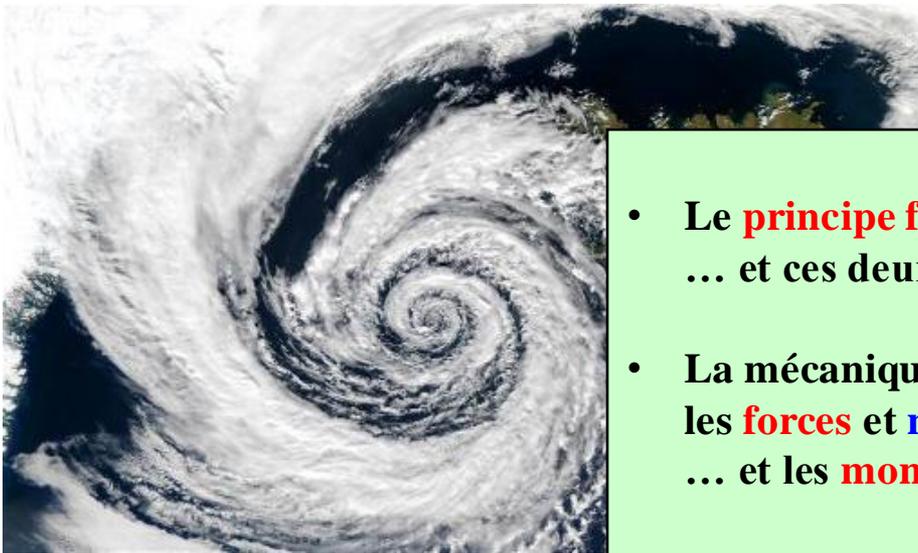


Menu du jour ! La mécanique de Newton



- Le **principe fondamental de la mécanique** ... et ces deux corollaires.
- La mécanique des corps solides, les **forces** et **masse**, ... et les **moments de forces** et **moment d'inertie**.
- Accélération **centripète** ... accélération **tangentielle** et accélération de **Coriolis**.

La mécanique du point

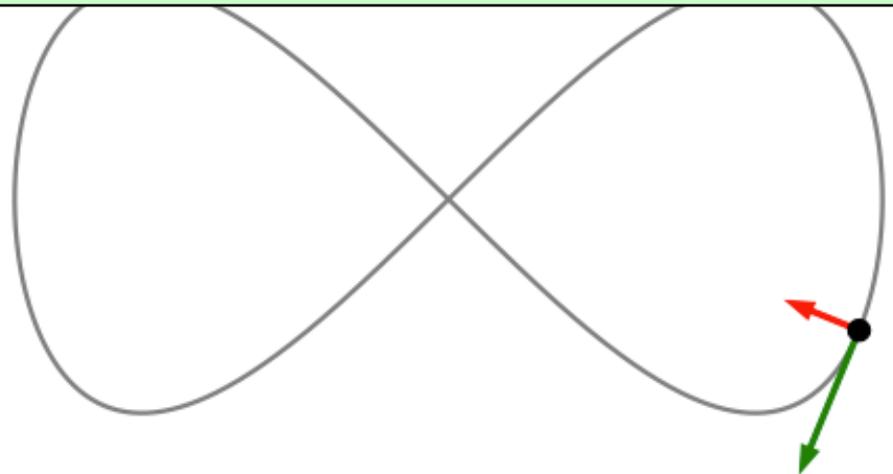
$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \vec{v}(t)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \vec{a}(t)$$

$$m \vec{a}(t) = \sum \vec{F}(t)$$

- La position, la vitesse, l'accélération, les forces sont des vecteurs !
Il faut donc bien maîtriser l'algèbre vectorielle !
- A l'exception du mouvement rectiligne à vitesse constante, tout autre type de mouvement présente une **accélération centripète** due au changement de direction et/ou de norme de la vitesse.

Ne pas
oublier !



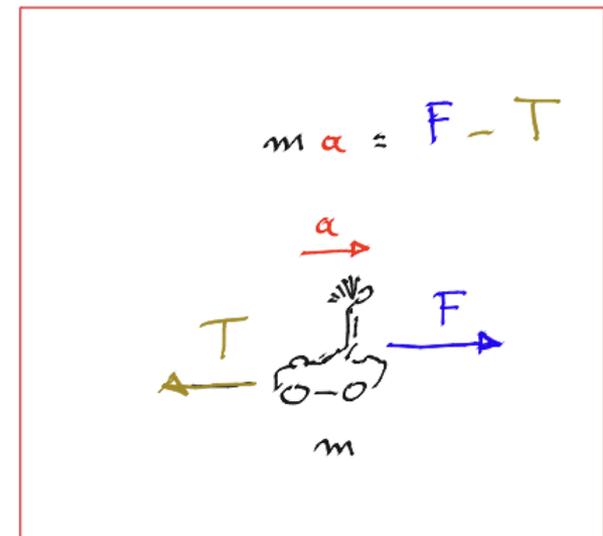
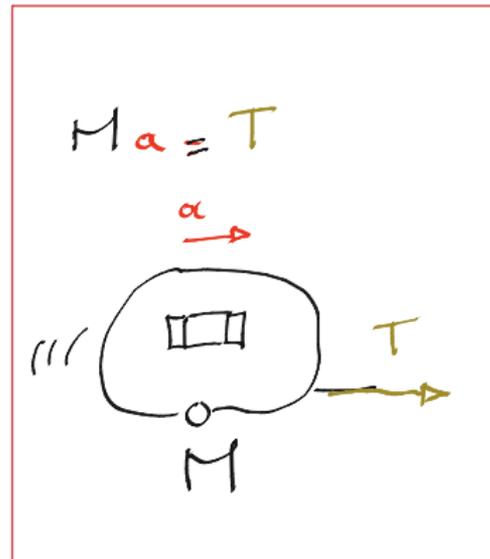
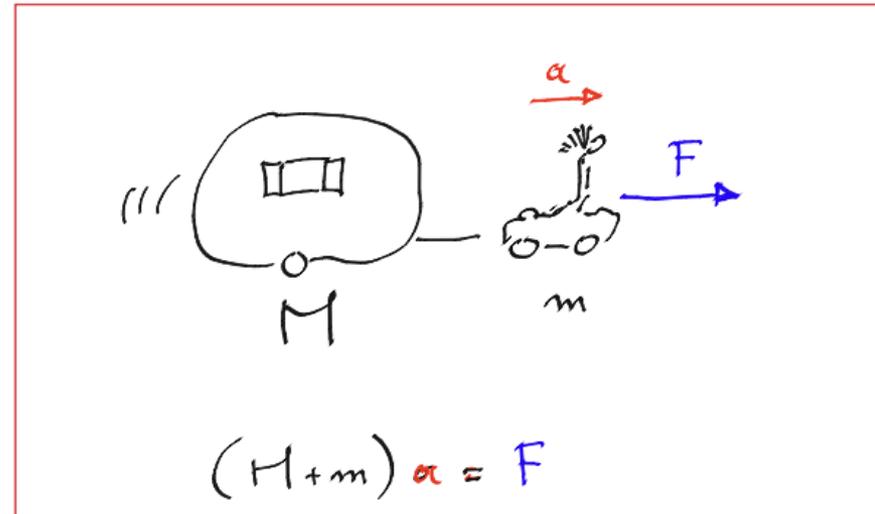
Principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{F}$$

**Ce principe est applicable uniquement à tout système de masse constante !
Même si ce système peut se composer de parties qui se séparent !**



Et action,
réaction ?



La mécanique du point...

**Pour analyser la stabilité d'un pont,
pour prédire le fonctionnement d'une machine ou du corps humain,
on va isoler les diverses composantes
en tirant profit de la troisième loi de Newton !**

**Il est maintenant possible de prédire le comportement de systèmes avec plusieurs
corps qu'on va approximer comme des **particules** (ou **points matériels**).**

**Une particule est un corps de volume nul,
mais de masse finie...**

C'est évidemment une fiction mathématique !

**Mais cela permet d'utiliser le modèle mathématique très simple
qu'est la mécanique du point.**

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \vec{v}(t)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \vec{a}(t)$$

$$m \vec{a}(t) = \sum \vec{F}(t)$$

Les 3 lois de Newton !



Ne pas
oublier !

- Si la somme de forces sur un corps est nulle, tout corps reste au repos ou en mouvement à vitesse constante dans un **repère inertiel** !
- La seconde loi de Newton ($F=ma$) met en relation l'accélération, la masse et les forces dans un **repère inertiel** !
- La force exercée par un objet sur un autre est opposée à celle exercée par l'autre corps sur lui-même. C'est le fameux principe : action-réaction :-)

$$\begin{array}{c}
 \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = \sum \vec{F} \cdot \vec{v} \\
 \uparrow \\
 \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{F} \\
 \downarrow \\
 \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}
 \end{array}$$

Deux principes corollaires...

$$\begin{array}{c}
 \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v} \\
 \uparrow \\
 \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{F} \\
 \downarrow \\
 \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}
 \end{array}$$

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) =$$

Forces

$$\sum \vec{F}$$

En intégrant entre les instants t_a et t_b .

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(m \vec{v}) dt = \sum \int_a^b \vec{F} dt$$

En supposant que les forces sont **constantes**.

$$[m \vec{v}]_b - [m \vec{v}]_a = \sum \vec{F} (t_b - t_a)$$

$$\Delta(m \vec{v}) =$$

$$\sum \vec{F} \Delta t$$

Impulsions

Bilan
de la quantité
de mouvement

Puissance des forces

$$\frac{d}{dt} (m \vec{v}) \cdot \vec{v} = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

↓
En intégrant entre les instants t_a et t_b .

$$\int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \sum \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \sum \int_a^b \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt = \sum \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

↓
En supposant que les forces sont **constantes**.

$$\left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_b - \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_a = \sum \vec{F} \cdot (\vec{x}_b - \vec{x}_a)$$

$$\Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

Travail des forces

Bilan d'énergie cinétique

Moments des forces

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}(m \vec{r} \times \vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

↓
En intégrant entre les instants t_a et t_b .

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(m \vec{r} \times \vec{v}) dt = \sum \int_a^b \vec{r} \times \vec{F} dt$$

↓
En supposant que les moments sont **constants**.

$$[m \vec{r} \times \vec{v}]_b - [m \vec{r} \times \vec{v}]_a = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) (t_b - t_a)$$

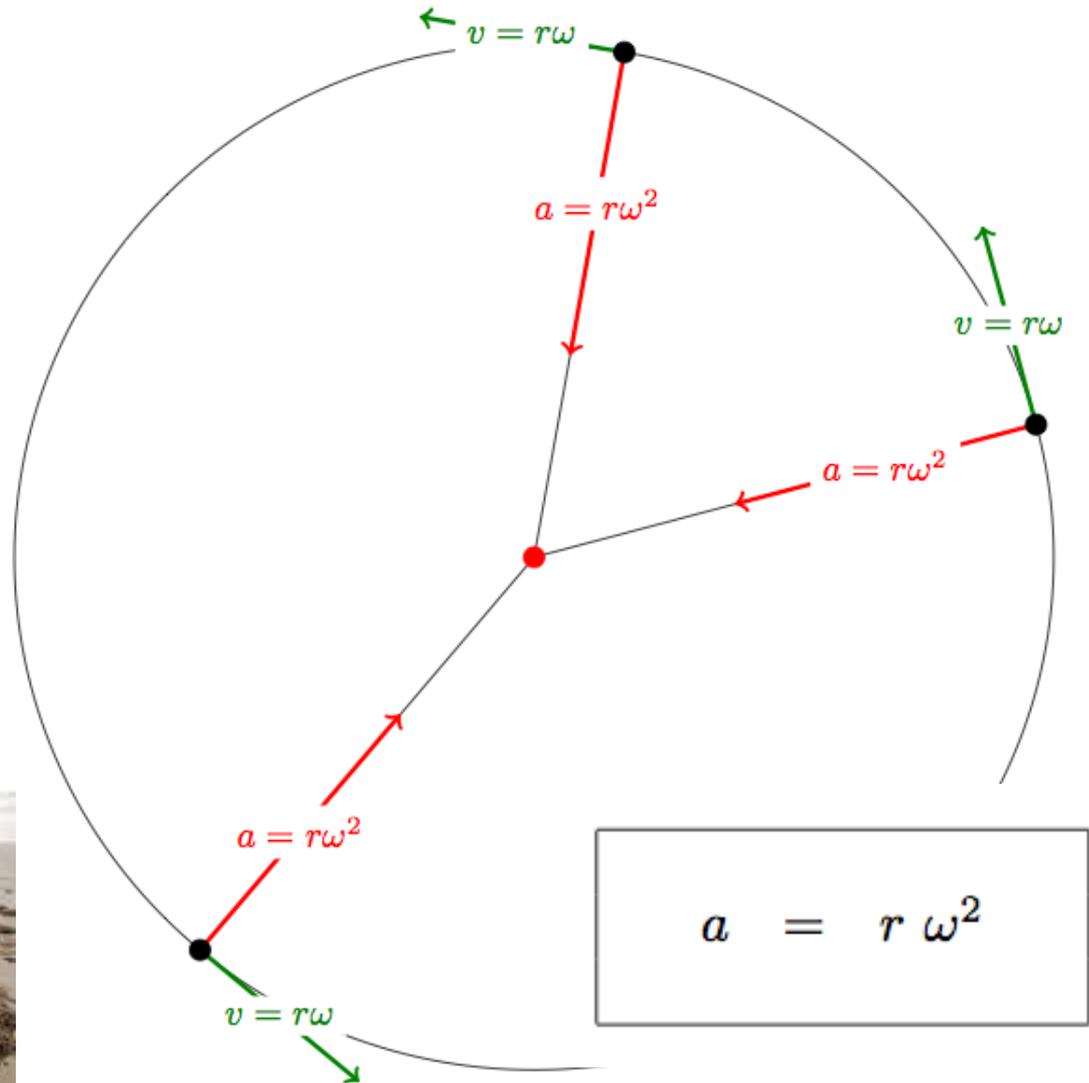
$$\Delta(m \vec{r} \times \vec{v}) = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) \Delta t$$

