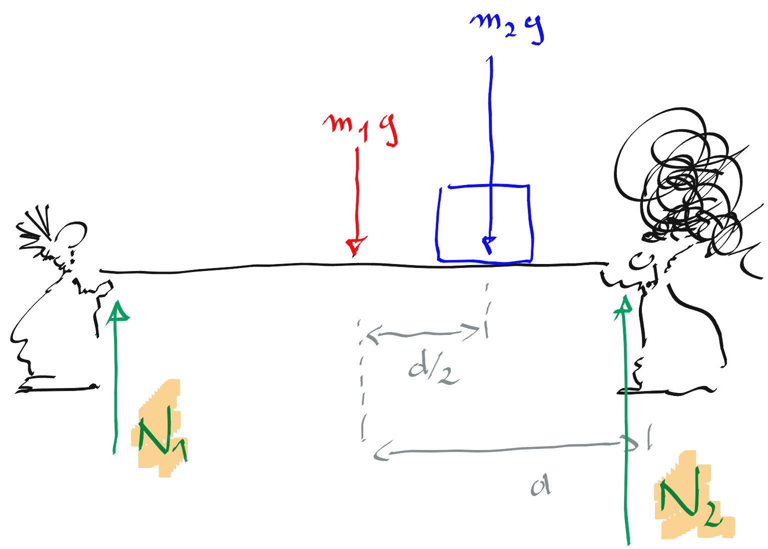
Lorsque le corps ne bouge pas,
son accélération angulaire est nulle
pour n'importe quel point !

Dans ce cas, on peut donc calculer les moments de force par rapport à n'importe quel point alors !

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

Equilibre de translation

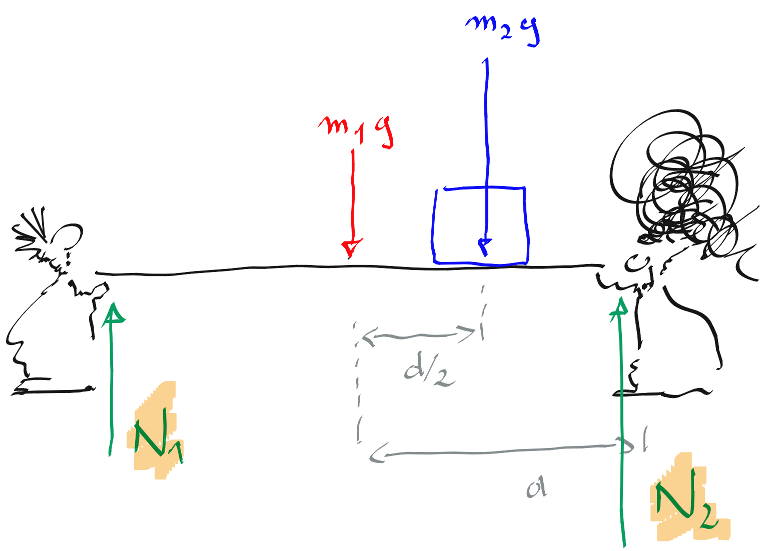
Quelles sont les forces exercées par les deux gars ?



Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

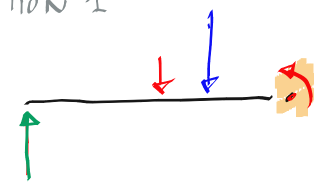
$$0 = \sum M_i$$



$$N_1 + N_2 = m_1 g + m_2 g$$

$$\boxed{\sum F_y = 0}$$

OPTION 1

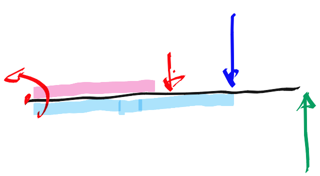


$$\boxed{\sum M = 0}$$

$$0 = -N_1 2\cancel{d} + m_1 g \cancel{d} + m_2 g \cancel{d}/2$$

$$N_1 = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{4}\right) g$$

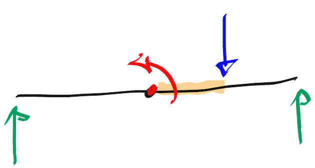
OPTION 3



$$0 = N_2 2\cancel{d} - m_1 g \cancel{d} - m_2 g \frac{3\cancel{d}}{2}$$

$$N_2 = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{3m_2}{4}\right) g$$

OPTION 2

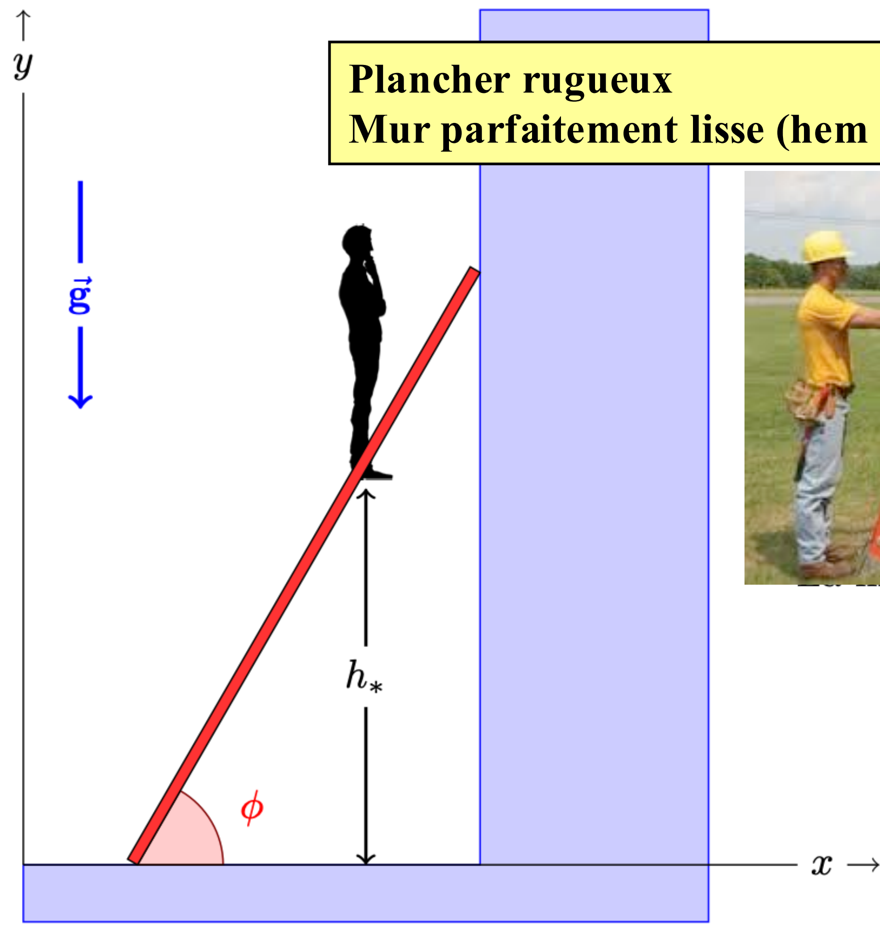


$$0 = N_2 \cancel{d} - N_1 \cancel{d} - m_2 g \cancel{d}/2$$

$$N_2 - N_1 = \frac{m_2 g}{2}$$

Deux équations !
Deux inconnues !

Est-ce que l'échelle va glisser ?



Plancher rugueux
Mur parfaitement lisse (hem :-)

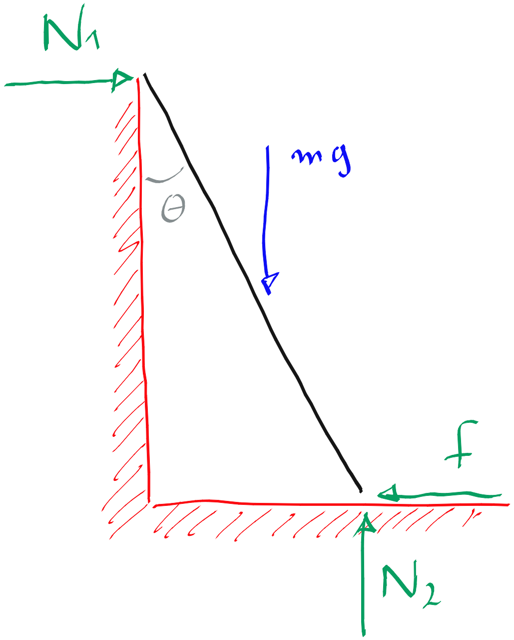
Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

Est-ce que l'échelle va glisser ?

