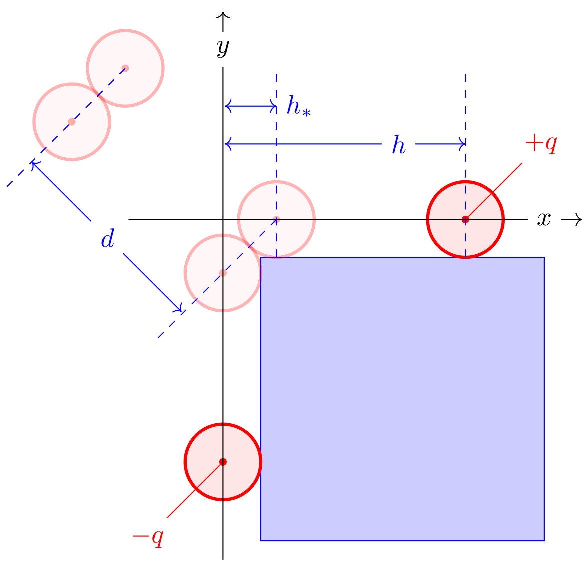
FSA11-ARCH11	
Janvier 2024	*Physique 1*
LEPL1201	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Les facétieux Dimitri et Laurent déposent deux charges...

Vincent et Thomas posent à plat deux roues en plastique de rayon $R = 0.1$ m sur une table horizontale le long de deux cotés d'un bloc carré solidement fixé à la table. Le plateau de la table est sous le bloc et les deux roues dans le plan $z = 0$: on ne la voit donc pas sur le dessin. La quasi totalité de la masse $m = 0.25$ kg de chacune des deux roues est concentrée sur la circonférence. Les coordonnées des positions intiales du centre des roues sont $(h, 0)$ et $(0, -h)$ avec $h = \sqrt{2}$ m pour le système d'axes du dessin.
En $t = 0$, Dimitri et Laurent déposent une charge $+q$ et $-q$ au centre des deux roues avec $q = 10^{-5}$ C.



En $t = 0$, la force de Coulomb commence à faire rouler sans glissement les roues le long du bloc.
Les mouvements des deux roues sont symétriques !

En $t = t_*$, les roues entrent en collision.
Les centres de roues sont alors en $(h_*, 0)$ et $(0, -h_*)$.
Après la collision, les deux roues restent accolées !
Elles cessent également de tourner !
La force de Coulomb les maintient ensemble.

En $t = t_{**}$, les deux roues s'immobilisent après avoir parcouru une distance d.

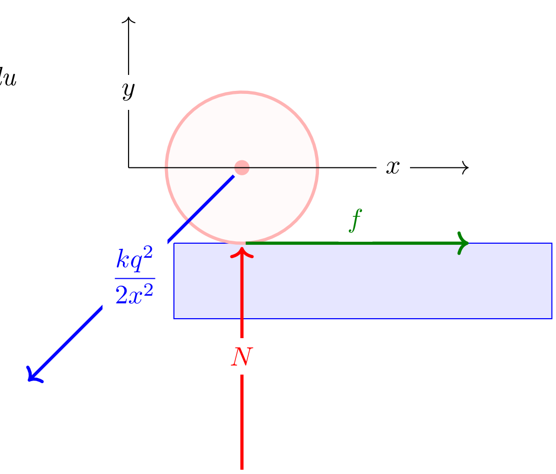
Les roues, la table et le bloc sont non-conducteurs.
On utilisera $g = 10$ m/s^2 et $k = 10^{10}$ N m^2/C^2 pour effectuer tous les calculs.

Le coefficient de frottement cinématique entre la table et les roues est $\mu_c = 0.05$.
Lorsque $t < t_*$, le frottement entre la table et les roues sera considéré comme négligeable.
Lorsque $t > t_*$, ce frottement sera l'unique force pour freiner les deux roues : on ne pourra plus le négliger.

1. Citer et dessiner l'ensemble des forces horizontales sur la roue avec $+q$ lorsque $t \in]0, t_*[$.
   Calculer le moment d'inertie I de cette roue.

Il faut dessiner et citer la force de Coulomb, la force normale du bloc carré sur la roue et le frottement !