Impulsions angulaires

Bilan de moment cinétique

Mouvement circulaire uniforme

$$v = r\omega$$

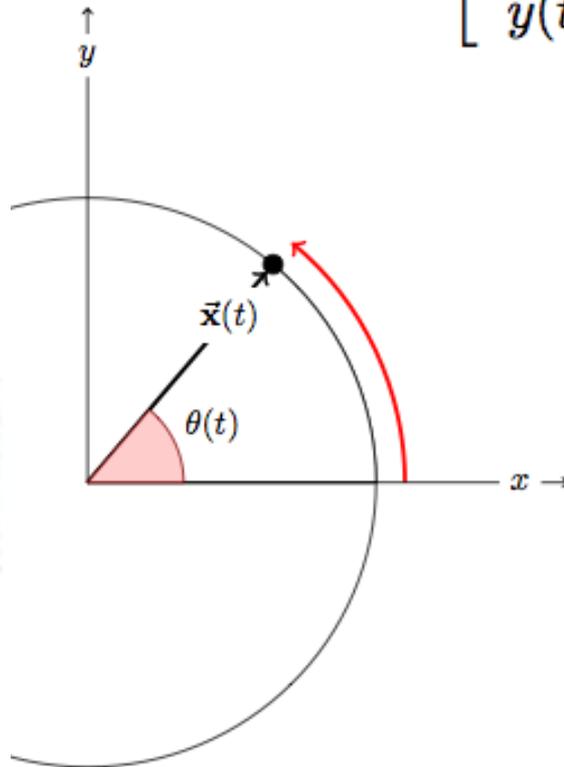


$$a = r\omega^2$$

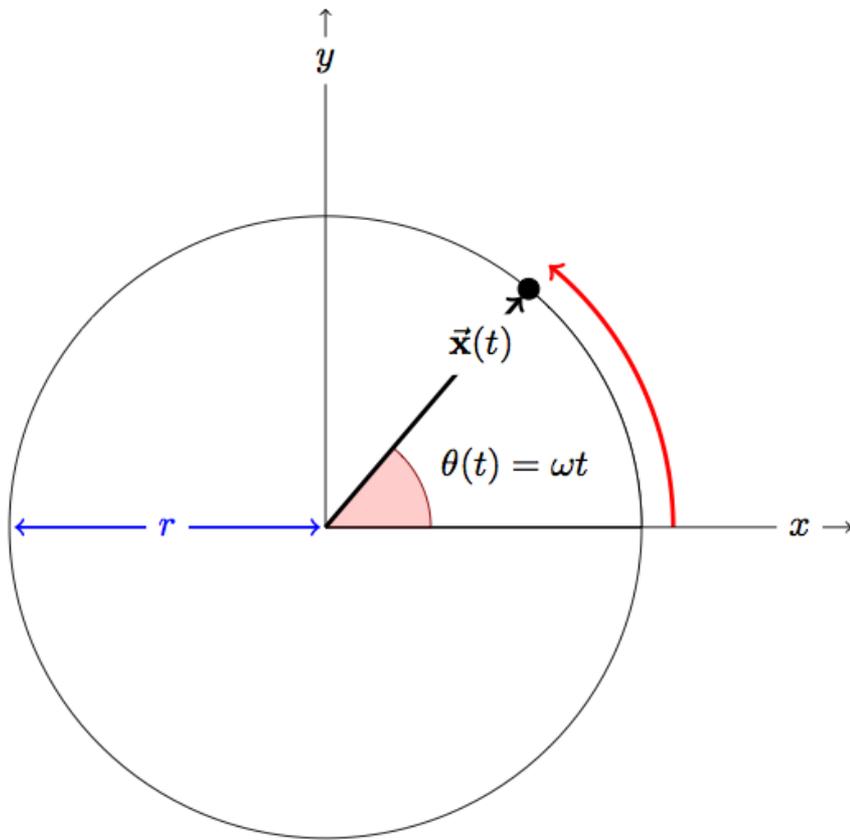
Vitesse angulaire constante : ω
Vitesse tangentielle
Accélération centripète

Le mouvement circulaire est harmonique

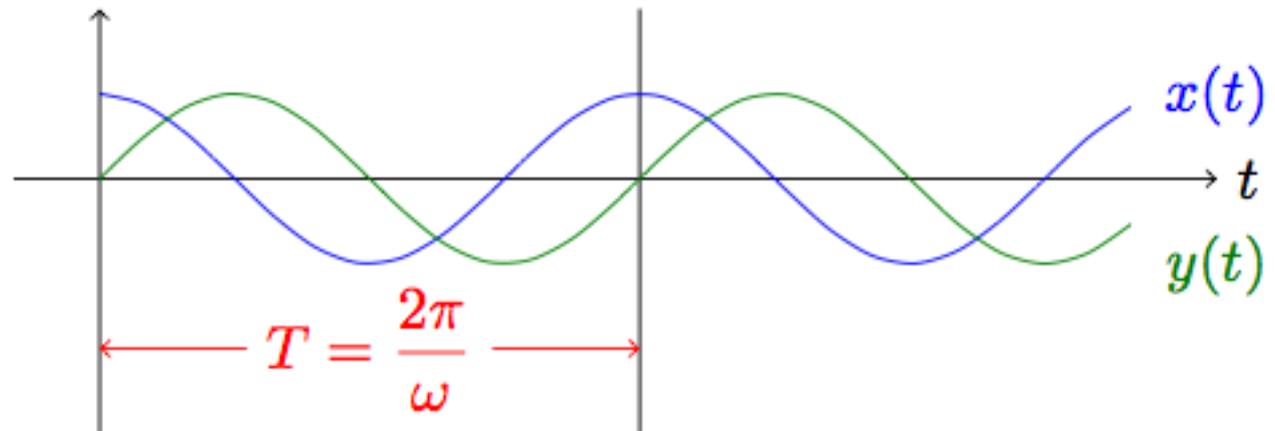
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta(t)) \\ r \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