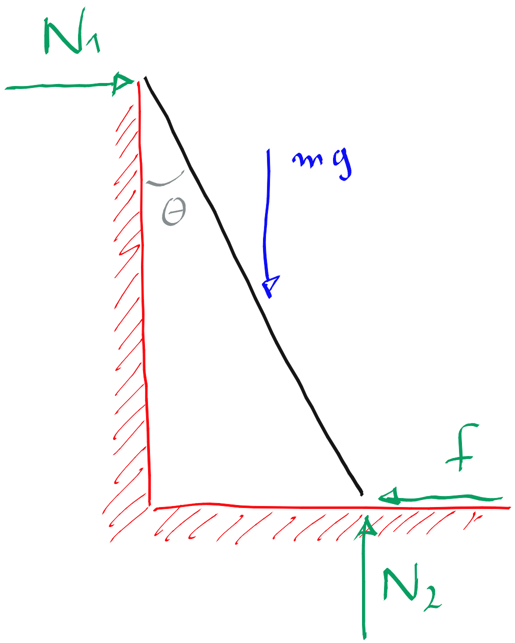
Plancher rugueux
Mur parfaitement lisse (hem :-)



Equilibre statique

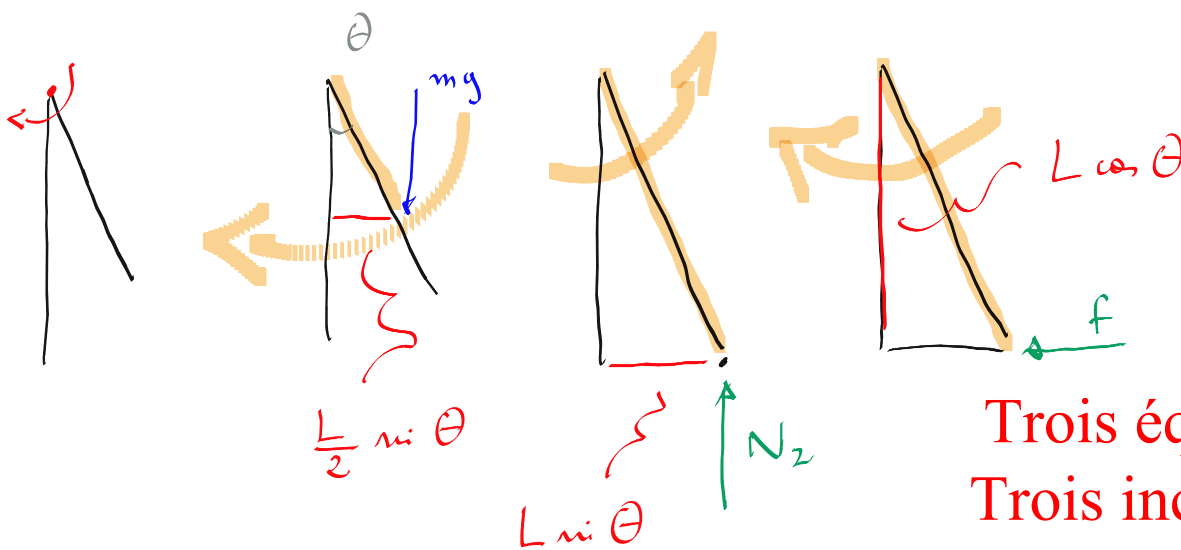
$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$



$$N_2 = mg$$
$$N_1 = f$$

$$0 = -mg\frac{L}{2}\sin\theta + mgL\sin\theta - fL\cos\theta$$



Trois équations !
Trois inconnues !

Par contre, pour un échelle totalement rigide, le problème est mal posé si il y a du frottement sur le sol et sur le mur !

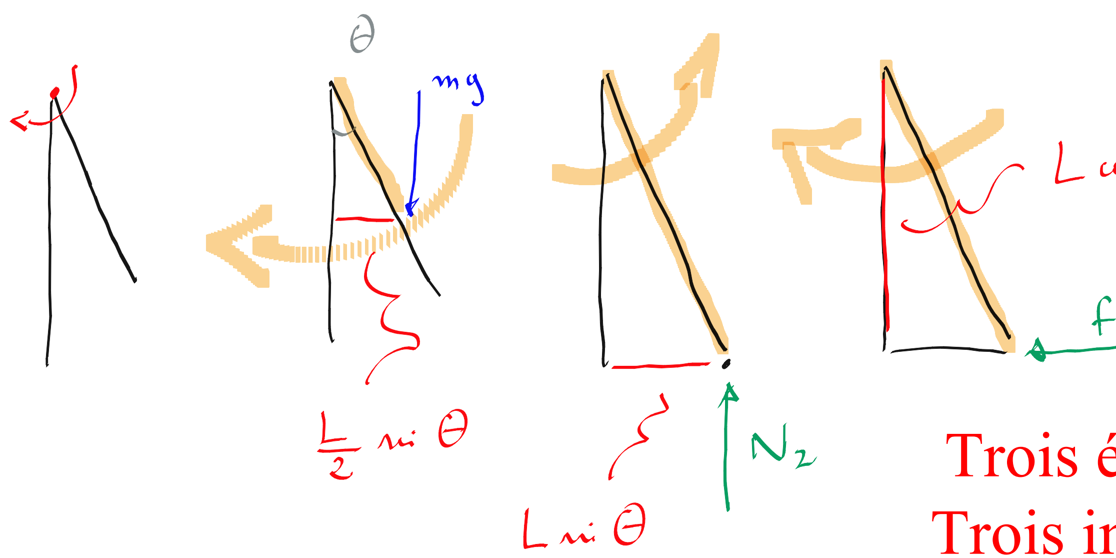
C'est pas toujours aussi simple qu'il n'y paraît !

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum M = 0$$

$N_2 = mg$

$N_1 = f$

$$0 = -mg\frac{L}{2}\sin\theta + mgL\sin\theta - fL\cos\theta$$



Trois équations !
Trois inconnues !

$$0 = -mg\frac{L}{2}\sin\theta + mgL\sin\theta - \overbrace{f}^{\mu_s mg} L\cos\theta$$

$$\operatorname{tg}\theta = 2\mu_s$$

$$\mu_s = 0.6$$

$$\theta \simeq 50°$$

Calcul de l'angle critique !

C'est l'angle où le frottement est maximal !

Mais, pour une échelle totalement rigide, le problème est mal posé si il y a du frottement sur le sol et sur le mur !

Ce n'est pas toujours aussi simple qu'il n'y paraît !

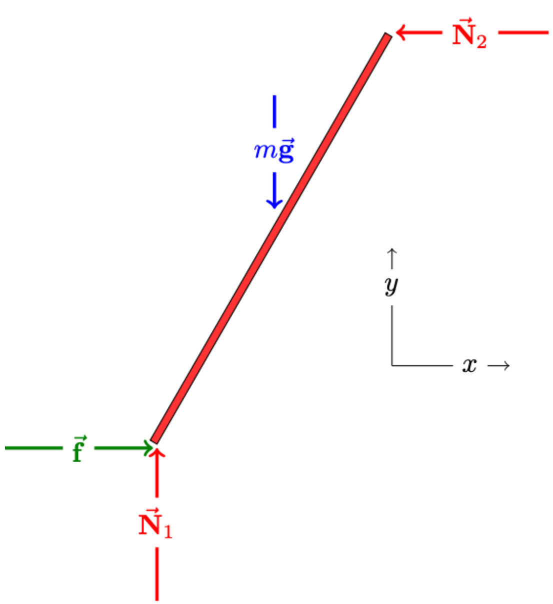
- *Poids de l'échelle :* $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- *Poids de l'ouvrier :* $M\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ (m+M)g \end{bmatrix}$
- *Force de frottement au sol :* $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(m+M)g \\ 0 \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du mur :* $\vec{\mathbf{N}}_2 = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix}$

Trois équations !
Trois inconnues !

$$
\begin{aligned}
0 &= \mu_s mg - N_2 \\
0 &= N_2 L \sin(\phi) - mg\frac{L}{2}\cos(\phi)
\end{aligned}
$$

$$\downarrow$$

$$\mu_* mgL \underbrace{\sin(\phi)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = mg\frac{L}{2}\underbrace{\cos(\phi)}_{\frac{1}{2}}$$



