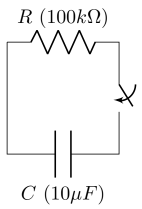
Question. Un condensateur de 10 µF est initialement chargé avec une charge électrique de 100 µC. Au temps t_0, le condensateur est connecté à une résistance externe de 100 kΩ. Représentez sur un premier graphique l'évolution temporelle de la tension V_C aux bornes du condensateur, et sur un second graphique l'évolution temporelle du courant I_R traversant la résistance. Soyez précis sur les unités et les grandeurs pour chacun des axes de vos graphiques, indiquez également les points particuliers représentatifs de cette évolution.

Solution. La situation décrite correspond à la **décharge du condensateur**, dans le circuit équivalent ci-dessous pour lequel au temps initial t_0 l'interrupteur est fermé (laisse passer le courant) tandis qu'il serait ouvert (ne laisse pas passer le courant) avant ce temps initial.



La décharge correspond à l'évolution temporelle de la charge selon une exponentielle décroissante :

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} \text{ [C]}$$

L'expression temporelle met en évidence une **constante de temps** $\tau = RC$, dont la valeur numérique pour ce problème est 10 µF x 100 kΩ = 1 s.

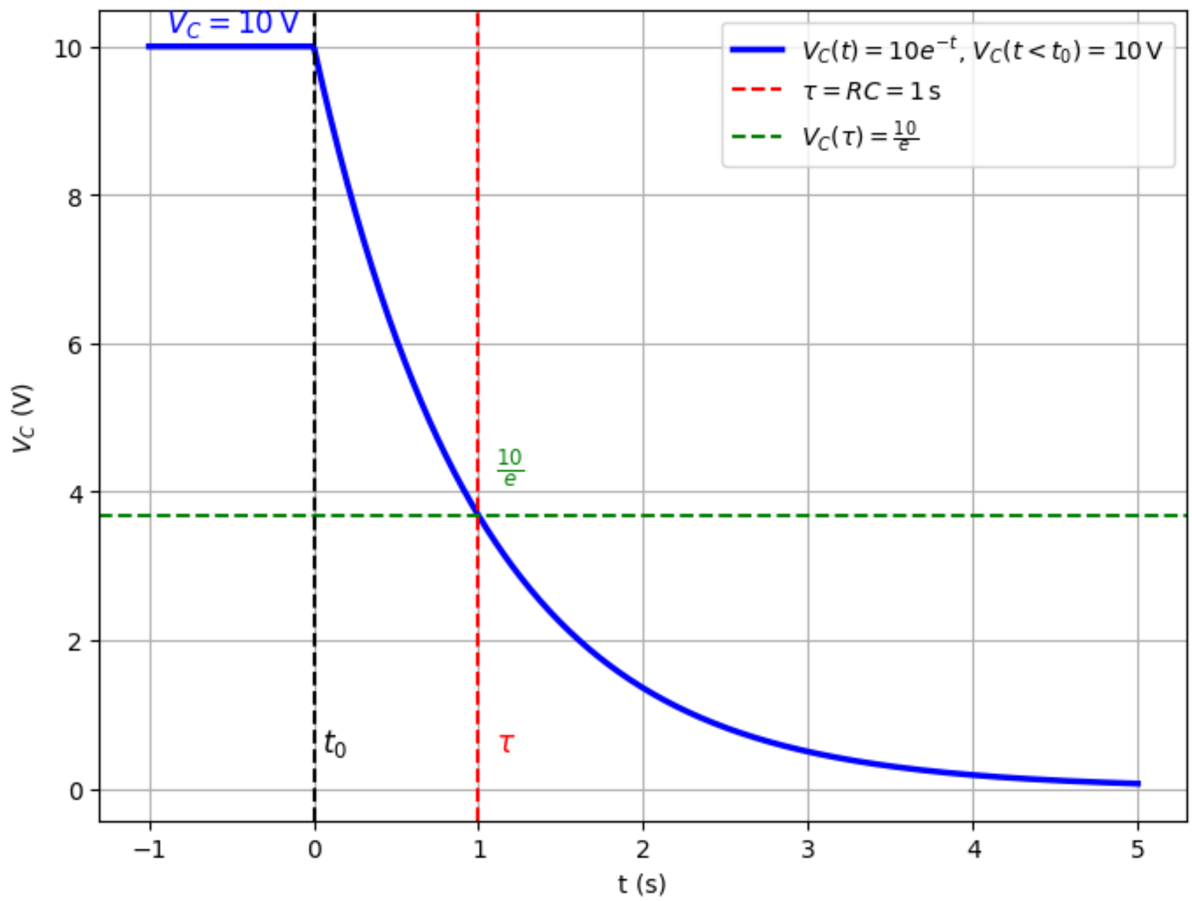
La **tension aux bornes du condensateur** s'obtient à partir de la relation $Q = CV_C$, vraie en tout temps :