- *Force de Coulomb :* $\vec{\mathbf{F}}_e = \begin{bmatrix} -kq^2/(2x^2\sqrt{2}) \\ -kq^2/(2x^2\sqrt{2}) \end{bmatrix}$
- *Force de réaction normale du sol :* $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix}$
- *Force de frottement :* $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$



Eh oui, la roue roule sans glissement.
C'est ce frottement qui fait tourner la roue...
Il est évidemment essentiel de dessiner les forces correctement.
La force électrique s'applique au centre de masse de la roue où la charge est posée.
Les deux autres forces s'appliquent au point de contact avec le bloc carré.
Evidemment, il ne faut pas citer la force de gravité qui est perpendiculaire au plan de la table, ni la réaction verticale de la table !

Ensuite, il faut utiliser l'expression du moment d'inertie d'un cylindre creux.

$$\boxed{I \;=\; mR^2 \;=\; 0.25\ 10^{-2}\ \mathrm{kg\ m^2}}$$

Cette formule était directement fournie dans le formulaire annexé au questionnaire.
Il faut la valeur numérique exacte pour valider votre réponse.

2. En faisant un bilan d'énergie en tenant compte de la rotation de la roue et en intégrant judicieusement le travail de la force de Coulomb, obtenir l'expression de la vitesse $v(x)$ de centre de masse de cette roue lorsque $x \in]h_*, h[$.

L'accroissement d'énergie cinétique provient uniquement du travail de la force de Coulomb :

$$\frac{1}{2}m\Big[v(x)\Big]^2 + \frac{1}{2}I\Big[\omega(x)\Big]^2 \;=\; \int_h^x -\frac{kq^2}{2\sqrt{2}s^2}\,ds$$

En notant que la roue roule sans glissement : $R\omega = v$
Et en sachant que : $I = mR^2$
Et en intégrant le travail de la force de Coulomb

$$m\Big[v(x)\Big]^2 \;=\; \frac{kq^2}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{s}\right]_h^x \;=\; \frac{kq^2}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right]$$

$$\boxed{v(x) \;=\; \sqrt{\frac{kq^2}{2\sqrt{2}m}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right]}}$$

Pour calculer le travail de la force de Coulomb,
on pourrait être tenté d'utiliser le potentiel électrique en x et h.
Mais c'est une mauvaise idée, car les deux charges bougent.
Or, le potentiel électrique est défini à partir de l'énergie potentielle électrique d'une charge un mouvement par rapport à une autre charge fixe !
Utiliser le potentiel surestimera le travail d'un facteur deux :-(

Le calcul du travail de la force de Coulomb est un produit scalaire à faire avec soin :

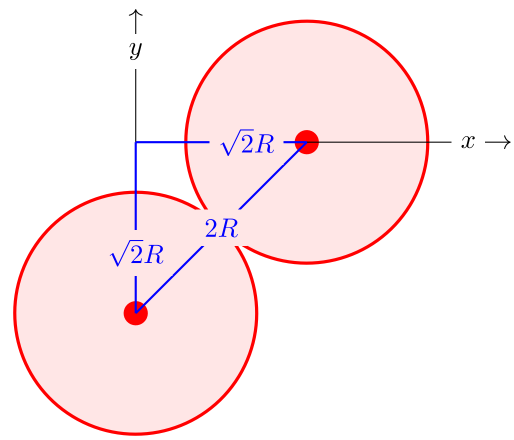
$$\int_h^x \begin{bmatrix} -kq^2/(2s^2\sqrt{2}) \\ -kq^2/(2s^2\sqrt{2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ds \\ 0 \end{bmatrix} \;=\; \int_h^x -\frac{kq^2}{2\sqrt{2}s^2}\,ds$$

Beaucoup d'étudiants oublient le signe négatif et la racine carrée.... !
Beaucoup d'étudiants n'observent pas que la force n'est pas constante !
Ils conservent une valeur constante de la force sur tout l'intervalle.
Beaucoup d'étudiants n'arrivent pas à intégrer cette fonction.
Beaucoup d'étudiants veulent absolument m'écrire un logarithme....

Bien observer que répondre symboliquement pour les sous-questions suivantes permettait d'éviter une catastrophe, si on avait une mauvaise valeur à cette question (ce qui était le cas pour la très grande majorité des étudiants, au passage)

3. Calculer h_* et en déduire la valeur de $v_* = v(h_*)$ juste avant la collision.

Il suffit de considérer un petit triangle rectangle isocèle pour obtenir la position h_* !