Echelle = 10 kg et 3 mètres
Angle de 60 degrés
Coefficient de frottement statique 0.5
Coefficient de frottement cinétique 0.1
Accélération de la gravité = 10 m/s2

$$\boxed{\mu_* = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.29 < \mu_s}$$

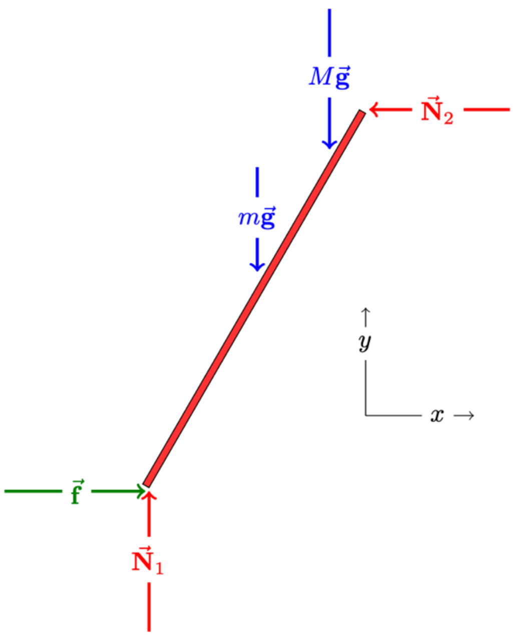
Tout d'abord, est-ce que l'échelle sans l'ouvrier va glisser ?

Ouvrier avec sacoche = 120 kg
Echelle = 10 kg et 3 mètres
Angle de 60 degrés
Coefficient de frottement statique 0.5
Accélération de la gravité = 10 m/s2

$$\mu_s(m+M)gL\sin(\phi) \quad = \quad \underbrace{mg\frac{L}{2}\cos(\phi)}_{\text{MOMENTS DE } mg \text{ ET } N_1} + \underbrace{Mg\frac{h_*}{\sin(\phi)}\cos(\phi)}_{\text{MOMENT DE LA FORCE DE GRAVITE}}$$

$$\downarrow$$

$$L\,\frac{\mu_s(m+M)6-m\sqrt{3}}{4M} \quad = \quad h_*$$



$$\boxed{h_* \quad = \quad \frac{390-10\sqrt{3}}{160} \quad = \quad 2.33 \text{ m}}$$

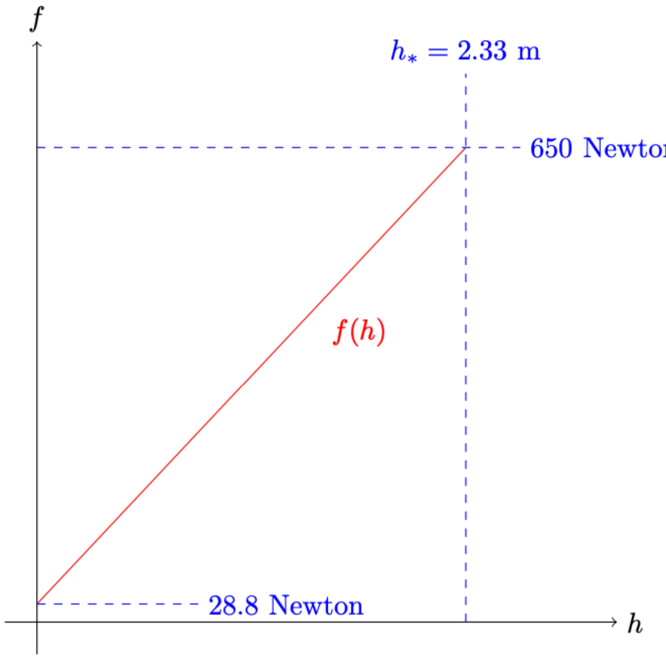
Quelle hauteur l'ouvrier peut atteindre avant que l'échelle ne glisse ?

$$f(h)\ L\sin(\phi) = mg\frac{L}{2}\cos(\phi) + Mg\frac{h}{\sin(\phi)}\cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$f(h) = \underbrace{\frac{mg\cos(\phi)}{2\sin(\phi)}}_{28.8675} + h\ \underbrace{\frac{Mg\cos(\phi)}{L\sin^2(\phi)}}_{266.6667}$$

Ouvrier avec sacoche = 120 kg
Echelle = 10 kg et 3 mètres
Angle de 60 degrés
Coefficient de frottement statique 0.5
Accélération de la gravité = 10 m/s2



Evolution de la force de frottement en fonction de la hauteur de l'ouvrier

- Le moment est le produit du bras de levier par la force.
- L'énergie cinétique d'un corps est la somme de l'énergie du mouvement du centre de masse et de l'énergie de la rotation du corps autour de ce point.
- Pour la rotation d'un corps autour de son centre de masse, les moments de force, le moment cinétique et le moment d'inertie du corps sont l'équivalent des forces, de la quantité de mouvement et de la masse pour le mouvement de ce point !
- Un corps est à l'équilibre si la somme des forces et des moments est nulle : c'est l'équilibre statique.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\ v^2 + \frac{1}{2}I\ \omega^2\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) &= \sum M_i
\end{aligned}$$

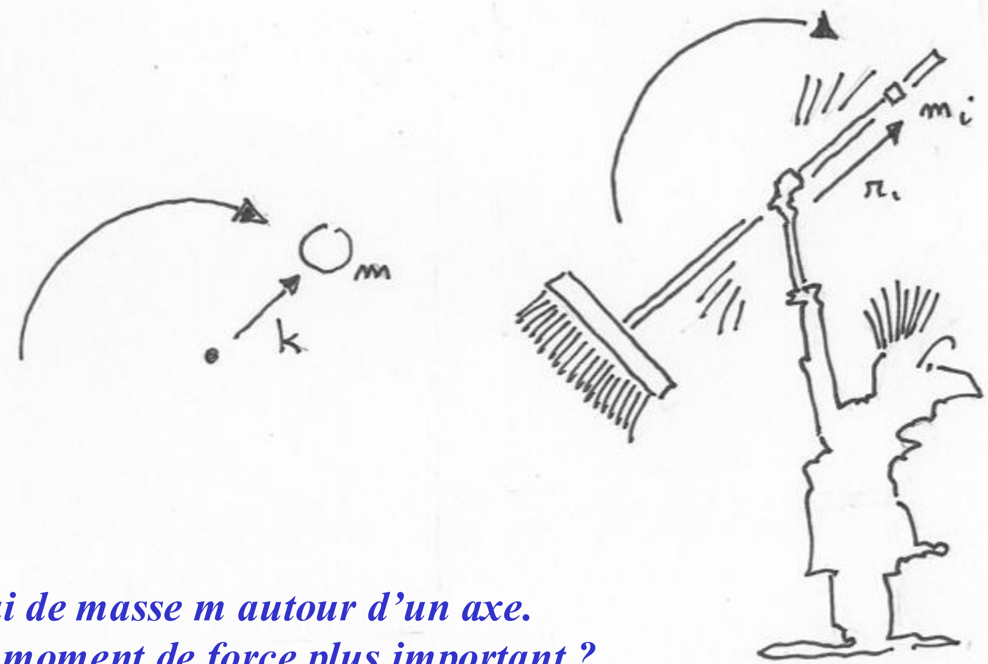
Equilibre statique

$$\begin{aligned}
0 &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
0 &= \sum M_i
\end{aligned}$$