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-t/RC}$$

C'est une exponentielle décroissante, qui dans le cas présent peut être détaillée ainsi :

$$V_C(t) = 10\ e^{-t} \text{ [V]}$$

Le graphe correspondant est une exponentielle décroissante, de valeur 10 V en t_0 (= 0 s) et avec la constante de temps telle que après qu'un temps τ se soit écoulé la tension chute de $1/e$ par rapport à sa valeur au début de ce temps.



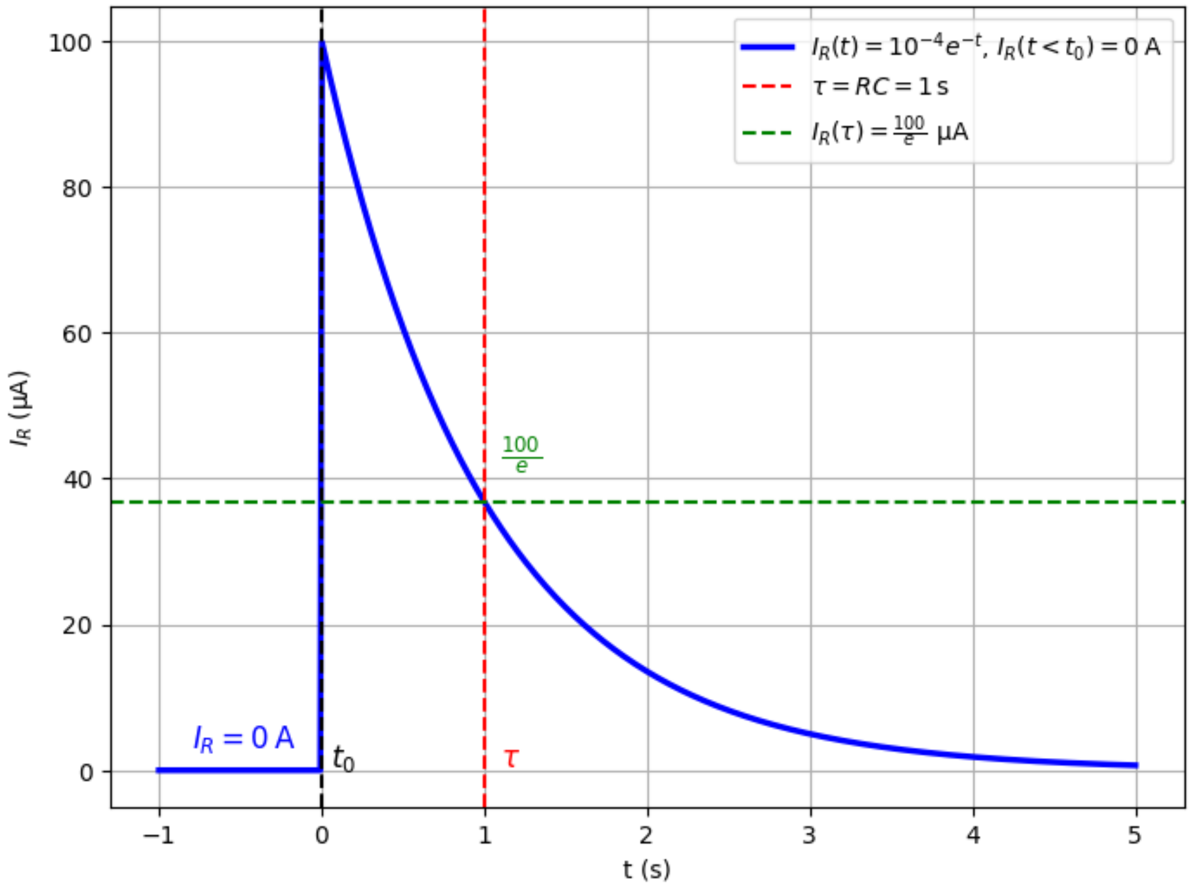
Le **courant traversant la résistance** suit la loi d'Ohm, valable en tout temps : $V_R = RI_R$. Etant donné que la résistance est directement connectée aux bornes du condensateur, les tensions sont identiques : $V_R(t) = V_C(t)$, ce qui fournit finalement :