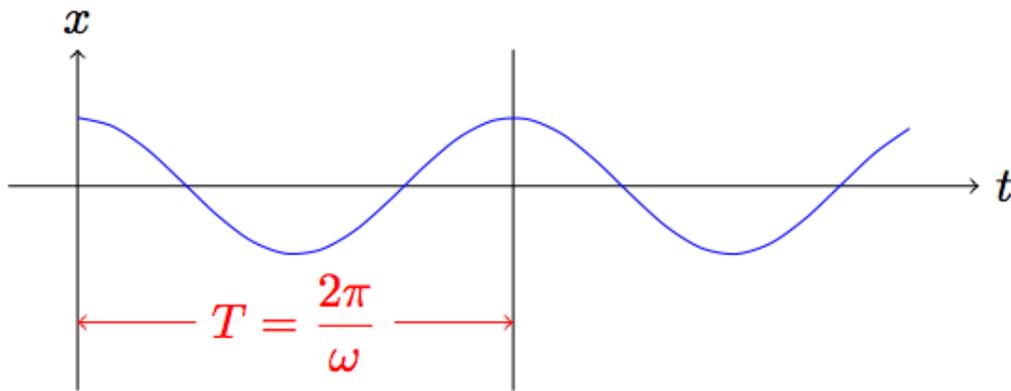


Le retour du cos et du sin



$$x(t) = r \cos(\omega t)$$
$$y(t) = r \sin(\omega t)$$





$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$v = r\omega$$

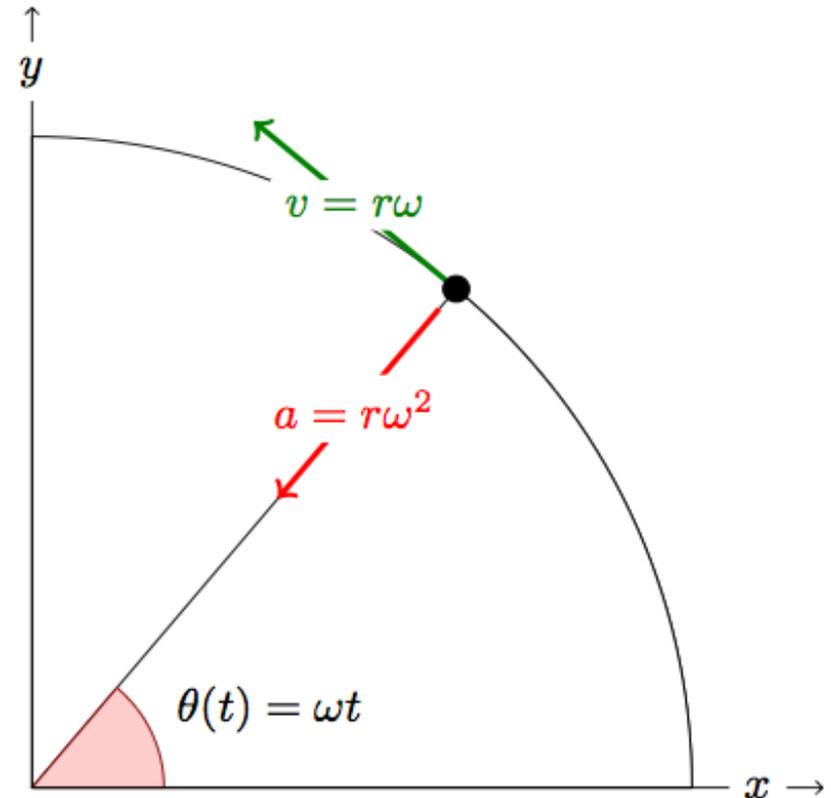
Période : T

Fréquence : f

Vitesse angulaire : ω

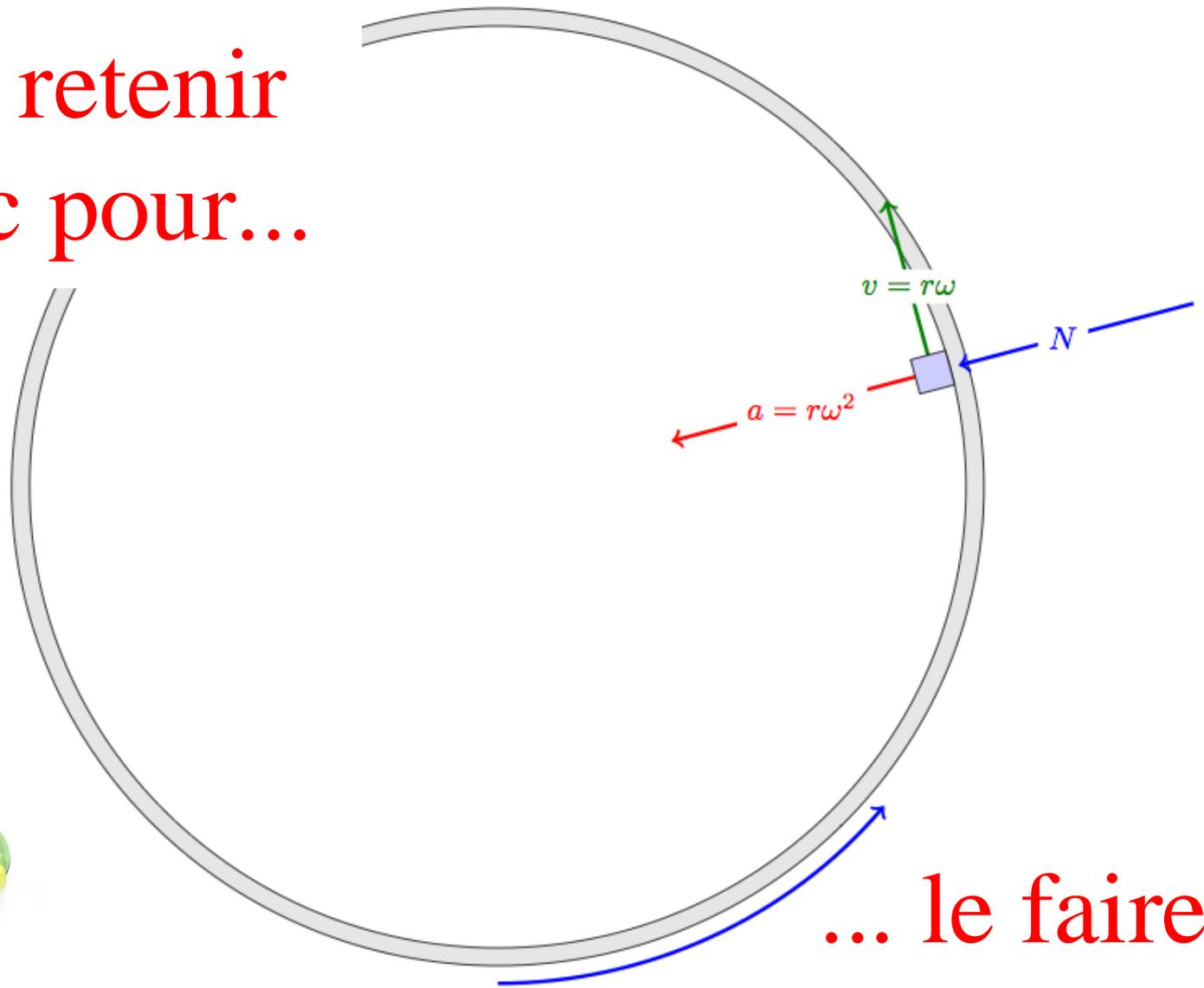
Accélération centripète

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\omega^2 \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



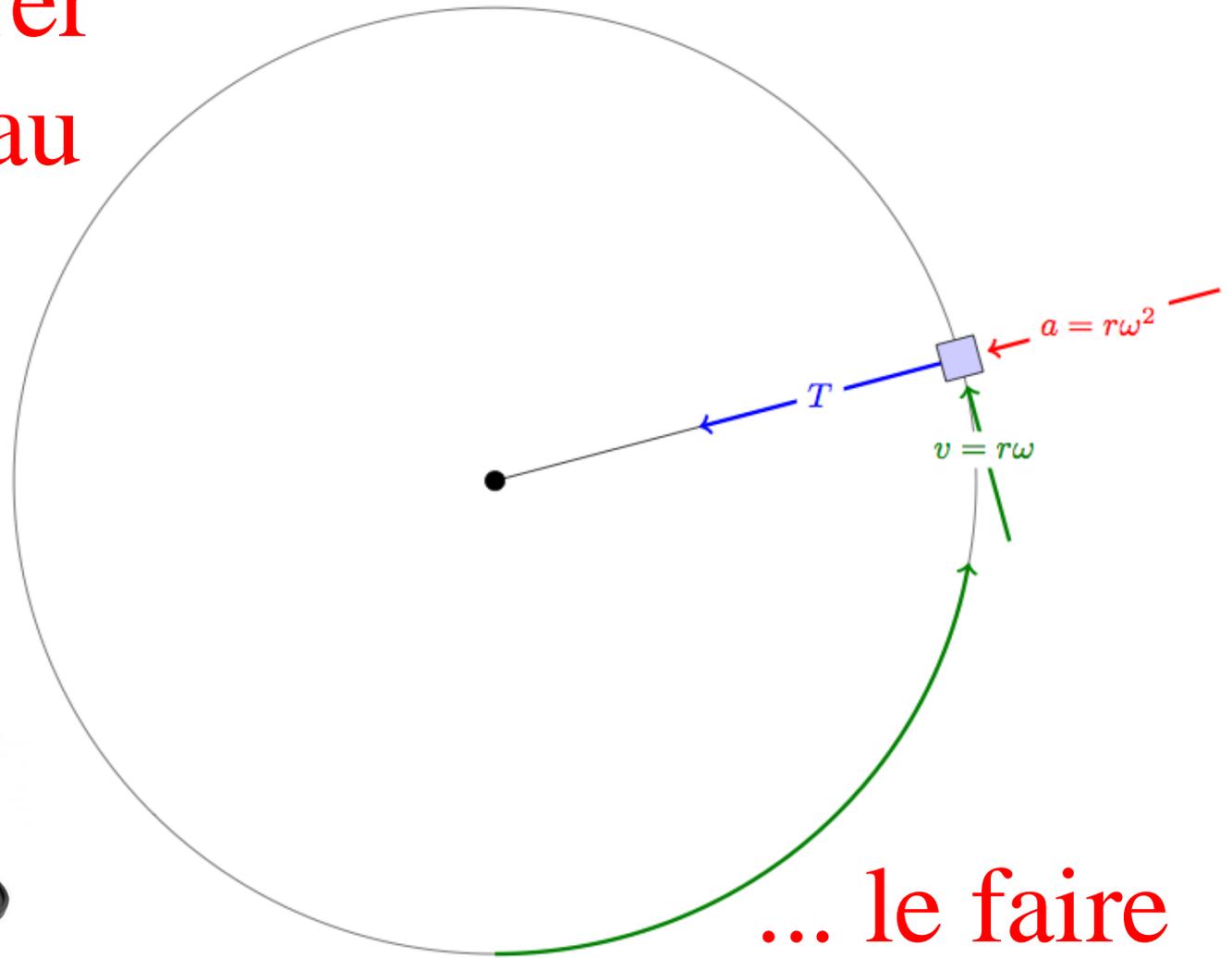
Vitesse
tangentielle

Il faut retenir
le bloc pour...



... le faire
tourner !

Il faut tirer
sur le seau
pour...



... le faire
tourner !



Expérience
périlleuse
du seau d'eau !

Période
de rotation
du seau !



Calculons
la période de rotation
de la Terre autour du soleil !



Terre

1 tour/année

$$R = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

$$f = 3.17 \cdot 10^{-8} \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 3.15 \cdot 10^7 \text{ s} = 365 \text{ jours}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1.99 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$$

$$v = r \omega = 29797 \text{ m/s}$$

$$a = r \omega^2 = 0.0059 \text{ m/s}^2$$

L'accélération centripète est toute petite !

C'est cinq fois moins important que celle due à la rotation de la Terre !



Aspirateur
600 tours/minute
 $R = 10 \text{ cm}$

$$f = 10 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.1 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 62.8 \text{ rad/s}$$

$$v = r \omega = 6.28 \text{ m/s}$$

$$a = r \omega^2 = 394.4 \text{ m/s}^2$$



*C'est quarante fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur très élevée !*



Machine à laver
3600 tours/minute
 $R = 15 \text{ cm}$

$$f = 60 \text{ Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.017 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 377 \text{ rad/s}$$



$$v = r \omega = 56.5 \text{ m/s}$$

$$a = r \omega^2 = 21318 \text{ m/s}^2$$

*C'est deux mille fois
la valeur de l'accélération de la gravité !
C'est une valeur vraiment très très élevée !*



Exercice classique
et pas tout-à-fait réaliste
de tous les livres de physique

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$
$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

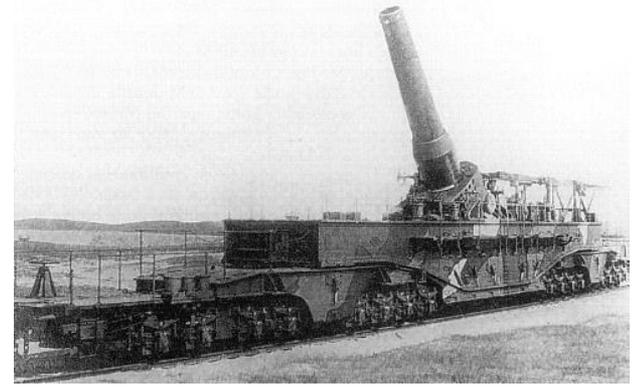


- Dans un mouvement circulaire, l'accélération a toujours une **composante centripète**. Les variations de la vitesse angulaire génèrent une **composante tangentielle**.
- Seules les forces dont le moment n'est pas nul par rapport au centre de rotation permettent de modifier la vitesse angulaire d'un mouvement circulaire.
- Les forces modifient la quantité de mouvement
Les moments modifient le moment cinétique



Ne pas
oublier !

La mécanique d'un point...



$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2\right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

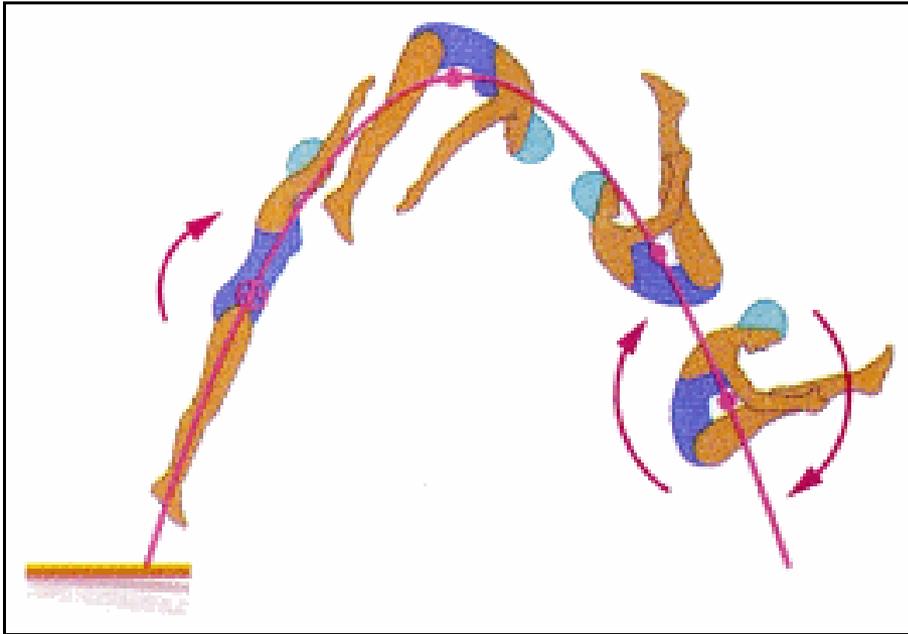
Les deux équations fondamentales !

**Bilan de la quantité de mouvement
Bilan de l'énergie cinétique**

Dans beaucoup d'applications, on peut se restreindre à l'analyse du mouvement du centre de masse et réduire le corps à un simple point où on a concentré toute la masse !

*Ce que nous avons fait jusqu'à présent !
Mais, un skieur, une auto, un bloc, **ce n'est pas un point** !*

**La trajectoire de son centre de masse est parabolique, comme notre obus !
Mais, son mouvement est nettement plus complexe avec des vrilles et des pirouettes !**



**mais un corps,
ce n'est pas un point !**

La mécanique d'un corps...



Les trois équations fondamentales !

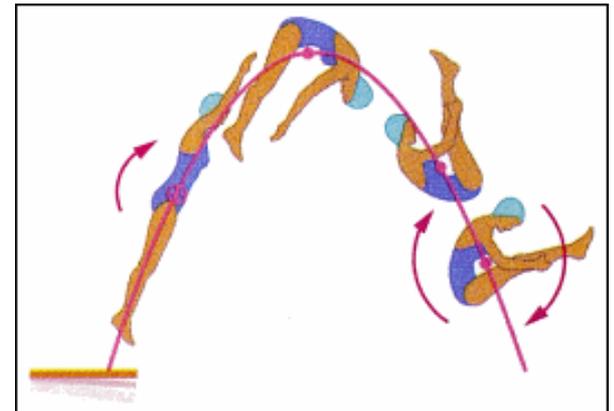
Bilan de la quantité de mouvement
Bilan de l'énergie cinétique

Bilan du moment cinétique

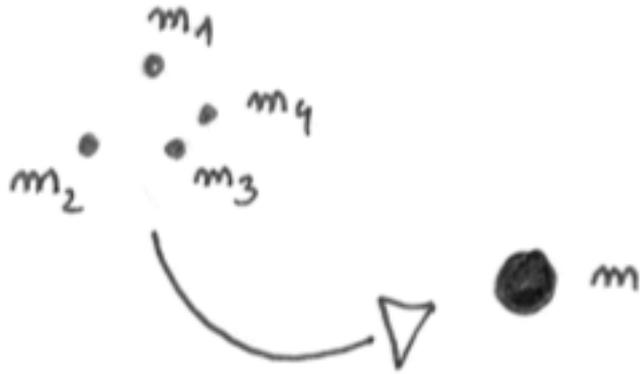
$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$



C'est quoi un point ?