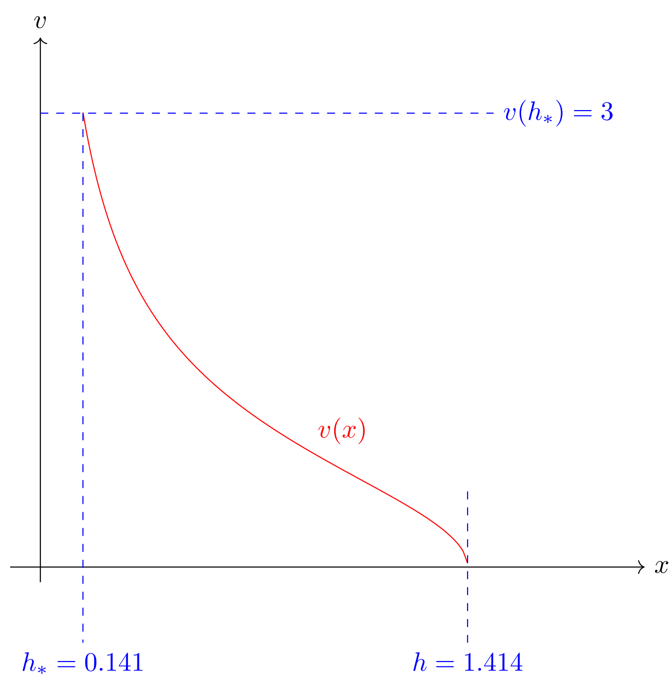
On en déduit immédiatement : $\boxed{h_* \;=\; \sqrt{2}R}$

Et on peut conclure aisément :

$$\boxed{v_* \;=\; \sqrt{\frac{4}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}\times 0.1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]} \;=\; \sqrt{\frac{0.9}{0.1}} \;=\; 3 \text{ m/s}}$$

4. Esquisser graphiquement cette fonction $v(x)$ pour $x \in [h_*, h]$.

   Il suffit de tracer la fonction obtenue à la sous-question deux :-)



Ce graphe était vraiment assez simple à obtenir.
Il fallait juste observer que la tangente en $x = h$ est une droite verticale.
Oui, il suffit de dériver la fonction pour l'observer.
Ce graphe pouvait être directement esquissé avec un tout petit peu de bon sens physique !

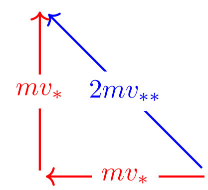
5. Juste après la collision, les deux roues restent accolées et arrêtent de tourner.
Est-ce que la collision est élastique ou inélastique ?
Quel est le vecteur vitesse des deux roues juste après la collision ?

On utilise la conservation de la quantité de mouvement !
Le vecteur de quantité de mouvement des deux roues après la collision sera égal à la somme des deux vecteurs de quantité de mouvement de mouvement de chaque roue avant la collision.
En notant v_{**} la norme de la vitesse après la collision, cela s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ mv_* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mv_* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2mv_{**}/\sqrt{2} \\ 2mv_{**}/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

On en déduit la norme de la vitesse v_{**} après le choc :

$$\boxed{v_{**} \quad = \quad \frac{v_*}{\sqrt{2}} \quad = \quad 2.12 \text{ m/s}}$$



Les deux composantes du vecteur s'écrivent sous la forme :

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}_{**} \quad = \quad \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \text{ m/s}}$$

Ensuite, on peut immédiatement vérifier que l'énergie cinétique n'est pas conservée !

$$\frac{mv_*^2}{2} + \frac{mv_*^2}{2} \; = \; mv_*^2 \quad \neq \quad \frac{mv_*^2}{2} \; = \; \frac{2mv_{**}^2}{2}$$

Et on en déduit donc : $\boxed{\textit{La collision est inélastique}}$

Attention : on conseve la quantité de mouvement, pas la vitesse !
Un nombre incalculable d'étudaints font cette erreur fatale :-(
Attention : il faut vraiment écrire une équation vectorielle !
A nouveau, beaucoup d'horreurs sont écrites par pas mal d'étudiants :-)

6. Quelle sera la distance d parcourue ?

Ce résultat s'obtient en effectuant à nouveau un bilan d'énergie : l'énergie cinétique juste après le choc sera dissipée par le travail de la force de frottement entre la table et les deux roues effectué pendant le déplacement sur une longueur d.

$$\mu_c \; 2mgd \quad = \quad \frac{2mv_{**}^2}{2}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En notant que } v_* = \sqrt{2}\; v_{**}$$

$$\mu_c \; 2gd \quad = \quad \frac{v_*^2}{2}$$

$$d \quad = \quad \frac{v_*^2}{4\mu_c g}$$

Et on peut conclure aisément : $\boxed{d \quad = \quad \frac{9}{4 \times 0.05 \times 10} \quad = \quad \frac{9}{2} \quad = \quad 4.5 \text{ m}}$

(bonus) 7. Est-il légitime de supposer que les roues s'arrêtent de tourner après la collision ?