$$I_R(t) = \frac{V_C(t)}{R} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

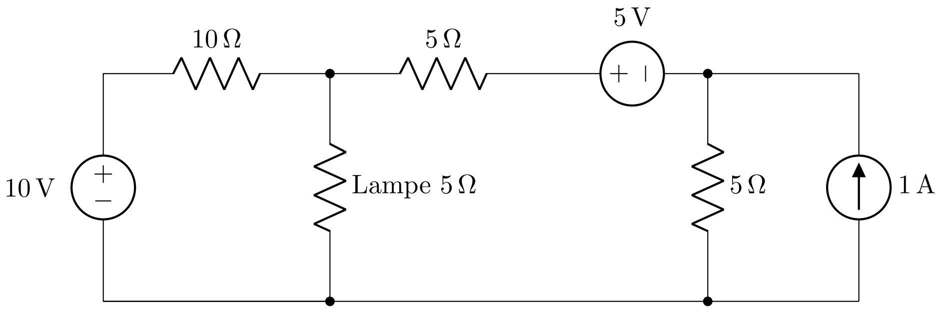
C'est une exponentielle décroissante, qui dans le cas présent peut être détaillée ainsi :

$$I_R(t) = 100\ e^{-t}\ [\mu\text{A}]$$

Le graphe correspondant est identique à une constante près à celui de la tension, soit une exponentielle décroissante, de valeur 100 µA en t_0 (= 0 s) et avec la constante de temps telle que après qu'un temps τ se soit écoulé le courant chute de $1/e$ par rapport à sa valeur au début de ce temps.



Question. Quelle est la puissance dissipée par la lampe dans ce circuit ?



Solution. La puissance de la lampe est donnée par la relation de Joule $P = VI$, avec V la différence de potentiel (tension) aux bornes de la lampe et I le courant traversant la lampe.

La loi d'Ohm liant tension et courant directement sous la forme $V = RI$ nous pouvons déterminer la puissance au départ soit de la tension, soit du courant. Il nous reste donc à déterminer l'un ou l'autre.

Plusieurs pistes sont envisageables pour résoudre cette sous-question. La plus systématique consiste à appliquer les lois de Kirchhoff (KCL et KVL), en prenant toutefois garde que la maille de droite (résistance de 5Ω et source idéale de courant de 1 A) aura une incertitude sur la valeur de tension puisque la tension n'est pas définie précisément sur une telle source (seul le courant l'est) et que, par conséquent, il ne faudra pas appliquer KVL sur la maille correspondante. Une autre piste est d'observer le circuit et de constater des sources réelles et leurs modèles équivalents : les sources idéales de tension sont en série avec une résistance considérée alors comme la résistance interne de chacune des sources dans le modèle de Thévenin, et la source idéale de courant est en parallèle avec une résistance pouvant aussi être considérée comme sa résistance interne dans le modèle de Norton. Les deux sources sur la droite du schéma sont connectées en série, et celles-ci sont en parallèle avec la source à gauche ainsi qu'avec la lampe. Une dernière piste est d'isoler dans le circuit la lampe du reste et de déterminer un équivalent (soit Thévenin, soit Norton) pour le reste du circuit.

Voyons pour chacune de ces possibilités la conclusion à laquelle on aboutit.