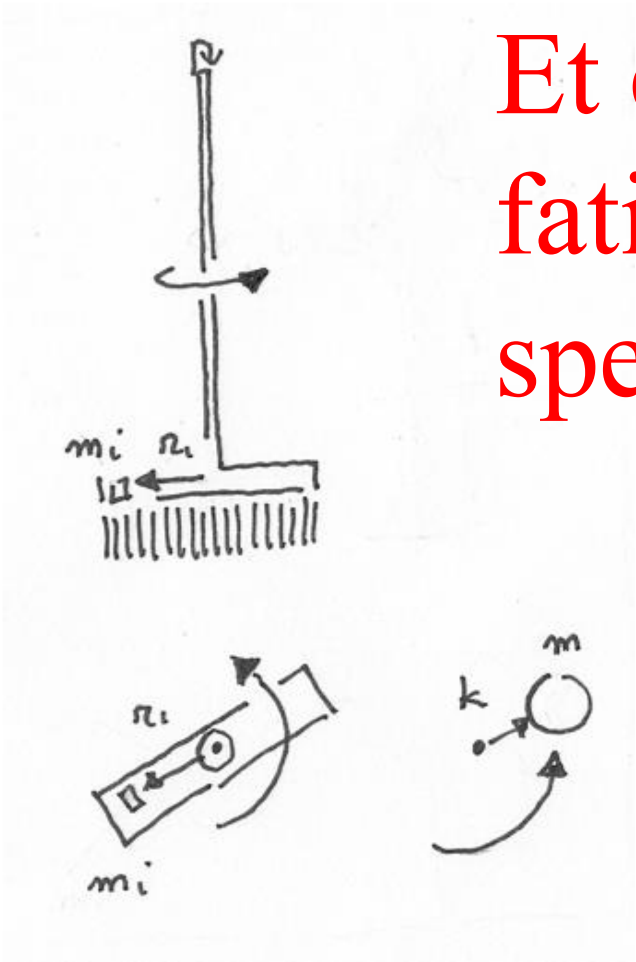
Ne pas oublier !

Qu'est ce qui influence le moment d'inertie ?

Le moment d'inertie dépend de :
- la masse du balai
- la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation



On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?



Et ceci est moins fatiguant et moins spectaculaire !

On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?

Moment d'inertie du plongeur

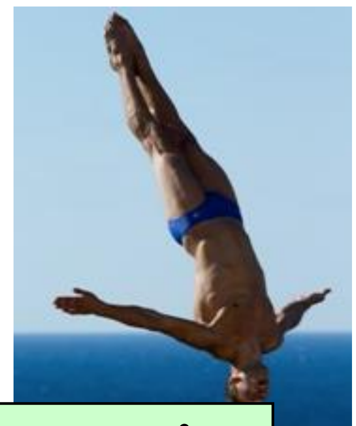
Le moment d'inertie dépend de :

- **la masse du plongeur**
- **la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation**

$I = 12.6$ kg m^2

$I = 23.8$ kg m^2

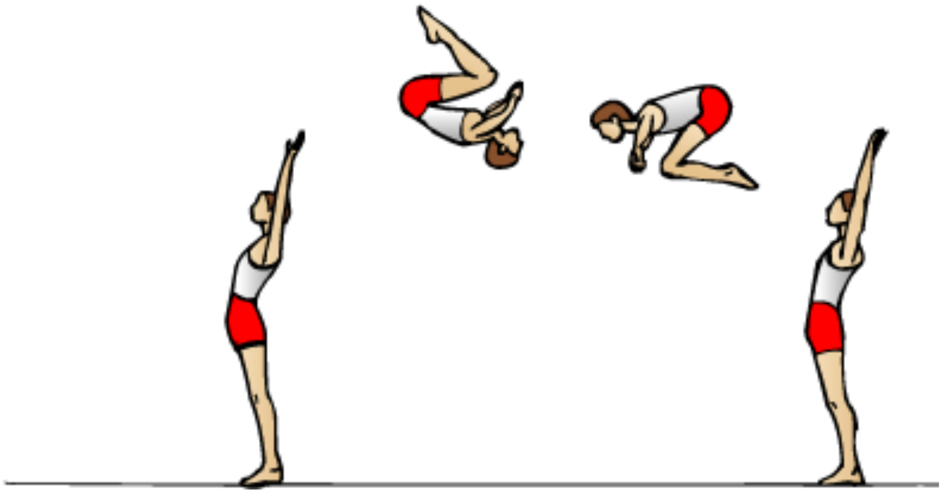
$I = 54.4$ kg m^2

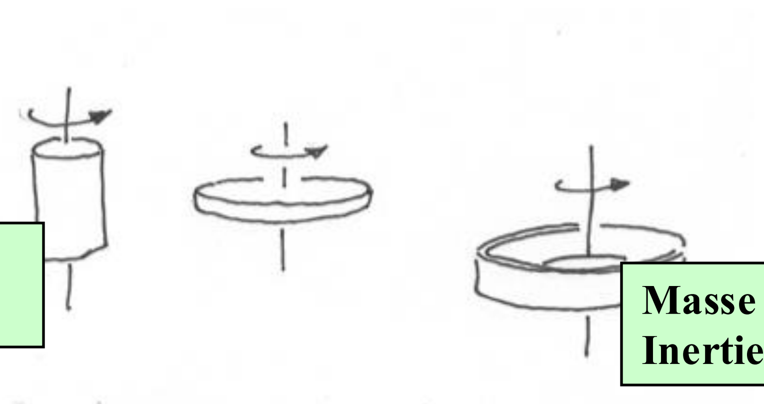


Moment d'inertie

$$I = \sum m_i \, r_i^2$$

Pourquoi est-ce que
la gymnaste se recroqueville
pour faire la pirouette ?





Masse identique
Inertie minimale

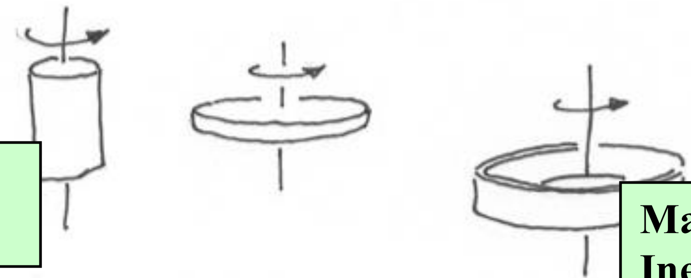
Masse identique
Inertie maximale

Cylindres, disques, anneaux...
Veaux, vaches, cochons !

Une bibliothèque de moments d'inertie

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i \, r_i^2$$



Masse identique
Inertie minimale

Masse identique
Inertie maximale

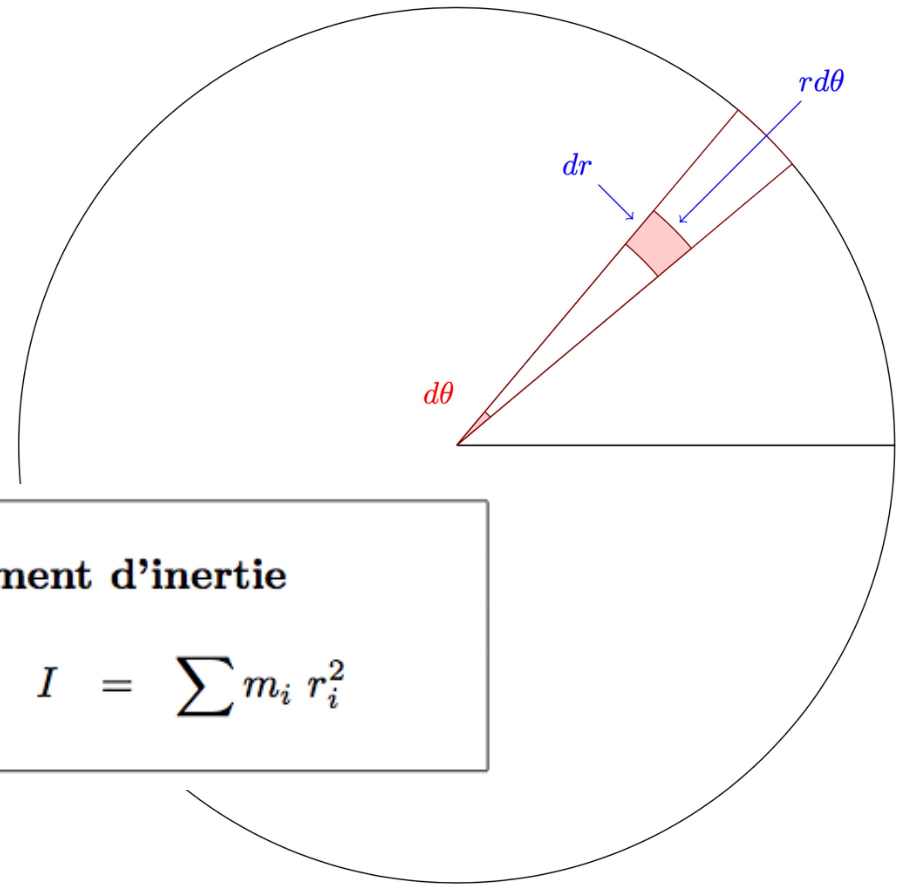
Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m\,R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m\,\frac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m\,\frac{L^2}{12}$

Intégration des moments d'inertie



Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\, r_i^2$$

$$m = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho\, dr\, r d\theta\, dz = 2\pi L \rho \int_0^R r dr = 2\pi L \rho \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \rho \pi L R^2$$

$$I = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho\, r^2\, dr\, r d\theta\, dz = 2\pi L \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi L \rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\rho \pi L R^4}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

Théorème de Huygens
Moment d'inertie quelconque

$$I_h = \sum m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{h}}\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{h}}\right)$$

$$= \underbrace{\sum m_i\, \vec{\mathbf{r}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}}_i}_{=I} + \underbrace{\sum m_i\, \vec{\mathbf{h}} \cdot \vec{\mathbf{h}}}_{=mh^2} + 2\left(\cancel{\underbrace{\sum m_i\, \vec{\mathbf{r}}_i}_{=0}}\right) \cdot \vec{\mathbf{h}}$$

En vertu de la définition du centre de masse !