A priori, les vitesses tangentielles de rotation au point de contact des deux roues sont identiques : il serait donc parfaitement légitime de supposer que le moment cinétique des deux roues est conservé. On pourrait donc conclure que ce n'est pas légitime d'avoir supposé opportunément que les roues ne tournent plus afin que pouvoir calculer aisément le travail du frottement de la table sur un corps qui n'a qu'une translation au point précédent. En effet, calculer le frottement exercé par la table sur une roue en translation et en rotation n'est pas chose aisée à intégrer !

Mais la réponse n'est pas aussi simple : on pourrait très bien imaginer que lors du choc, les deux roues soient endommagées et que leur rotation soit bloquée par l'apparition d'un impulsion angulaire exercée par la table sur les deux roues pendant la collision : cela pourrait donc être légitime.

Mais, alors est-il encore légitime de considérer que la table n'a exercé aucune force sur les deux roues et que le moment de quantité de mouvement reste conservé. Et bien, c'est aussi discutable alors : on pourrait très bien imaginer qu'une partie de la quantité de mouvement a été perdue par une interaction avec la table.... Et donc, l'hypothèse utilisée pour calculer la réponse précédente pourrait aussi être remise en question : pour être précis, on pourrait dire que la distance ainsi estimée est sans doute une estimation maximaliste à prendre avec circonspection.

Il existe donc de multiples réponses acceptables et le bonus est acquis à l'étudiant qui écrit un texte bien argumenté et plausible. Hélas, c'est très rarement le cas :-)

Quelques remarques générales du correcteur

- *Commencer à lire toute la question ouverte et essayer de visualiser, d'imaginer le problème : vous devez voir les petites roues tourner autour du carré !*
  La difficulté majeure de la question est de visualiser physiquement la question...
- *Vous pouvez écrire au crayon, mais apporter alors un taille-crayon et veillez que votre crayon soit bien taillé !*
- *Pensez à encadrer les expressions symboliques utilisées pour obtenir vos résultats. La toute grande majorité des étudiants se trompent en effectuant les calculs, même lorsqu'ils ont obtenu la bonne expression (ou quasiment celle-ci avec l'un ou l'autre toute petite erreur, comme avoir oubliés de mette 2m pour l'équations du mouvement des deux blocs....) Ici, la plupart des étudiants échouent pour le calcul de v_*, alors qu'ils étaient parfaitement capables de faire les questions 5 et 6 qui sont vraiment très classiques ! En donnant une solution symbolique pour ces deux sous-questions, vous obteniez la totalité des points pour ces deux sous-arties.*
- *Ne pas donner juste une valeur numérique sans explication : si votre raisonnement était correct, le correcteur ne peut pas le voir :-)*
- *Il ne faut mettre les valeurs numériques qu'à la fin de votre raisonnement !*
  Tout pouvait se résoudre sans utiliser une calculatrice au passage !
- *Soyez soigneux dans vos dessins !*
  Entrainez vous à rédiger proprement la réponse d'un examen précédent sur un simple recto :-)
- *Il est inutile de baratiner le correcteur.... c'est inutile !*
- *Utiliser l'énoncé comme brouillon avant d'écrire sur la feuille de réponse...*
- *Et soyez cools et calmes pendant votre examen : c'est jouable :-)*
- *Ah oui : savoir résoudre un triangle rectangle isocèle, c'était utile pour une fois !*
- *Il ne faut pas donner autant de détails que cette solution : la totalité de la réponse peut être mise sur un simple recto. En particulier, un dessin soigné pour les forces et le graphe avec les notations habituelles permet d'obtenir tous les points.*
- *Pour vous aider, je vous inclus aussi la copie de l'enseignant qui permettait d'obtenir le maximum de points (avec une pondération approximative des sous-questions).*

Nom:

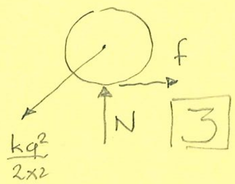
Prénom:

Numéro magique:

Noma:

LEPL1201
Physique 1
Janvier 2024

1



3

$$\underline{I} = m R^2 = 0.25\ 10^{-2}\ \text{kg m}^2$$

1

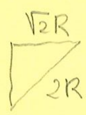
2

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2}_{m v^2} = \frac{kq^2}{2\sqrt{2}} \underbrace{\int_h^x - \frac{ds}{s^2}}_{\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right]}$$

4

$$v(x) = \sqrt{\frac{kq^2}{m 2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right)}$$