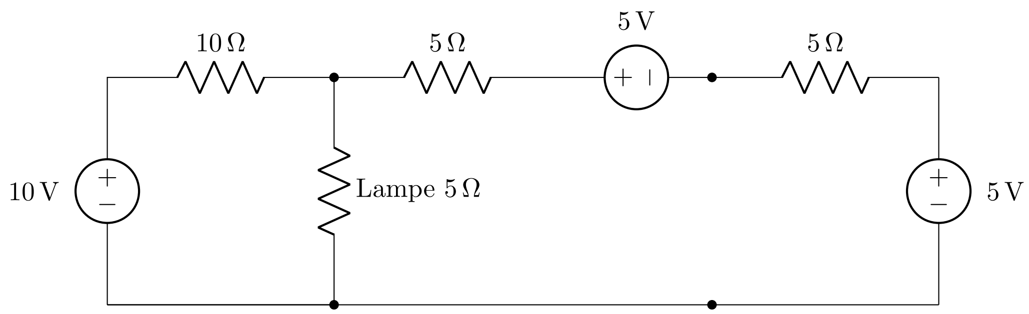
Première possibilité : application « brute » des lois de Kirchhoff

Sur la maille de gauche : 10 [V] – 10 [Ω].I_1 – 5 [Ω].I_{lampe} = 0 → 2 – 2.I_1 – I_{lampe} = 0
Sur la maille au centre : 5 [Ω].I_{lampe} – 5 [Ω].I_2 – 5 [V] – 5 [Ω].I_3 = 0 → I_{lampe} – I_2 – 1 – I_3 = 0
Sur le nœud en haut à gauche : I_1- I_{lampe} - I_2 = 0
Sur le nœud en haut à droite : I_2 + 1 - I_3 = 0

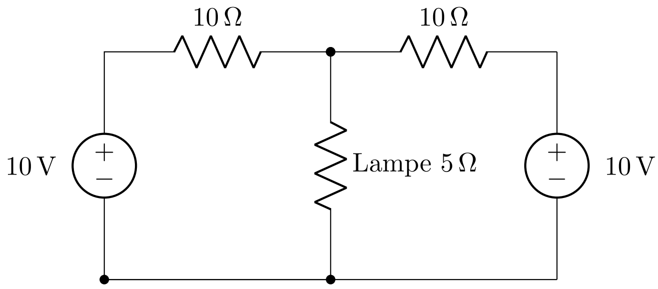
Nous disposons de 4 équations pour résoudre les valeurs de 4 inconnues. On procède par substitution pour déterminer que la valeur de I_{lampe} = 1 A. La puissance de la lampe est ***P* = 5 W**.

Seconde possibilité : conversion entre modèles équivalents (Thévenin <-> Norton)

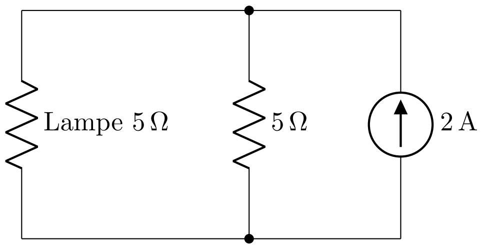
La source de Norton (1 A, 5 Ω) peut être transformée en source de Thévenin (5 V, 5 Ω) pour aboutir au schéma équivalent suivant :



Ce qui après combinaison des sources dans la branche à droite revient au circuit suivant faisant apparaître les deux sources connectées en parallèle entre elles et avec la lampe :



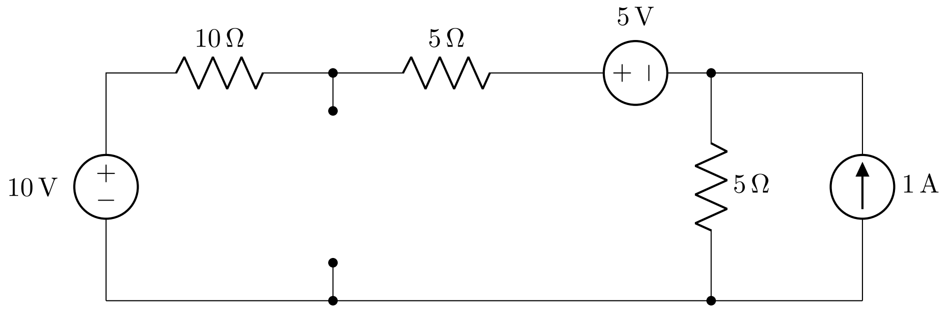
Les deux sources de tension (10 V, 10 Ω) sont avantageusement remplacées par des équivalents de Norton (1 A, 10 Ω) à combiner ensemble pour fournir le schéma final ci-après :



Le courant dans la lampe est déterminé à partir de la relation pour les diviseurs de courant (ici, il se divise simplement en deux entre la lampe et la résistance équivalente de 5 Ω provenant de la combinaison des deux résistances de Norton en parallèle), ce qui donne 1 A. La puissance de la lampe est ***P* = 5 W**.