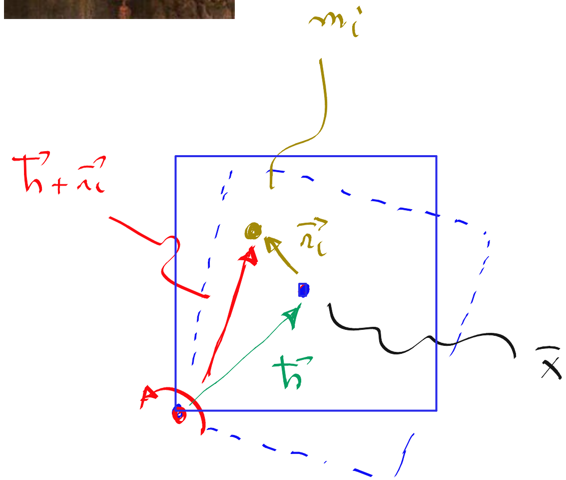
Une conséquence immédiate de ce théorème est qu'il est toujours moins coûteux (en énergie) de faire tourner un corps autour d'un axe passant par le centre de masse.

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m\, h^2 + I$$

Théorème de Huygens ou des axes parallèles...

I MOMENT D'INERTIE POUR TOURNER AUTOUR DU CENTRE DE MASSE



$$I_h = \sum_i m_i (\vec{h}+\vec{r}_i)\cdot(\vec{h}+\vec{r}_i)$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i \underbrace{\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i}_{r_i^2}}_{I} + \underbrace{\sum m_i}_{m}\,\underbrace{\vec{h}\cdot\vec{h}}_{h^2} + \cancel{\underbrace{2\sum m_i\,\vec{h}\cdot\vec{r}_i}}$$

$$m\vec{x} = \sum m_i \vec{x}_i \qquad m = \sum m_i$$

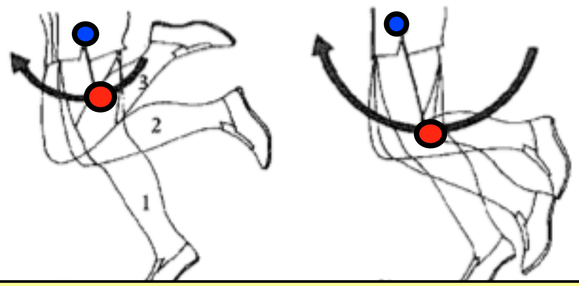
$$\underbrace{2\vec{h}\cdot\sum m_i \underbrace{\vec{r}_i}_{\vec{x}_i-\vec{x}}}_{=0}$$

$$\underbrace{m}_{\sum m_i}\vec{x} = \sum m_i \vec{x}_i \quad\Rightarrow\quad \sum m_i(\underbrace{\vec{x}_i-\vec{x}}_{\vec{r}_i}) = 0$$

Moment d'inertie de la jambe par rapport à la hanche

Lors d'un sprint, le coureur va chercher à ramener ses jambes le plus rapidement possible en avant.

Il va attirer le talon vers le haut durant la phase d'oscillation.
Le moment d'inertie par rapport à la hanche est diminué.



Pour les courses de fond, le coureur va dépenser moins d'énergie à relever le talon.

Le moment d'inertie par rapport à la hanche reste plus grand.
La vitesse est évidemment aussi moins rapide !

Moments

$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

Forces

La cause :
la force !

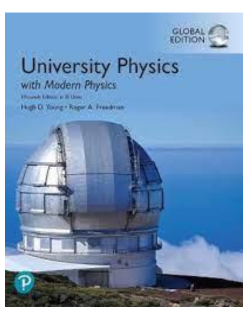
Résistance au mouvement = masse

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)} = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}_i}$$

La conséquence :
l'accélération !

Quelle est la voiture qui va accélérer le plus vite pour la même force motrice ?

Linear Momentum



Bilan de la quantité de mouvement

La cause :
le moment de force !

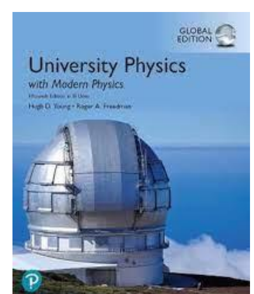
Résistance à la rotation
= moment d'inertie

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right)} = \boxed{\sum M_i}$$

La conséquence :
l'accélération angulaire !

Bilan du moment cinétique

Que fait la danseuse pour tourner plus vite sur elle-même ?



Angular Momentum

- **La masse mesure la résistance d'un corps à une accélération causée par une force.**
- **Le moment d'inertie mesure la résistance d'un corps à une accélération angulaire causée par un moment de force.**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\,\vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\,v^2 + \tfrac{1}{2}I\,\omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\,\omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}$$

Equilibre statique

$$\begin{aligned}
0 &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
0 &= \sum M_i
\end{aligned}$$

Le MRUA :-)

$$
\begin{aligned}
y''(t) &= a \\
y'(t) &= \overbrace{v_0 + a\,t}^{v(t)} \\
y(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a\,t^2}{2}
\end{aligned}
$$

**Des millions de gens ont vu tomber une pomme,
Newton est le seul qui se soit demandé pourquoi...
(Bernard Baruch)**

Le MCUA :-)

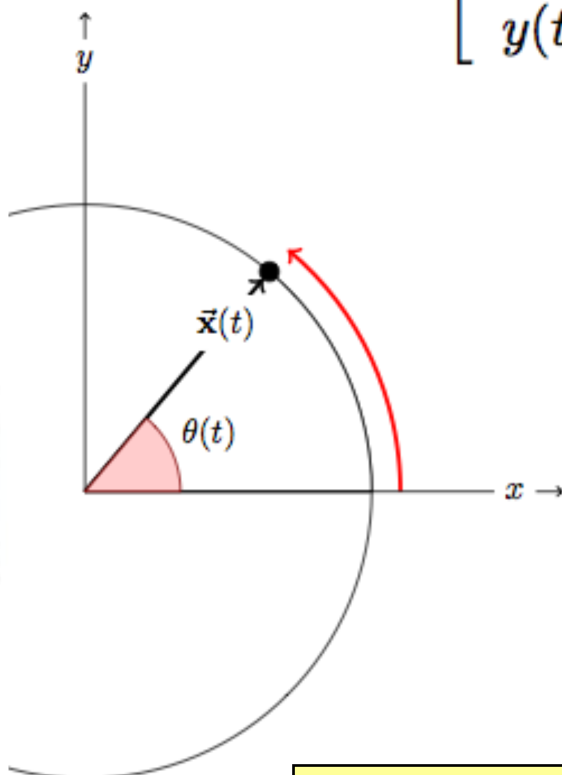
$$
\begin{aligned}
\theta''(t) &= \alpha \\
\theta'(t) &= \overbrace{\omega_0 + \alpha\, t}^{\omega(t)} \\
\theta(t) &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha\, t^2}{2}
\end{aligned}
$$

Maintenant, faisons strictement et exactement la même chose avec un mouvement circulaire !

Définissons le MCUA !