3

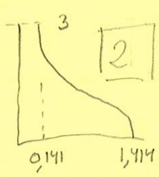


$$h_* = \sqrt{2} R$$

$$v_* = \underbrace{\sqrt{\frac{4}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}R} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}_{3\ m/s}$$

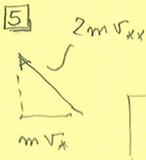
4

4



2

5



$$v_{**} = \frac{v_*}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{v}_{**} = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$$

3

LA COLLISION EST INELASTIQUE

7 SANS DEFORMATIONS... LES ROUES TOURNENT NORMALEMENT !
ROUES DEFORMÉES ?

6

$$2\mu_c \cancel{m} g d = \frac{2 \cancel{m} v_{**}^2}{2}$$

$$d = \frac{v_*^2}{4\mu_c g} = \frac{9}{4 \times 0{,}05 \times 10} = 4{,}5$$

3

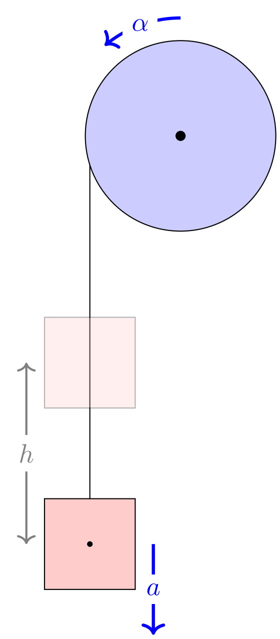
2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé ou un bic noir !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Pour les QCMs, vous avez la possibilité de mettre une très brève justification.
Cette dernière sera lue uniquement si vous avez choisi une réponse erronée !
Une petite portion des points associés à la question pourra alors être attribuée si la justification le mérite.

Q1

Un bloc de masse m est attachée par une corde de masse négligeable
à une poulie de masse M et de rayon R.
La poulie est un cylindre homogène plein.
Jusqu'à l'instant $t = 0$, le bloc est maintenu immobile : sa vitesse est nulle.
A cet instant, il est lâché et chute sous l'effet de la gravité.



Quelle sera la vitesse du bloc lorsqu'il aura chuté d'une hauteur h ?

A	$v = \sqrt{\dfrac{4mgh}{(M+4m)}}$	**A**	☐
B	$v = \sqrt{\dfrac{4mgh}{(M+2m)}}$	**B**	■
C	$v = \sqrt{\dfrac{2mgh}{(M+2m)}}$	**C**	☐
D	$v = \sqrt{\dfrac{mgh}{(M+m)}}$	**D**	☐
E	$v = \sqrt{\dfrac{mgh}{(M)}}$	**E**	☐

Q2

A l'instant $t = 0$, un ressort de raideur k est immobile à sa position d'équilibre.
Une extrémité du ressort est fixée à un mur.
Une masse m est attachée à l'autre extrémité.
Le ressort est ensuite étiré à vitesse v constante pendant n secondes.
Quelle est la puissance P de la force de rappel du ressort à l'instant $t = n$?

A $P = kv^2n^2$

B $P = kv^2n$

C $P = \dfrac{mv^2}{2n}$

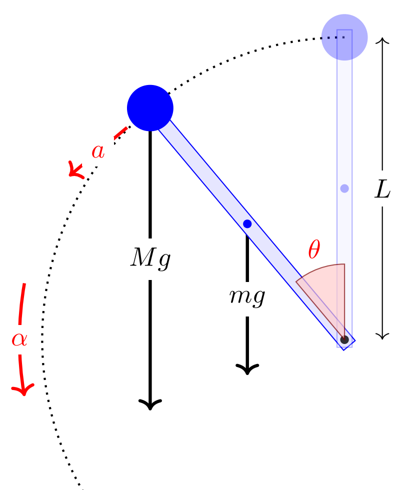
D $P = \dfrac{kv^2}{n}$

E $P = \dfrac{kv^2}{n^2}$

A	☐
B	■
C	☐
D	☐
E	☐

Q3

Un athlète a le bras levé verticalement et tendu au dessus de sa tête.
A l'extrémité du bras, il tient dans sa main une boule de masse M
Il laisse tourner le bras tendu autour de son épaule sous l'effet de gravité.
Le bras est modélisé comme une barre homogène de longueur L et de masse m ?



Quelle est sera l'accélération maximale observée à la main ?