On remplace une série de particules,
par une grosse particule **virtuelle**
de masse équivalente !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

C'est quoi un point ?

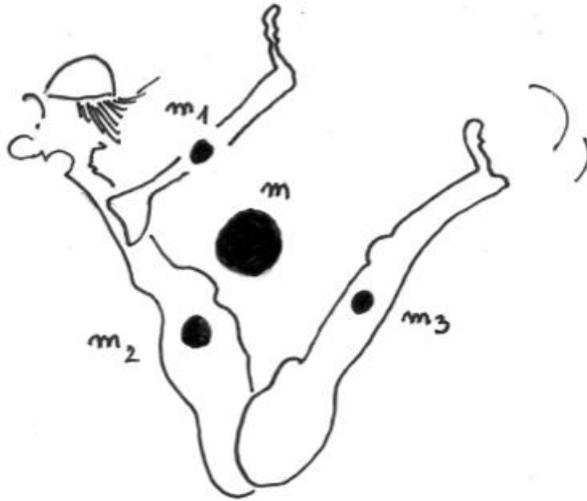


Tant que le bloc ne tourne pas,
la mécanique du point est suffisante
pour résoudre pas mal de problèmes !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

C'est quoi un corps ?

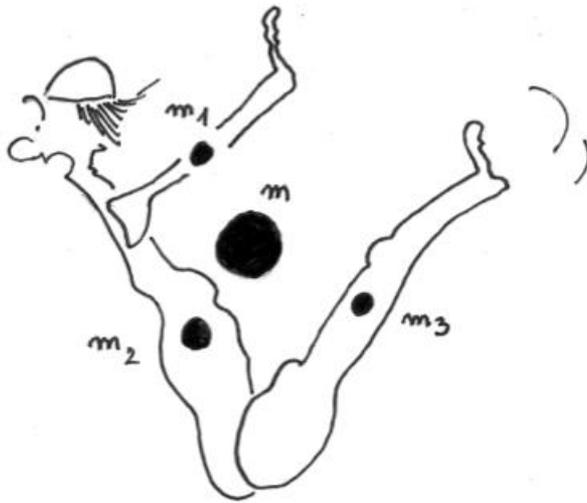


Mais lorsque notre athlète fait des pirouettes, il faut avoir un modèle mécanique plus compliqué !

$$m = \sum m_i$$

... un ensemble de points !

Le centre de masse...



La position d'une particule plus grande doit compter davantage !

Tronc-tête : 58% de la masse corporelle
Jambes : 32% de la masse corporelle
Bras : 10 % de la masse corporelle

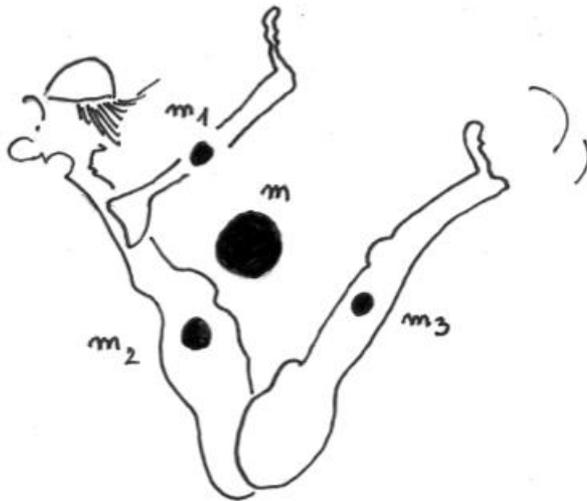
$$m = \sum m_i$$

$$m \vec{x} = \sum (m_i \vec{x}_i)$$

... est la position moyenne pondérée des positions

La vitesse du centre de masse...

La position d'une particule plus grande doit compter davantage !

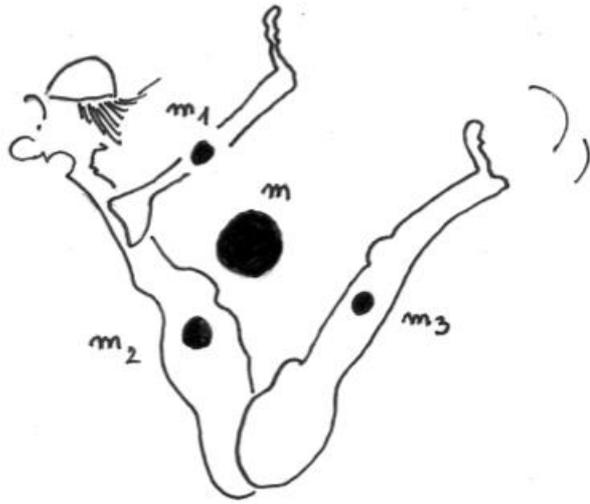


$$m = \sum m_i$$

$$m \vec{x} = \sum (m_i \vec{x}_i)$$

$$m \vec{v} = \sum (m_i \vec{v}_i)$$

... est aussi obtenue comme la moyenne pondérée des vitesses



Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m \vec{x} = \sum (m_i \vec{x}_i)$$

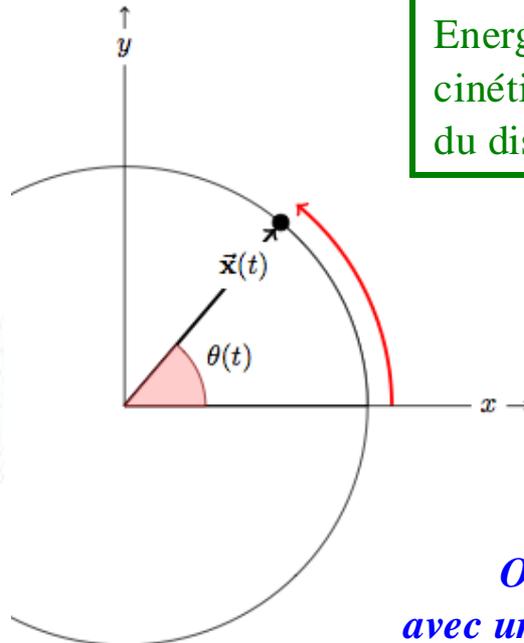
$$m \vec{v} = \sum (m_i \vec{v}_i)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 \neq \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

$$\vec{r} \times m \vec{v} \neq \sum (\vec{r}_i \times m \vec{v}_i)$$

Pour l'énergie
et le moment cinétique,
c'est plus compliqué....

Et l'énergie cinétique de rotation d'un disque ?



$$\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum m_i r_i^2 \right)}_I \omega^2$$

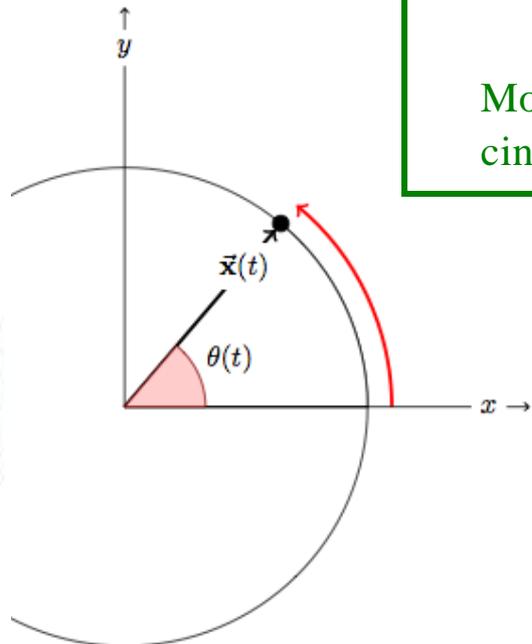
Energie cinétique du disque

Moment d'inertie du corps

Et le centre de masse ne bouge pas !

On peut donc avoir une énergie cinétique avec un centre de masse totalement immobile !

Et le moment cinétique de rotation d'un disque ?



$$\sum r_i m_i v_i$$

Moment cinétique

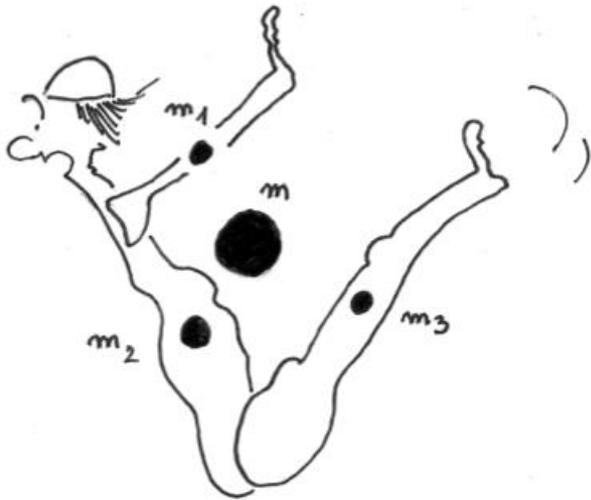
$$= \underbrace{\left(\sum m_i r_i^2 \right)}_I \omega$$

Moment d'inertie du corps

Et le centre de masse ne bouge pas !

*Pas de quantité de mouvement !
Mais un moment cinétique non nul car le disque tourne !*

En résumé :



$$m = \sum m_i$$

$$m \vec{x} = \sum (m_i \vec{x}_i)$$

$$m \vec{v} = \sum (m_i \vec{v}_i)$$

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

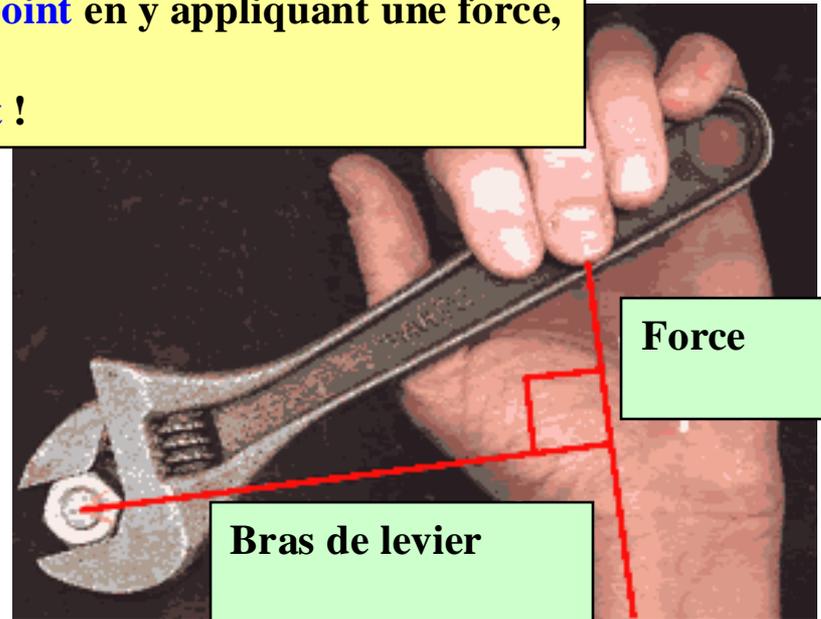
$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

Ce qui fait tourner la clé, c'est le moment !

Supposons que l'on fixe une barre en **un point** et que l'on souhaite la faire tourner autour **de ce point** en y appliquant une force, **l'accélération angulaire** sera proportionnelle **au moment de cette force** par rapport à **ce point** !