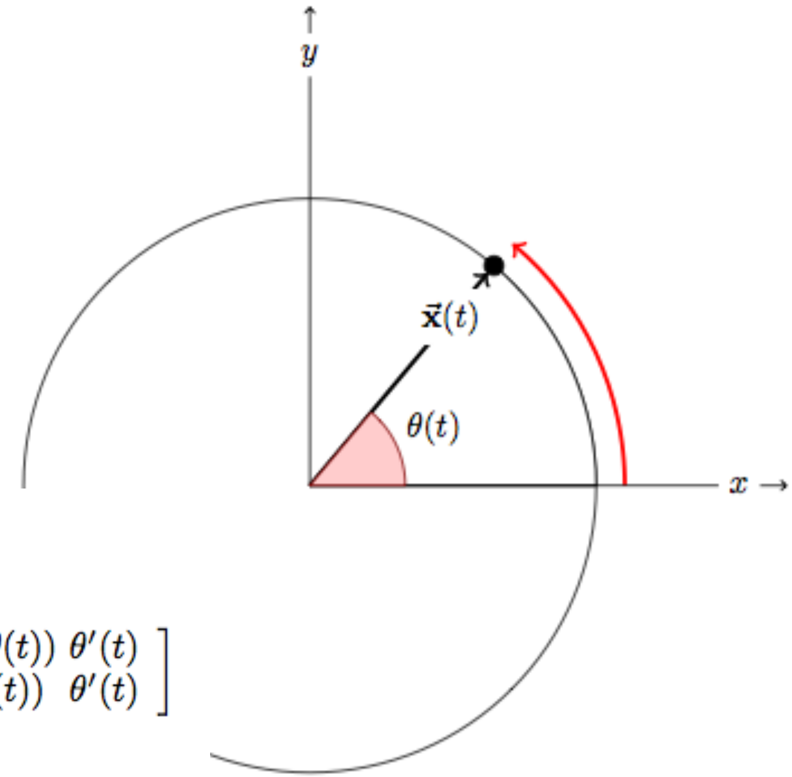
Le MCUA :-)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Mouvement circulaire non-uniforme...
Vitesse angulaire non-constante
Accélération angulaire constante

Calculons la vitesse et l'accélération !



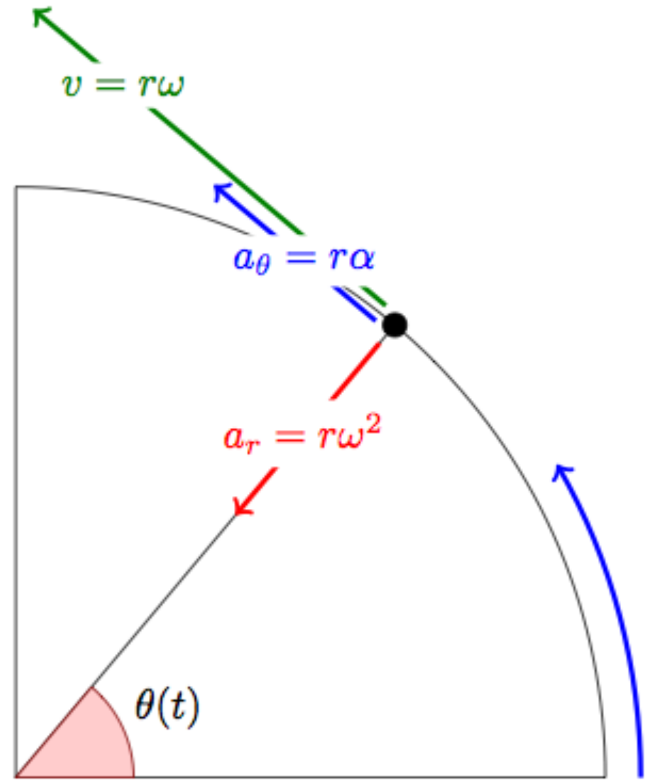
$$\vec{\mathbf{v}}(t) \quad = \quad r\,\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) \quad = \quad r\omega'(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t))\ \theta'(t) \\ -\sin(\theta(t))\ \theta'(t) \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$= \quad r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

La vitesse est toujours bien tangente au mouvement !
Mais son module est désormais variable
car la vitesse angulaire n'est pas constante !



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

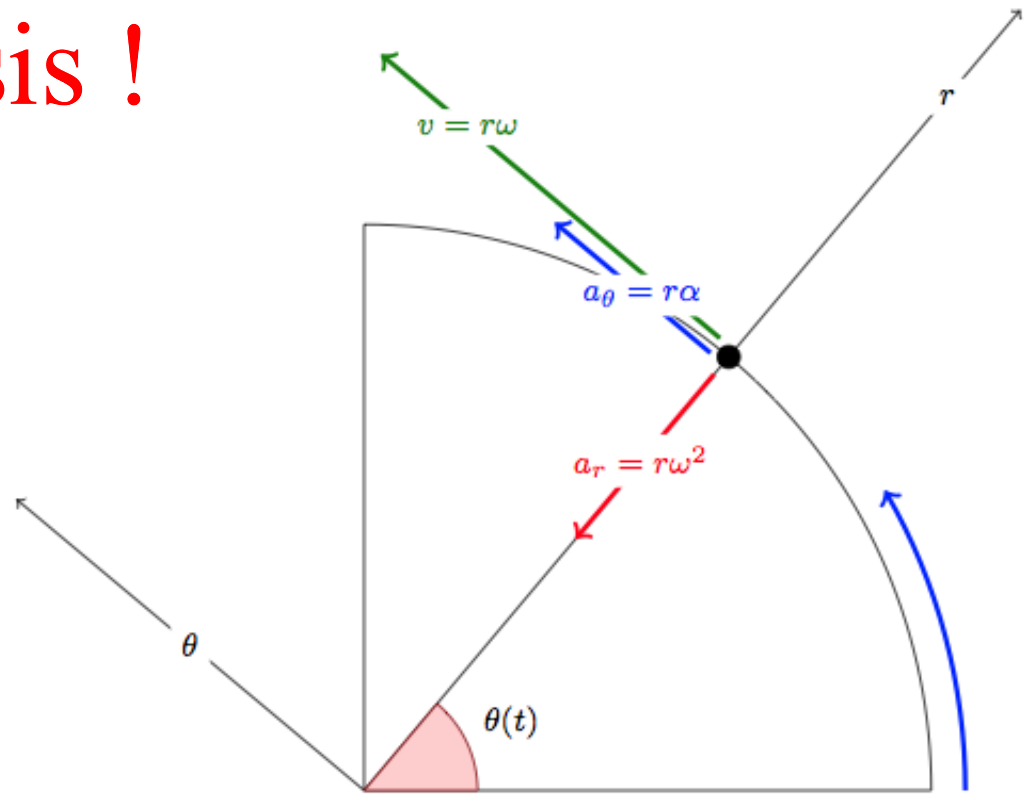
Accélération tangentielle

Accélération centripète

Avec des axes bien choisis !

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

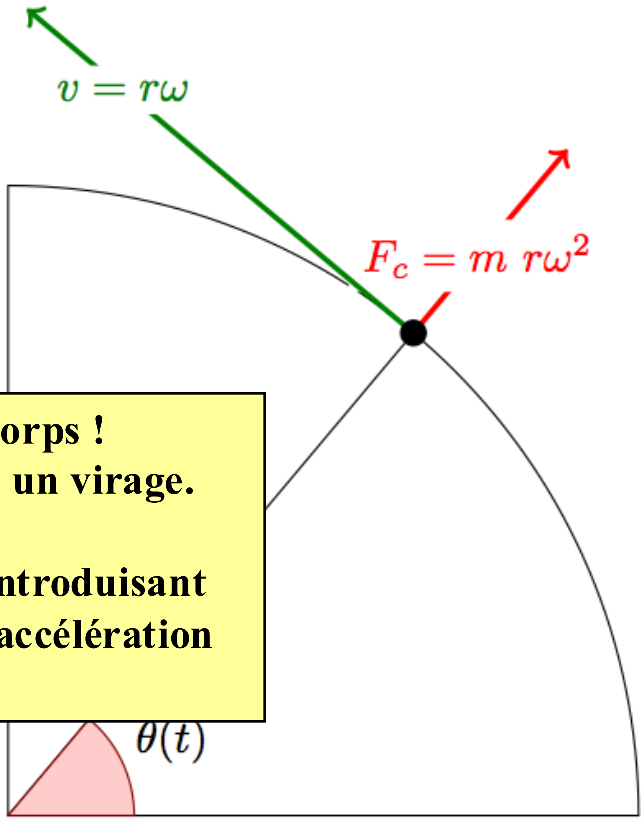
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$