A $a = \left(\dfrac{M}{M+m}\right)\ g$

B $a = \left(\dfrac{M}{M-m}\right)\ g$

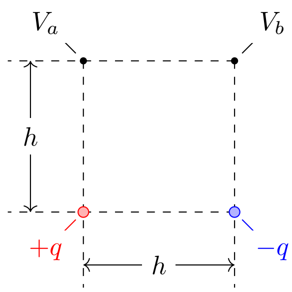
C $a = \left(\dfrac{6M+3m}{6M+2m}\right)\ g$

D $a = \left(\dfrac{6M-3m}{6M-2m}\right)\ g$

E $a = \left(\dfrac{M-\sqrt{2}m}{M+\sqrt{2}m}\right)\ g$

A	☐
B	☐
C	■
D	☐
E	☐

Deux charges $+q$ et $-q$ sont sur les sommets inférieurs d'un carré de côté h.
Les potentiels électriques aux sommets supérieurs sont V_a et V_b.



Q4 Quelle est la différence de potentiel $V_a - V_b$ entre les deux sommets ?

A $V_a - V_b = 0$

B $V_a - V_b = \dfrac{kq(2-\sqrt{2})}{h}$

C $V_a - V_b = \dfrac{kq(2-\sqrt{2})}{2h}$

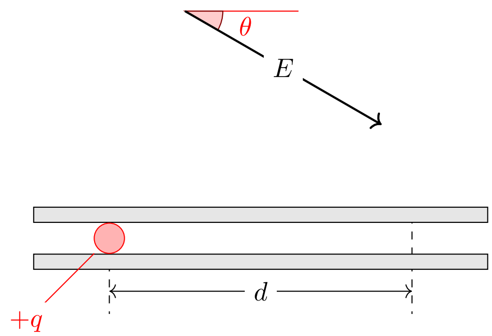
D $V_a - V_b = \dfrac{kq(2\sqrt{2})}{h}$

E $V_a - V_b = \dfrac{kq(\sqrt{2})}{2h}$

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q5

Une bille a une charge $+q$ et une masse m.
Cette bille peut parfaitement glisser dans une rigole isolante.
A l'instant $t = 0$, la bille est immobile. On applique alors un champ électrique E uniforme orienté selon un angle θ par rapport à l'axe de la rigole.
A l'instant $t = t_*$, la bille a parcouru une distance d.



Quelle est la vitesse v_* à l'instant t_* ?

A $v_* = \sqrt{\dfrac{2qEd\cos\theta}{m}}$

B $v_* = \sqrt{\dfrac{2qEd}{m\cos\theta}}$

C $v_* = \sqrt{\dfrac{2qEd}{m}}$

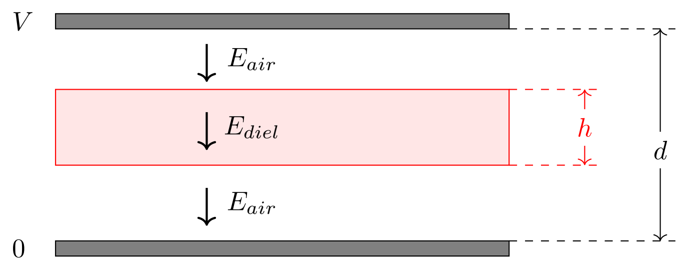
D $v_* = \sqrt{\dfrac{4qEd}{m\cos\theta}}$

E $v_* = \sqrt{\dfrac{4qEd\cos\theta}{m}}$

A ■
B □
C □
D □
E □

Q6

Considérons un condensateur à deux plaques parallèles avec un écart d.
Le condensateur est soumis à une différence de potentiel V.
Le condensateur est partiellement rempli d'un diélectrique d'épaisseur h et de permittivité relative ϵ_r.



Quelle vaut le champ électrique à l'intérieur du diélectrique ?

A $E_{diel} = \dfrac{V}{\epsilon_r d + (1-\epsilon_r)h}$

B $E_{diel} = \dfrac{V}{(\epsilon_r - 1)d + h}$

C $E_{diel} = \dfrac{V}{\epsilon_r d + h}$

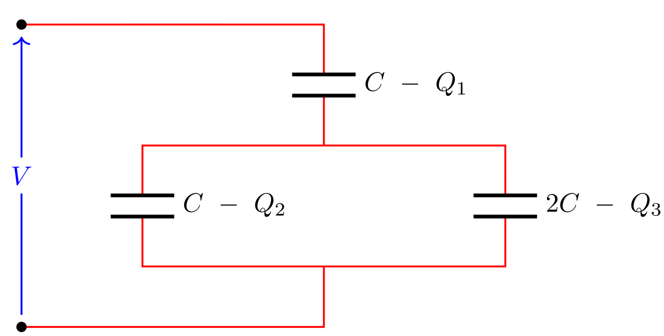
D $E_{diel} = \dfrac{V}{\epsilon_r h + d}$

E $E_{diel} = 0$

A ■
B □
C □
D □
E □

Q7

Un réseau de trois condensateurs est relié à une source de tension V.
On observe les charges Q_1, Q_2 et Q_3 dans les condensateurs.
La capacité du condensateur de droite est le double de celle des deux autres.