$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{bmatrix}$$

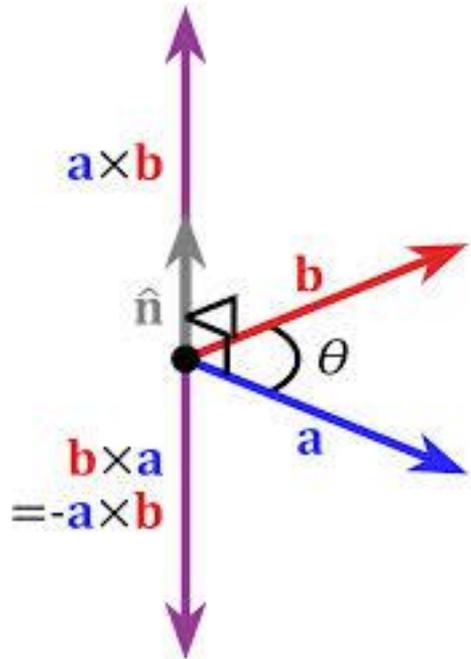


$$C = AB \sin(\theta)$$

Cross Product

Produit vectoriel de vecteurs

Attention ! $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
Le produit vectoriel n'est pas commutatif !

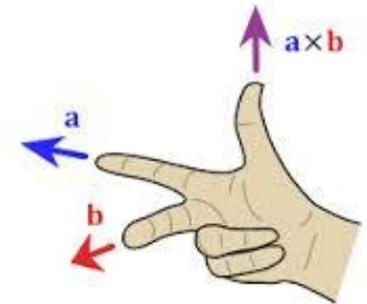


$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{bmatrix}$$

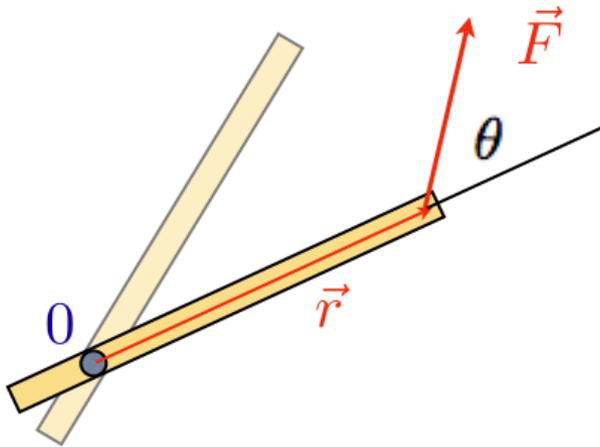
$C = AB \sin(\theta)$

Cross Product

Produit vectoriel de vecteurs



Et c'est quoi le moment d'une force par rapport à un point ?



Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{M}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F r_{\perp} = F_{\perp} r = F r \sin(\theta)$$

Direction du moment = axe de rotation

Norme de moment = vitesse de rotation

Signe du moment = sens de la rotation suivant la fameuse règle de la main droite !

Les 3 manières
de calculer
le moment d'une force !

Equilibre de rotation

$$\cancel{\frac{d}{dt}(I\omega)} = \sum M_i$$



Etudions d'abord les forces et les moments de corps au repos !

Concept d'équilibre statique



$$\cancel{\frac{d}{dt}(m\vec{v})} = \sum \vec{F}_i$$

Equilibre de translation

Equilibre de rotation

$$0 = \sum M_i$$



Lorsque le corps ne bouge pas, son accélération angulaire est nulle pour n'importe quel point !

Dans ce cas, **on peut donc calculer les moments de force par rapport à n'importe quel point** alors !



$$0 = \sum \vec{F}_i$$

Equilibre de translation

Quelles sont
les forces exercées
par les deux gars ?



Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

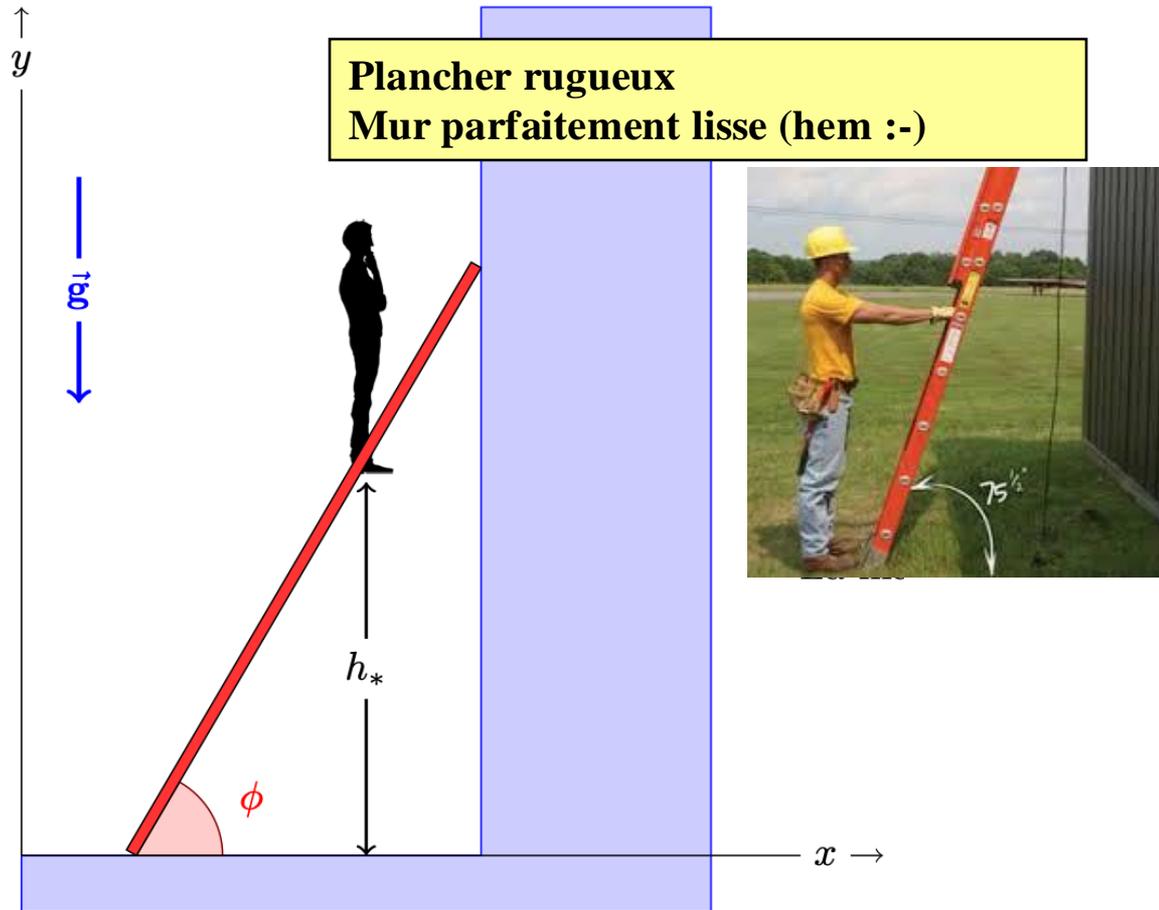
Deux équations !
Deux inconnues !

Est-ce que
l'échelle
va glisser ?

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

$$0 = \sum M_i$$



Est-ce que
l'échelle
va glisser ?



Plancher rugueux
Mur parfaitement lisse (hem :-)

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

Trois équations !
Trois inconnues !

Mais, pour une échelle totalement rigide, le problème est mal posé si il y a du frottement sur le sol et sur le mur !

Ce n'est pas toujours aussi simple qu'il n'y paraît !



**Trois équations !
Trois inconnues !**



Calcul de l'angle critique !
C'est l'angle où le frottement est maximal !

Mais, pour une échelle totalement rigide, le problème est mal posé si il y a du frottement sur le sol et sur le mur !

Ce n'est pas toujours aussi simple qu'il n'y paraît !

- Poids de l'échelle : $m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- Poids de l'ouvrier : $M\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$
- Force de réaction normale du sol : $\vec{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ (m + M)g \end{bmatrix}$
- Force de frottement au sol : $\vec{f} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(m + M)g \\ 0 \end{bmatrix}$
- Force de réaction normale du mur : $\vec{N}_2 = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix}$

**Trois équations !
Trois inconnues !**



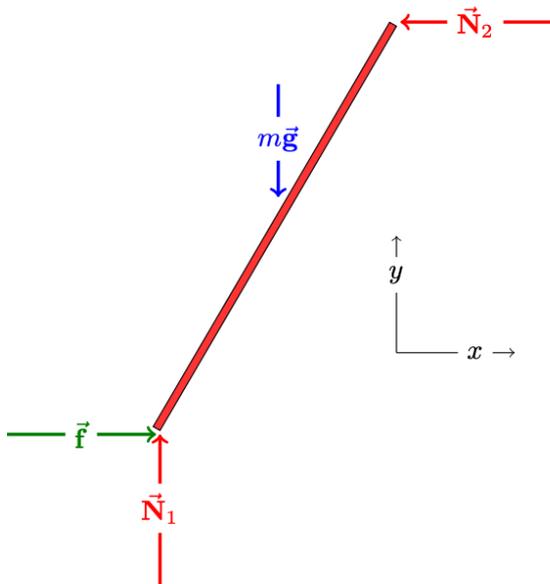
$$0 = \mu_s mg - N_2$$

$$0 = N_2 L \sin(\phi) - mg \frac{L}{2} \cos(\phi)$$



$$\mu_* mg L \underbrace{\sin(\phi)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = mg \frac{L}{2} \underbrace{\cos(\phi)}_{\frac{1}{2}}$$

Echelle = 10 kg et 3 mètres
 Angle de 60 degrés
 Coefficient de frottement statique 0.5
 Coefficient de frottement cinétique 0.1
 Accélération de la gravité = 10 m/s²



$$\mu_* = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.29 < \mu_s$$

Tout d'abord, est-ce que
 l'échelle sans l'ouvrier
 va glisser ?

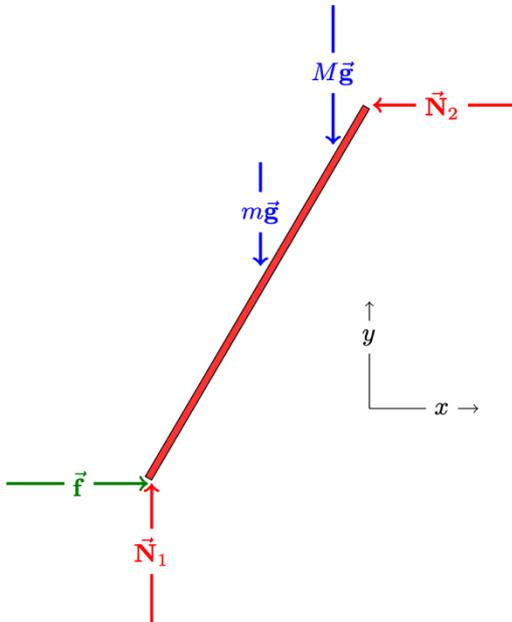


Ouvrier avec sacoche = 120 kg
 Echelle = 10 kg et 3 mètres
 Angle de 60 degrés
 Coefficient de frottement statique 0.5
 Accélération de la gravité = 10 m/s²

$$\mu_s(m + M)gL \sin(\phi) = mg \frac{L}{2} \cos(\phi) + Mg \frac{h_*}{\sin(\phi)} \cos(\phi)$$

$$L \frac{\mu_s(m + M)6 - m\sqrt{3}}{4M} = h_*$$

$$h_* = \frac{390 - 10\sqrt{3}}{160} = 2.33 \text{ m}$$



Quelle hauteur l'ouvrier peut atteindre avant que l'échelle ne glisse ?