Vitesse : $v = r\omega$ [m/s]

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$ [m/s^2]

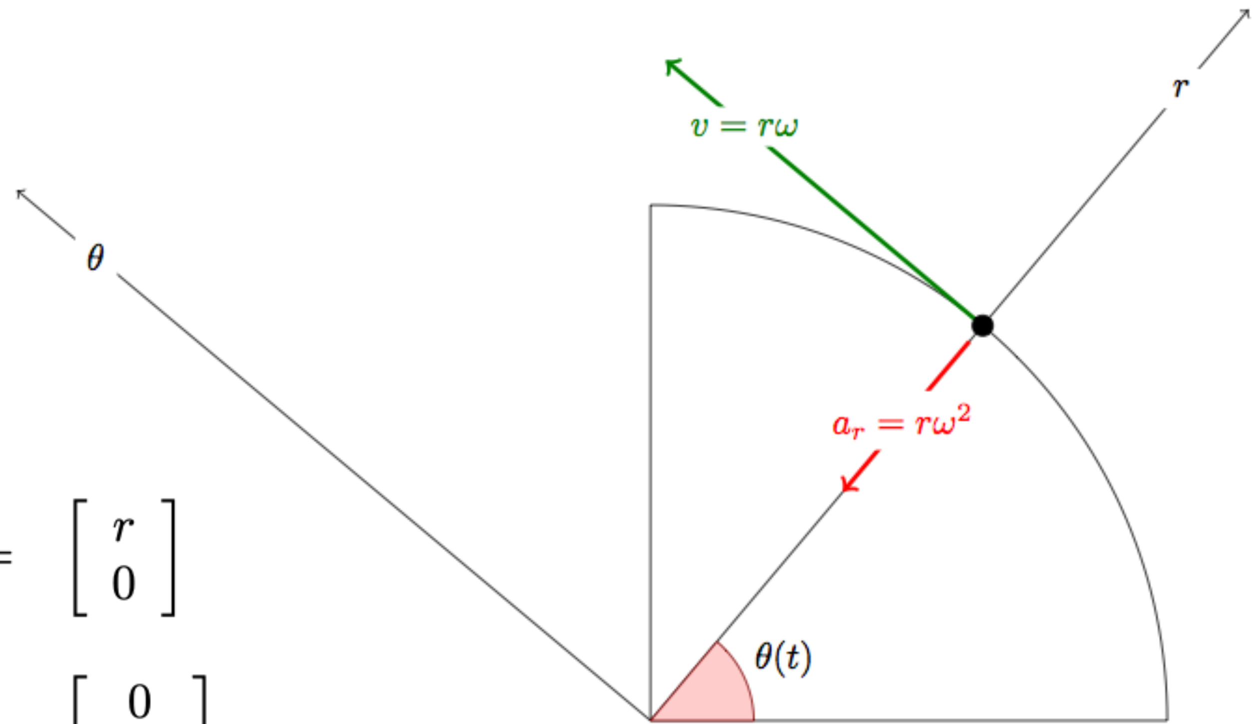
Vitesse angulaire ω [radians/s] et accélération angulaire α [radians/s^2]



On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.

Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant une pseudo-force centrifuge qui aura le même effet que l'accélération centripète qu'on obtient dans un repère fixe !

Remplacer
l'accélération centripète
par la pseudo-force centrifuge !



$$\vec{\mathbf{x}}(t) : \begin{bmatrix} x_r \\ x_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) : \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

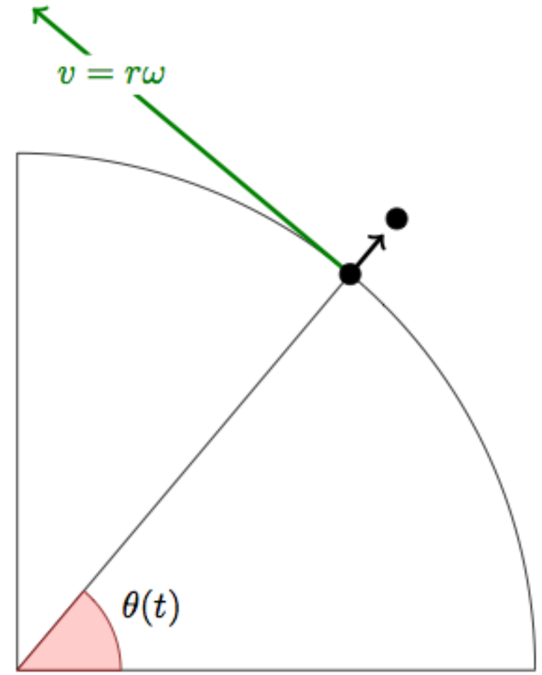
La vitesse
est-elle toujours
la dérivée de la position ?

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = r\ \vec{\mathbf{e}}_r(t)$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) = r\ \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_r}{dt}(t)}_{\omega\ \vec{\mathbf{e}}_\theta(t)}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) = r\ \omega\ \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_\theta}{dt}(t)}_{-\omega\ \vec{\mathbf{e}}_r(t)}$$

Oui, oui, oui !
La vitesse est bien
la dérivée de la position !



$$\vec{\mathbf{x}}(t) = r(t)\ \vec{\mathbf{e}}_r(t)$$

Et si on bouge radialement sur un plateau qui tourne ?

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}(t) = r'(t)\ \vec{\mathbf{e}}_r(t) + r(t)\ \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_r}{dt}(t)}_{\omega\ \vec{\mathbf{e}}_\theta(t)}$$

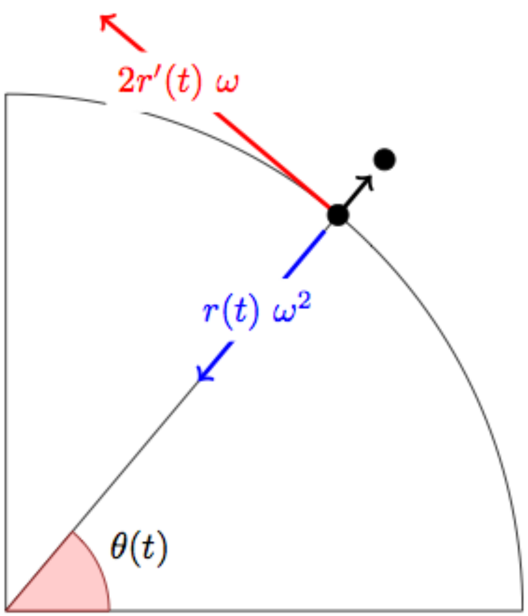
Avec un peu d'algèbre
un brin fastidieuse...

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) \quad = \quad r''(t)\ \vec{\mathbf{e}}_r(t) + r'(t)\ \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_r}{dt}(t)}_{\omega\ \vec{\mathbf{e}}_\theta(t)} + r'(t)\ \omega\ \vec{\mathbf{e}}_\theta(t) + r(t)\ \omega\ \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_\theta}{dt}(t)}_{-\omega\ \vec{\mathbf{e}}_r(t)}$$

$$= \quad r''(t)\ \vec{\mathbf{e}}_r(t) + 2r'(t)\ \omega\ \vec{\mathbf{e}}_\theta(t) - r(t)\ \omega^2\ \vec{\mathbf{e}}_r(t)$$

Accélération de Coriolis

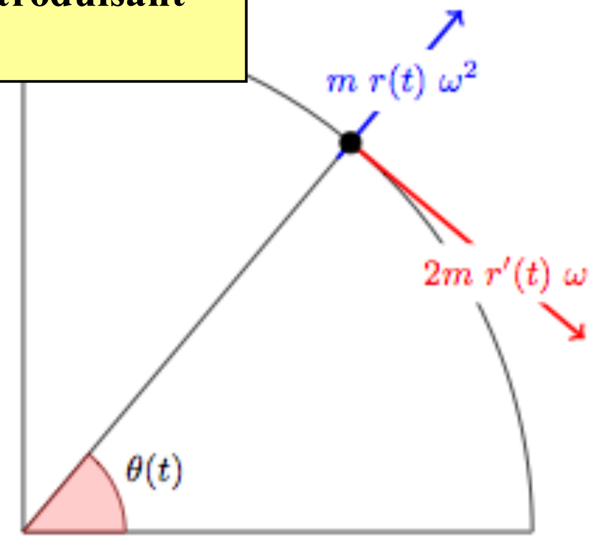
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = r''(t)\ \vec{\mathbf{e}}_r(t) + \boxed{2r'(t)\ \omega\ \vec{\mathbf{e}}_\theta(t)} - \boxed{r(t)\ \omega^2\ \vec{\mathbf{e}}_r(t)}$$



Accélération centripète

On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.

Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant des pseudo-forces centrifuge et de Coriolis

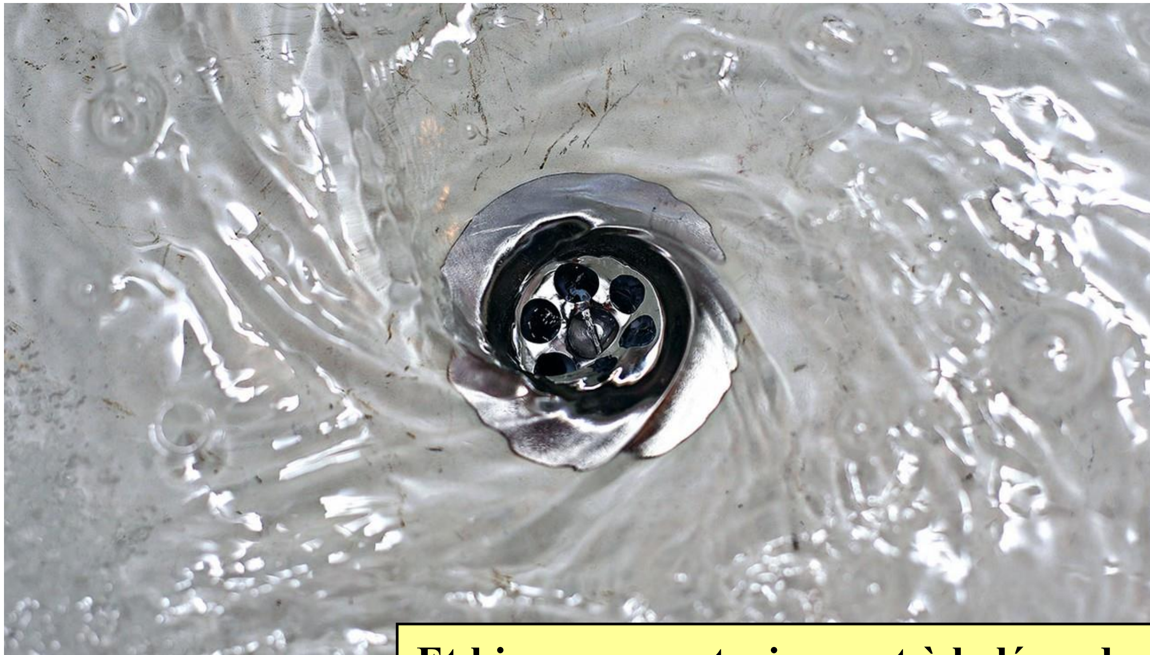


Remplacer l’accélération de Coriolis par la pseudo-force de Coriolis !

La résultante de la force de Coriolis et de la force due au gradient de pression atmosphérique fait tourner l'air autour des zones de basse et de haute pression !

Eh oui : la Terre tourne !

Et voilà le résultat
de la pseudo-force de Coriolis !

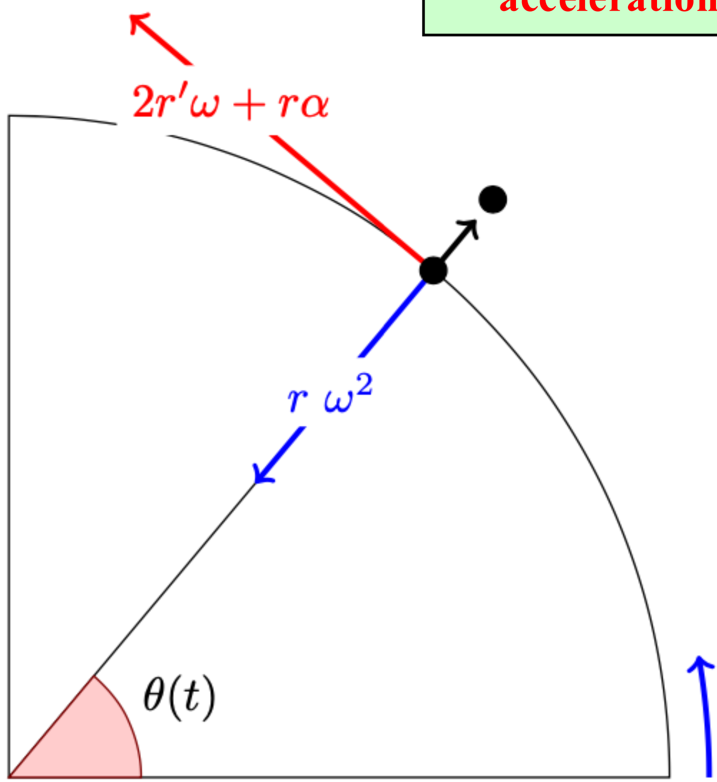


Et bien non, contrairement à la légende,
l'eau du lavabo ne tourne pas à l'envers dans l'hémisphère sud.

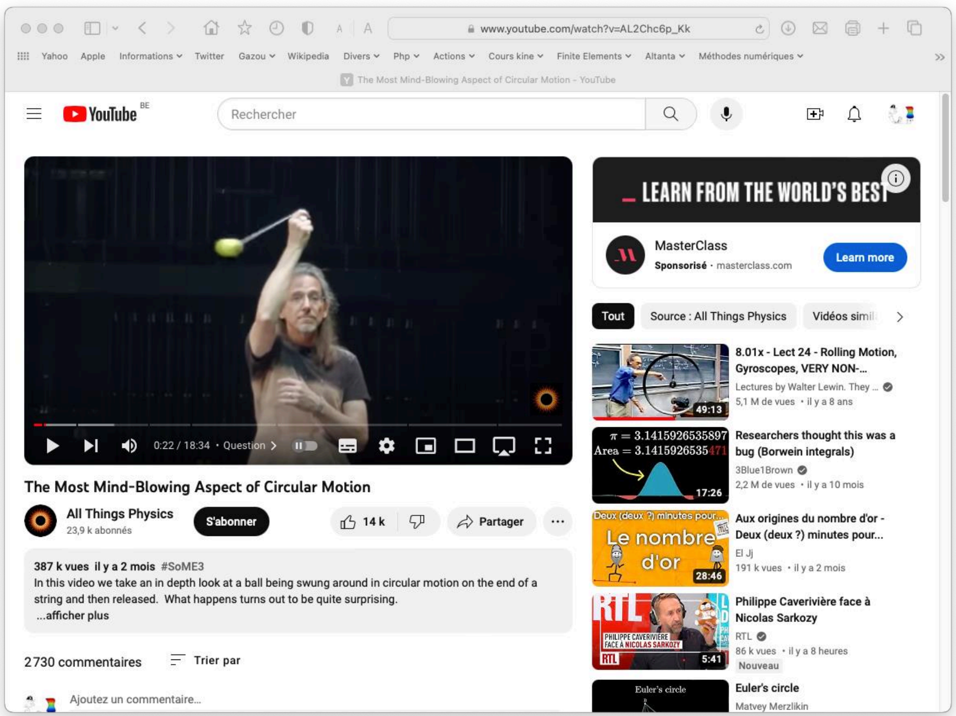
L'impact de la force de Coriolis est très très très faible à petite échelle !
Le sens de rotation dépendra davantage de la forme du lavabo
et de l'impulsion initiale lorsque vous retirez le bouchon... (si, si :-)

Mais, ceci est une légende urbaine !

- **Dans tout mouvement circulaire, l'accélération a toujours une composante centripète.**
- **Une variation de la vitesse angulaire génère une accélération tangentielle.**
- **Un déplacement radial fait aussi apparaître une accélération tangentielle dite de Coriolis.**



Pour en savoir un peu plus :-)



https://youtu.be/AL2Chc6p_Kk