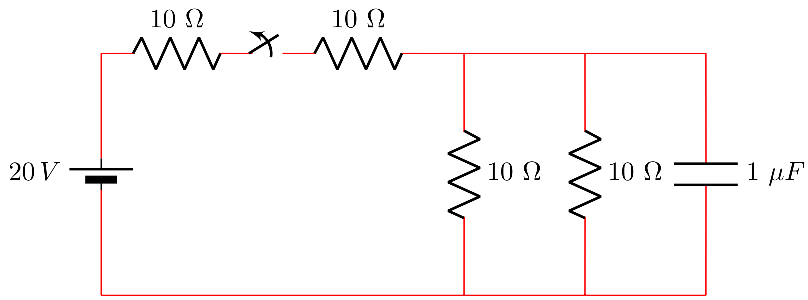
Quelle est l'unique relation correcte ?

A $3Q_1 = 2Q_3$
B $3Q_1 = 2Q_2$
C $2Q_1 = 3Q_3$
D $2Q_1 = 3Q_2$
E $2Q_3 = 3Q_2$

A ■
B □
C □
D □
E □

Q8

L'interrupteur a été longtemps fermé en laissant ainsi passer le courant.
Le condensateur est donc chargé à son maximum avec une charge Q.
A l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur et le courant ne passe plus.
A l'instant $t = t_*$, la charge dans le condensateur est $Q_* = Q/e \approx 0.37\ Q$.



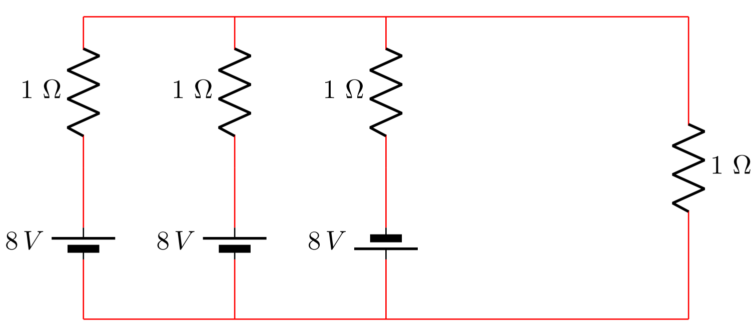
Quelle est la valeur de t_* ?

A $t_* = 0\ \mu$s
B $t_* = 3.33\ \mu$s
C $t_* = 5\ \mu$s
D $t_* = 10\ \mu$s
E $t_* = 20\ \mu$s

A ☐
B ☐
C ■
D ☐
E ☐

Q9

Trois piles identiques sont représentées par leur équivalent de Thévenin
avec une force électromotrice de 8 Volt et une résistance interne 1 Ω.
Les piles sont connectées en parallèle pour alimenter la résistance externe.
Lors du montage, une des piles a été placée erronément à l'envers.



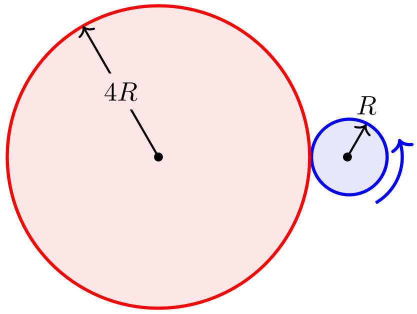
Quelle est la puissance dissipée P dans la résistance externe ?

A $P = 0$ Watt
B $P = 4$ Watt
C $P = 16$ Watt
D $P = 36$ Watt
E $P = 144$ Watt

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q10

Un cylindre de rayon R roule sans glissement sur un cylindre de rayon $4R$.
Le grand cylindre ne bouge pas !
Après avoir parcouru un tour complet du grand cylindre,
le petit cylindre aura effectué n rotations sur lui-même.



Quel est ce nombre n de rotations ?