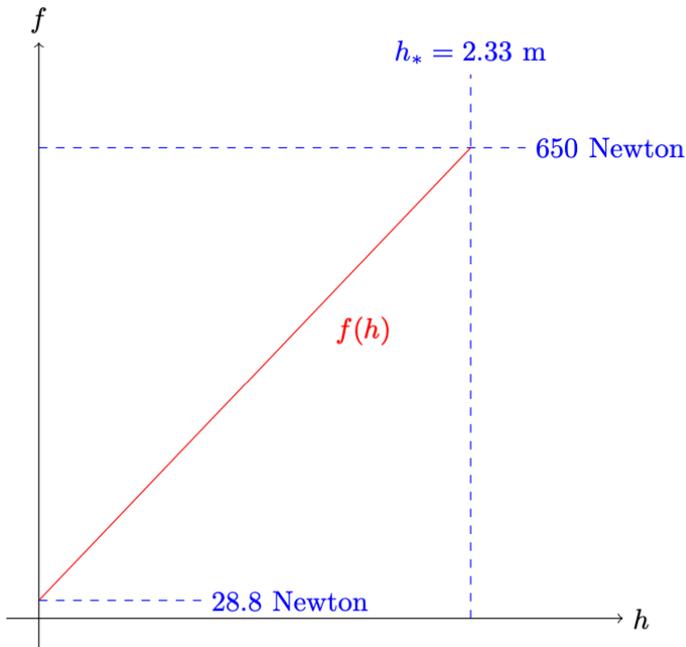
$$f(h) L \sin(\phi) = mg \frac{L}{2} \cos(\phi) + Mg \frac{h}{\sin(\phi)} \cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$f(h) = \underbrace{\frac{mg \cos(\phi)}{2 \sin(\phi)}}_{28.8675} + h \underbrace{\frac{Mg \cos(\phi)}{L \sin^2(\phi)}}_{266.6667}$$



Ouvrier avec sacoche = 120 kg
 Echelle = 10 kg et 3 mètres
 Angle de 60 degrés
 Coefficient de frottement statique 0.5
 Accélération de la gravité = 10 m/s²



Evolution de la force de frottement en fonction de la hauteur de l'ouvrier



- Le moment est le produit du bras de levier par la force.
- L'énergie cinétique d'un corps est la somme de l'énergie du mouvement du centre de masse et de l'énergie de la rotation du corps autour de ce point.
- Pour la rotation d'un corps autour de son centre de masse, les **moments de force**, le **moment cinétique** et le **moment d'inertie** du corps sont l'équivalent des **forces**, de la **quantité de mouvement** et de la **masse** pour le mouvement de ce point !
- Un corps est à l'équilibre si la somme des forces et des moments est nulle : c'est l'équilibre statique.

$$\frac{d}{dt} (m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt} (I \omega) = \sum M_i$$

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

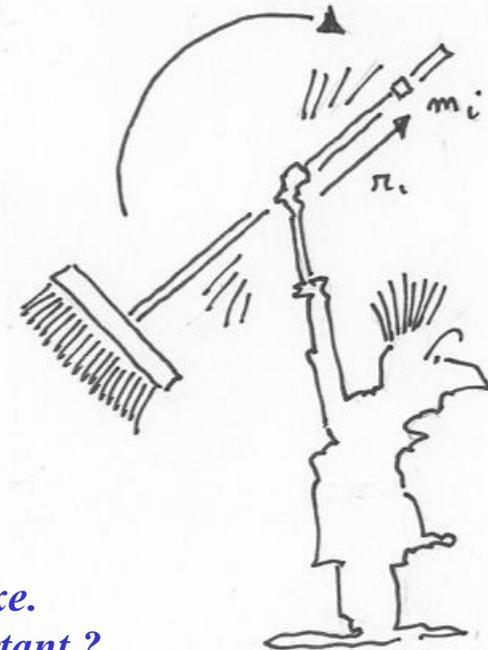
$$0 = \sum M_i$$

Ne pas oublier !

Qu'est ce qui influence le moment d'inertie ?

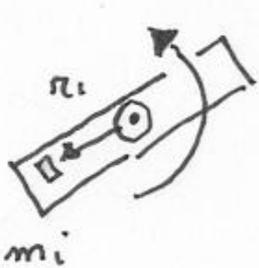
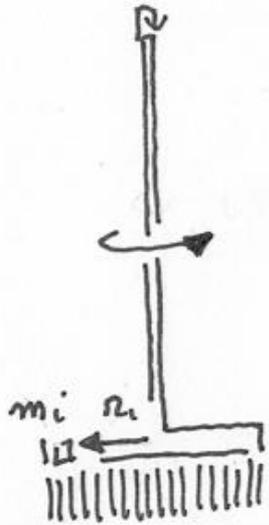
Le moment d'inertie dépend de :

- la **masse** du balai
- la **distribution de la masse** par rapport à l'axe de rotation



*On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?*

Et ceci est moins
fatigant et moins
spectaculaire !



*On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?*

$I = 12.6 \text{ kg m}^2$



Le moment d'inertie dépend de :

- la **masse** du plongeur
- la **distribution de la masse** par rapport à l'axe de rotation

$I = 23.8 \text{ kg m}^2$



$I = 54.4 \text{ kg m}^2$

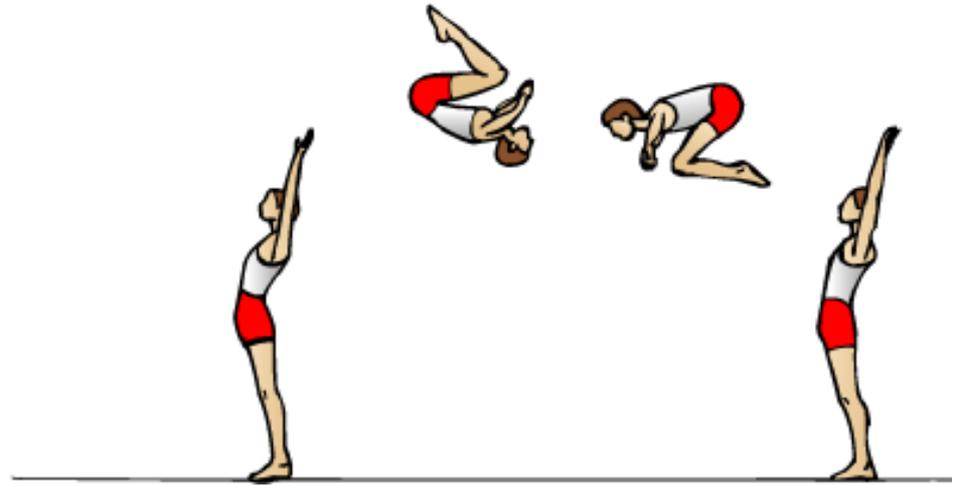


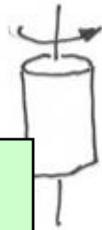
Moment d'inertie

$$I = \sum m_i r_i^2$$

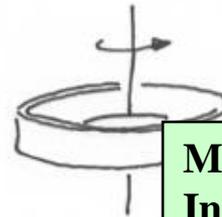
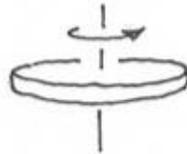
Moment d'inertie
du plongeur

Pourquoi est-ce que
la gymnaste se recroqueville
pour faire la pirouette ?





**Masse identique
Inertie minimale**



**Masse identique
Inertie maximale**

**Cylindres, disques, anneaux...
Veaux, vaches, cochons !**

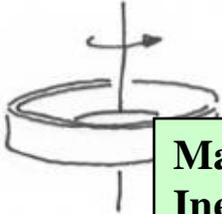
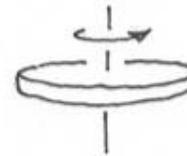
Une bibliothèque de moments d'inertie

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i r_i^2$$



Masse identique
Inertie minimale



Masse identique
Inertie maximale

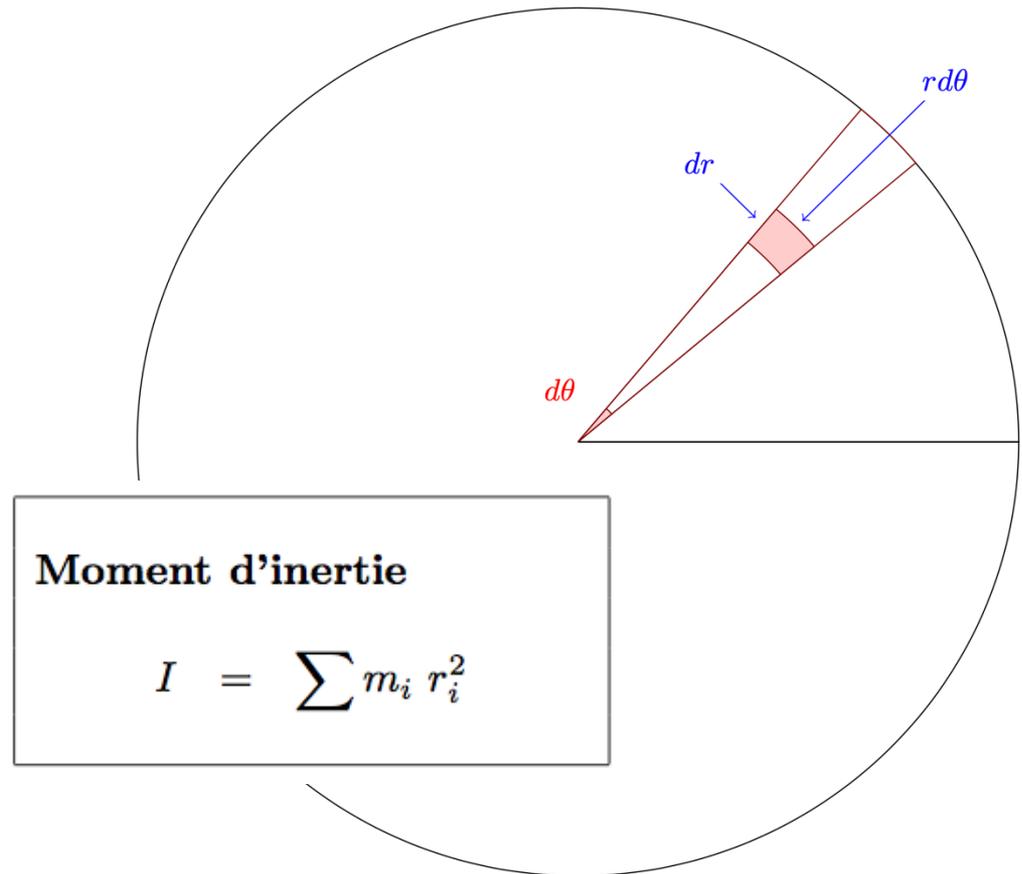
Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m \frac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m \frac{L^2}{12}$

Intégration des moments d'inertie



$$m = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \, dr \, r d\theta \, dz = 2\pi L \rho \int_0^R r \, dr = 2\pi L \rho \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \rho \pi L R^2$$

$$I = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \, r^2 \, dr \, r d\theta \, dz = 2\pi L \rho \int_0^R r^3 \, dr = 2\pi L \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\rho \pi L R^4}{2} = \frac{m R^2}{2}$$

Théorème de Huygens

Moment d'inertie quelconque



$$\begin{aligned} I_h &= \sum m_i (\vec{r}_i + \vec{h}) \cdot (\vec{r}_i + \vec{h}) \\ &= \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i}_{= I} + \underbrace{\sum m_i \vec{h} \cdot \vec{h}}_{= m h^2} + 2 \left(\underbrace{\sum m_i \vec{r}_i}_{= 0} \right) \cdot \vec{h} \end{aligned}$$

*En vertu de la définition
du centre de masse !*

Une conséquence immédiate de ce théorème est qu'il est toujours moins coûteux (en énergie) de faire tourner un corps autour d'un axe passant par le centre de masse.

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m h^2 + I$$

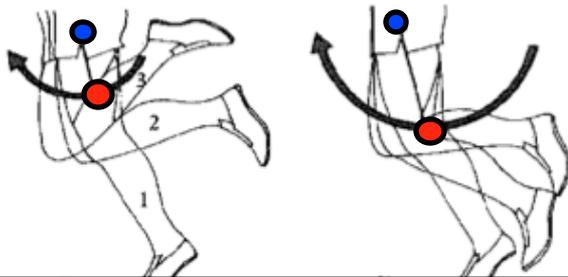


Théorème de Huygens ou des axes parallèles...

Moment d'inertie de la jambe par rapport à la hanche

Lors d'un sprint, le coureur va chercher à ramener ses jambes le plus rapidement possible en avant.

Il va attirer le talon vers le haut durant la phase d'oscillation.
Le moment d'inertie par rapport à la hanche est diminué.



Pour les courses de fond, le coureur va dépenser moins d'énergie à relever le talon.

Le moment d'inertie par rapport à la hanche reste plus grand.
La vitesse est évidemment aussi moins rapide !

La cause :
la force !

Résistance au
mouvement = masse

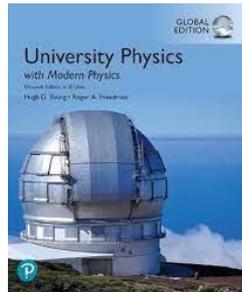
$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

La conséquence :
l'accélération !



*Quelle est la voiture qui va accélérer
le plus vite pour la même force motrice ?*

Linear
Momentum



Bilan
de la quantité
de mouvement

La cause :
le moment de force !

Résistance à la rotation
= moment d'inertie

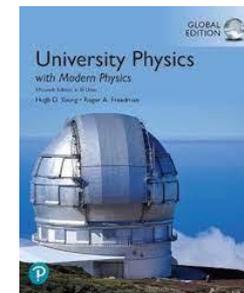
$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

La conséquence :
l'accélération angulaire !

Bilan du moment cinétique



*Que fait la danseuse
pour tourner plus vite
sur elle-même ?*



**Angular
Momentum**



- La **masse** mesure la résistance d'un corps à une **accélération** causée par une **force**.
- Le **moment d'inertie** mesure la résistance d'un corps à une **accélération angulaire** causée par un **moment de force**.

Ne pas
oublier !



$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$
$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$
$$0 = \sum M_i$$

Le MRUA :-)

$$y''(t) = a$$

$$y'(t) = \overbrace{v_0 + a t}^{v(t)}$$

$$y(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2}$$

A photograph of a green apple with a single leaf splashing into water, creating a large splash and ripples. The apple is positioned on the left side of the image, and the water splash is on the right. The background is white.

**Des millions de gens ont vu tomber une pomme,
Newton est le seul qui se soit demandé pourquoi...
(Bernard Baruch)**

Le MCUA :-)

$$\theta''(t) = \alpha$$

$$\theta'(t) = \underbrace{\omega(t)}_{\omega_0 + \alpha t}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

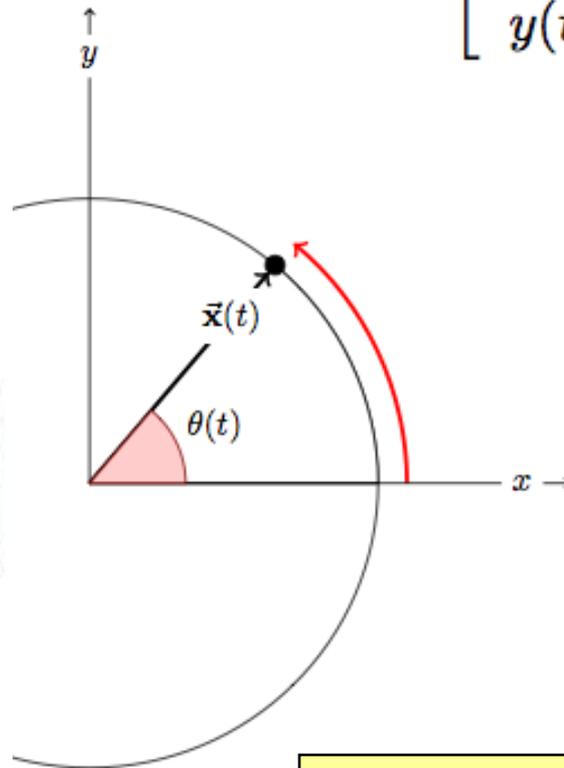


Maintenant, faisons strictement et exactement la même chose avec un mouvement circulaire !

Définissons le MCUA !

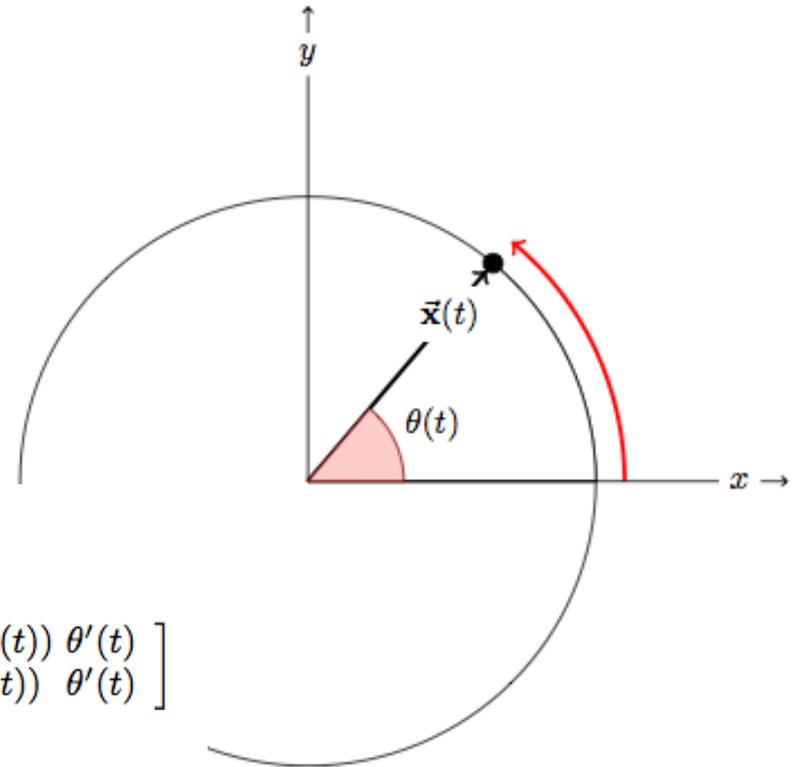
Le MCUA :-)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta(t)) \\ r \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Mouvement circulaire non-uniforme...
Vitesse angulaire non-constante
Accélération angulaire constante

Calculons la vitesse et l'accélération !



$$\vec{v}(t) = r \omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = r\omega'(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) & \theta'(t) \\ -\sin(\theta(t)) & \theta'(t) \end{bmatrix}$$



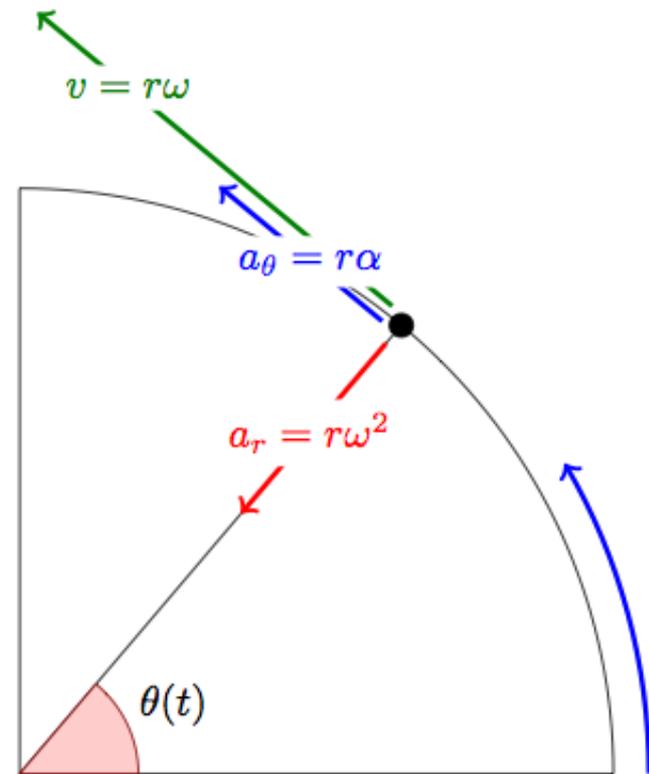
$$= r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

**La vitesse est toujours bien tangente au mouvement !
Mais son module est désormais variable
car la vitesse angulaire n'est pas constante !**

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

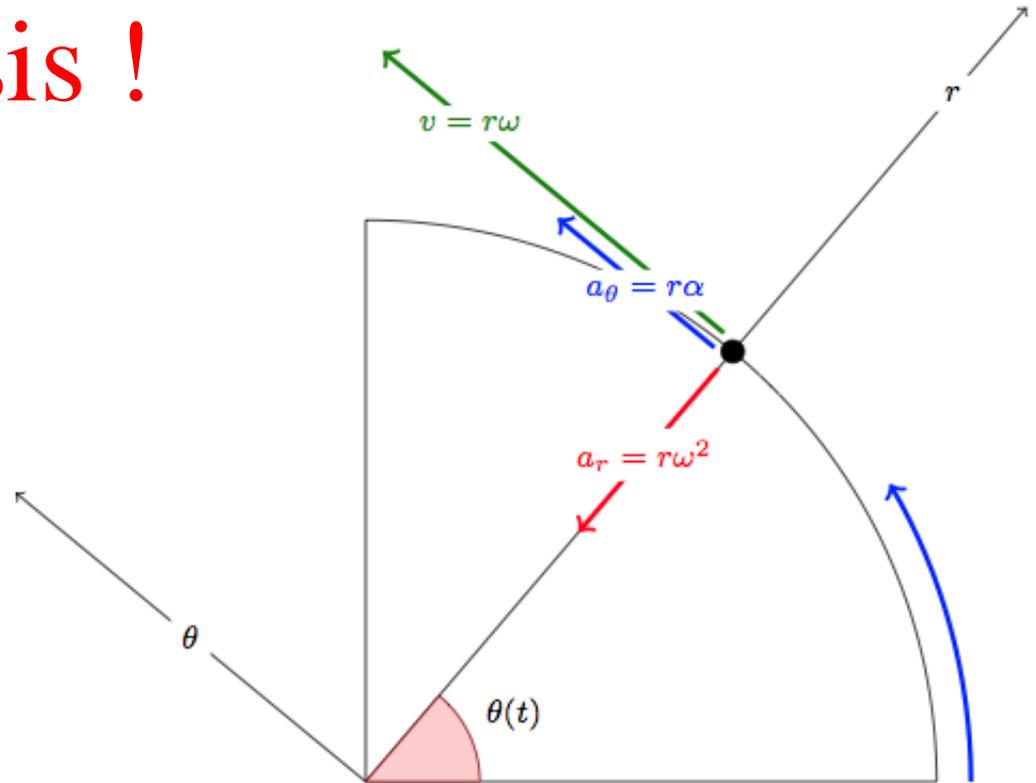


Accélération
tangentielle

Accélération
centripète

Avec des axes bien choisis !

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$
$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$



Vitesse : $v = r\omega$ [m/s]

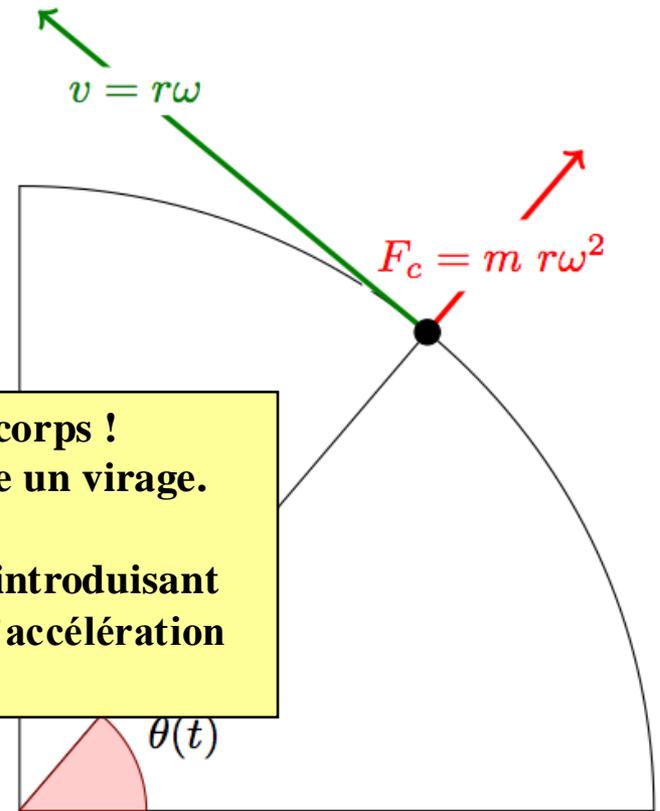
Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$ [m/s²]

Vitesse angulaire ω [radians/s] et accélération angulaire α [radians/s²]



**On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.**

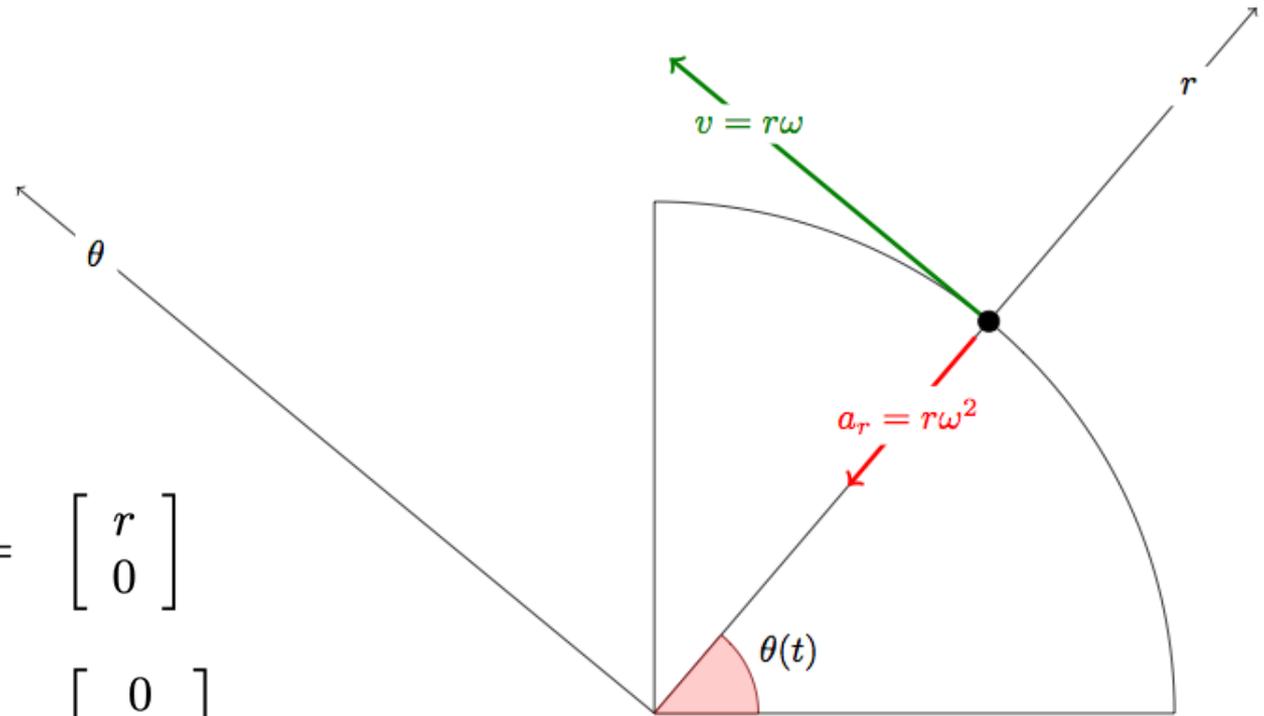
Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant une pseudo-force centrifuge qui aura le même effet que l'accélération centripète qu'on obtient dans un repère fixe !