A $n = 3$
B $n = 4$
C $n = 5$
D $n = 6$
E $n = 7$

A	☐
B	☐
C	■
D	☐
E	☐

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

Formulaire

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + {\color{red}\tfrac{1}{2}I\ \omega^2}\right) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
{\color{red}\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right)} &{\color{red}=} {\color{red}\sum M_i}
\end{aligned}
$$

Mouvement d'un projectile

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

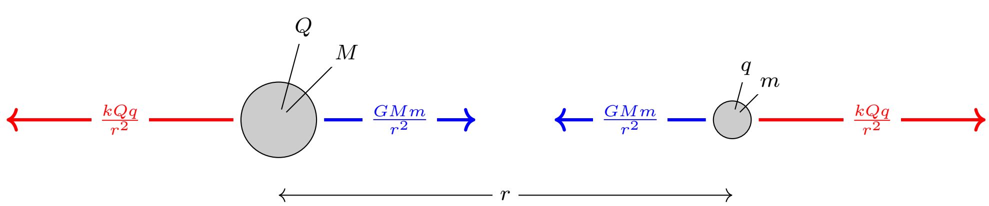
Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Force de gravité et force d'interaction électrique

$$
\begin{aligned}
G &= 6.674\ 10^{-11} && \mathrm{N\ m^2/kg^2} \\
\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k &= 8.988\ 10^{9} && \mathrm{N\ m^2/C^2} \\
\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} &= 8.854\ 10^{-12} && \mathrm{C^2/N\ m^2}
\end{aligned}
$$



Théorème de Gauss

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

Théorème de l'énergie mécanique

$$\Delta \overbrace{\left(\frac{1}{2}m\ v^2 + {\color{red}\frac{1}{2}I\ \omega^2}\right)}^{K} = \sum \overbrace{\int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

Energies potentielles mécaniques

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = \frac{kx^2}{2}$$

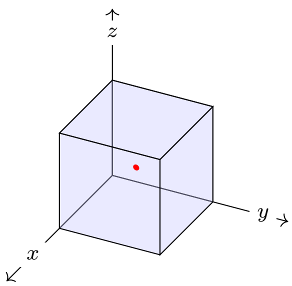
$$U_a - U_b = mgh$$

Energie et potentiel électrique

$$U_a - U_b = q_0 \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

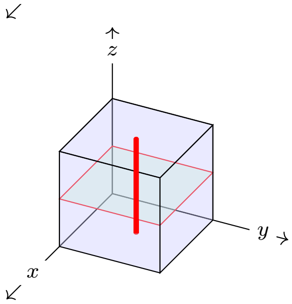
$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

Trois champs et potentiels électriques bien utiles :-)



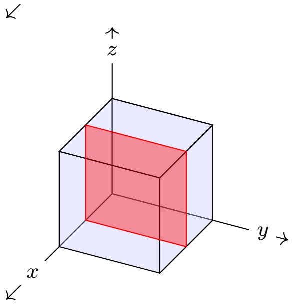
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C$$



$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

$$V = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ \lambda\ \ln(r) + C$$



$$E = \frac{1}{2\epsilon_0}\ \sigma$$

$$V = -\frac{1}{2\epsilon_0}\ \sigma\ r + C$$

r représente la distance à la charge, au fil chargé ou au plan chargé.

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\, r_\perp = F_\perp\, r = F r \sin(\theta)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\, r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

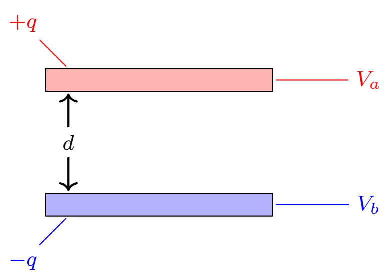
$$I_h = m\, h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

$$\text{Cylindre creux} \quad I = m\, R^2$$

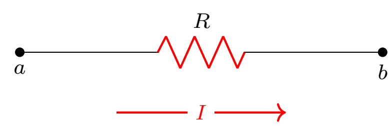
$$\text{Cylindre plein} \quad I = m\, \frac{R^2}{2}$$

$$\text{Barre autour du centre} \quad I = m\, \frac{L^2}{12}$$



$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{d}{\epsilon_0\, S}\, q = \frac{q}{C}$$

$$U = \int_0^q \frac{q}{C}\, dq = \frac{q^2}{2C}$$



$$V_{ab} = \frac{\rho L}{S}\, I = RI$$

$$P = RI^2$$

Résistances et capacités en série

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} \qquad R = \sum R_i$$

Résistances et capacités en parallèle

$$C = \sum C_i \qquad \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$$

Lois de Kirchhoff

$$\sum_{noeuds} I_i = 0$$

$$\sum_{mailles} V_i = 0$$