**Remplacer
l'accélération centripète
par la pseudo-force centrifuge !**

$$\vec{\mathbf{x}}(t) : \begin{bmatrix} x_r \\ x_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) : \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$



La vitesse
est-elle toujours
la dérivée de la position ?

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = r \vec{\mathbf{e}}_r(t)$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) = r \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_r}{dt}(t)}_{\omega \vec{\mathbf{e}}_\theta(t)}$$

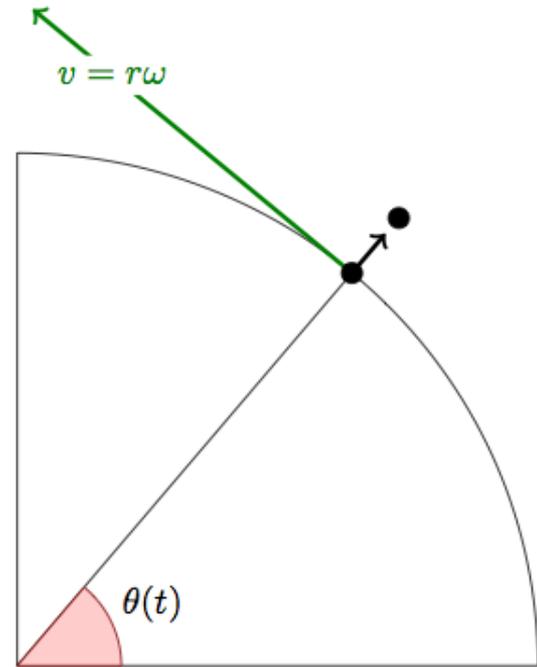
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) = r \omega \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_\theta}{dt}(t)}_{-\omega \vec{\mathbf{e}}_r(t)}$$

Oui, oui, oui !

La vitesse est bien

la dérivée de la position !

$$\vec{x}(t) = r(t) \vec{e}_r(t)$$



Et si on bouge
radialement
sur un plateau
qui tourne ?



$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = r'(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}(t)}_{\omega \vec{e}_\theta(t)}$$

Avec un peu d'algèbre
un brin fastidieuse...

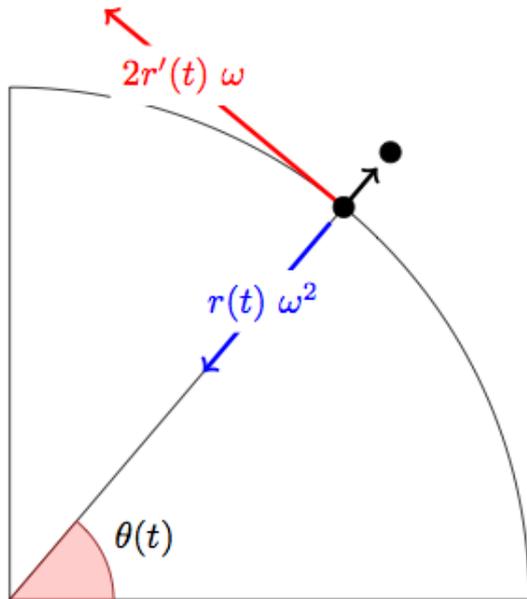
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = r''(t) \vec{e}_r(t) + r'(t) \underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}(t)}_{\omega \vec{e}_\theta(t)} + r'(t) \omega \vec{e}_\theta(t) + r(t) \omega \underbrace{\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}(t)}_{-\omega \vec{e}_r(t)}$$

↓

$$= r''(t) \vec{e}_r(t) + 2r'(t) \omega \vec{e}_\theta(t) - r(t) \omega^2 \vec{e}_r(t)$$

Accélération de Coriolis

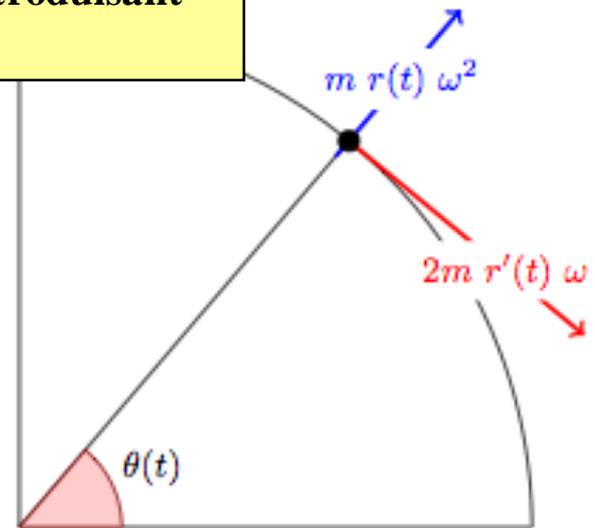
$$\vec{a}(t) = r''(t) \vec{e}_r(t) + 2r'(t) \omega \vec{e}_\theta(t) - r(t) \omega^2 \vec{e}_r(t)$$



Accélération
centripète

On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.

Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant des pseudo-forces centrifuge et de Coriolis



Remplacer
l'accélération de Coriolis
par la pseudo-force de Coriolis !

La résultante de la force de Coriolis et de la force due au gradient de pression atmosphérique fait tourner l'air autour des zones de basse et de haute pression !

Eh oui : la Terre tourne !



**Et voilà le résultat
de la pseudo-force de Coriolis !**



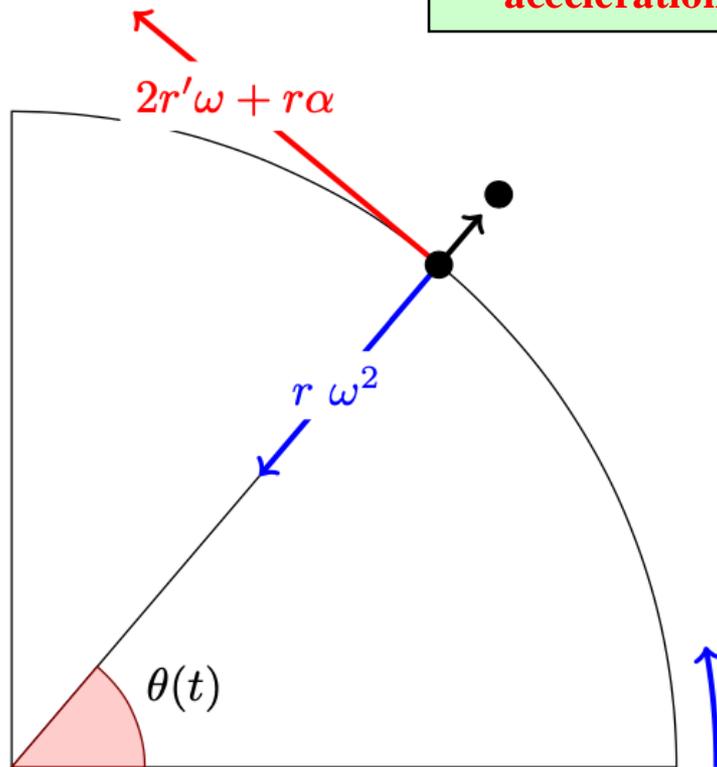
**Et bien non, contrairement à la légende,
l'eau du lavabo ne tourne pas à l'envers dans l'hémisphère sud.**

L'impact de la force de Coriolis est **très très très faible à petite échelle !
Le sens de rotation dépendra davantage de la forme du lavabo
et de l'impulsion initiale lorsque vous retirez le bouchon... (si, si :-)**

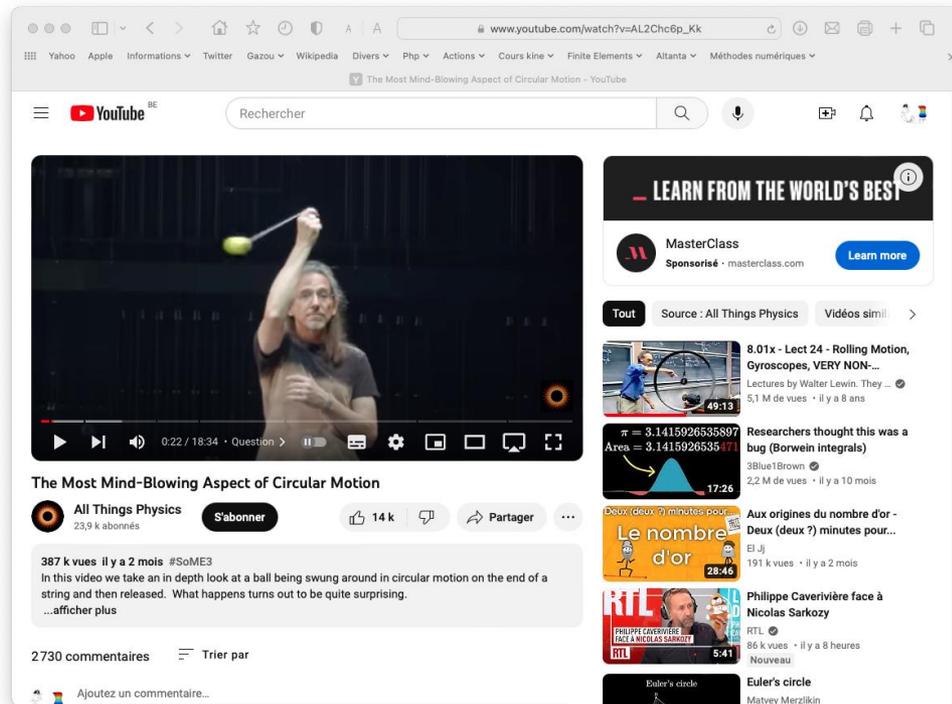
Mais, ceci est une légende urbaine !

Ne pas oublier !

- Dans tout mouvement circulaire, l'accélération a toujours une **composante centripète**.
- Une variation de la vitesse angulaire génère une **accélération tangentielle**.
- Un déplacement radial fait aussi apparaître une **accélération tangentielle dite de Coriolis**.



Pour en savoir un peu plus :-)



The screenshot shows a YouTube video player with the following details:

- Video Title:** The Most Mind-Blowing Aspect of Circular Motion
- Channel:** All Things Physics (23.9 k abonnés)
- View Count:** 387 k vues
- Upload Date:** il y a 2 mois
- Description:** In this video we take an in depth look at a ball being swung around in circular motion on the end of a string and then released. What happens turns out to be quite surprising. ...afficher plus
- Comments:** 2730 commentaires

The video player shows a man swinging a ball on a string. The video progress is at 0:22 / 18:34. The video is sponsored by MasterClass.

Recommended Videos:

- 8.01x - Lect 24 - Rolling Motion, Gyroscopes, VERY NON-...
- Researchers thought this was a bug (Borwein integrals)
- Le nombre d'or
- Aux origines du nombre d'or - Deux (deux ?) minutes pour...
- Philippe Caverivière face à Nicolas Sarkozy
- Euler's circle

https://youtu.be/AL2Chc6p_Kk