Troisième possibilité : modèle équivalent de Thévenin du circuit sans la lampe

Le schéma du circuit sans la lampe nous donne :



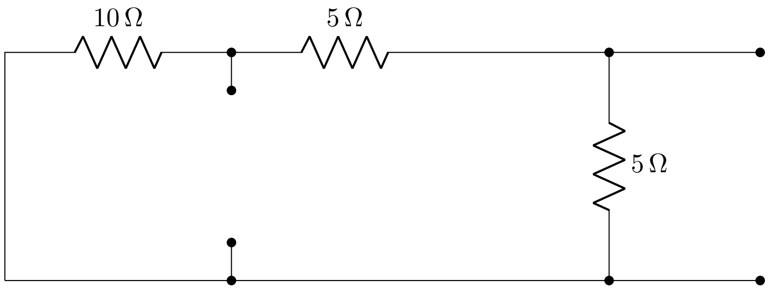
Dans ce schéma, nous déterminons d'abord la tension présente aux bornes après avoir retiré la lampe. Nous aurons deux courants inconnus qui sont I_1 dans la branche constituée des deux sources de tension, et I_2 dans la branche de la résistance de 5 Ω seule. A partir du nœud en bas du schéma qu'on place arbitrairement à la masse (0 V), le nœud en haut du schéma suit les relations suivantes :

$10\ [V] - (10\ [\Omega] + 5\ [\Omega]).\ I_1 - 5\ [V] = -5\ I_2 \rightarrow\ 3\ I_1 - 1 = I_2$

$I_1 - I_2 + 1\ [A] = 0 \rightarrow -2\ I_1 = 0 \rightarrow I_1 = 0$

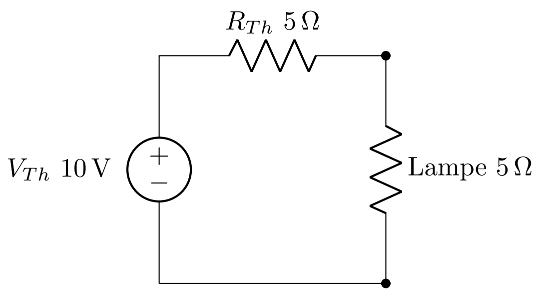
Comme il n’y a pas de courant dans la branche de gauche, **la tension équivalente de Thévenin est de 10 V**.

Nous déterminons ensuite la résistance équivalente en annulant toutes les sources en les remplaçant soit par un court-circuit pour les tensions, soit par un circuit ouvert pour le courant.



Nous déterminons la résistance équivalente du circuit vue entre les deux bornes où se trouvait la lampe. On obtient une **résistance équivalente de Thévenin de 5 Ω** en constatant que les deux résistances de 5 Ω sont en série (on peut les remplacer par une résistance équivalente de 10 Ω), en parallèle avec la résistance de 10 Ω.

Finalement, le modèle complet (Thévenin + lampe) se résume ainsi au schéma ci-après, le courant dans la lampe est égal à 1 A (par la loi d’Ohm, 10 V sur les deux résistances de 5 Ω placées en série) et la puissance de la lampe est ***P* = 5 W**.



Code circuitikz pour le schéma

```
\documentclass{standalone}
\usepackage{circuitikz}

\begin{document}
\begin{circuitikz}[american]

% Source de tension 10V et résistance en série et lampe
\draw (0,0) to[V, invert, V=$10\,\mathrm{V}$] (0,3)
to[R=$10\,\Omega$] (3,3)
to[R=$\mathrm{Lampe} \ 5\,\Omega$,*-] (3,0)
to[short,*-] (0,0);
```

```
% Source de tension 5V et résistance en série
\draw (3,3) to[R=$5\,\Omega$] (6,3)
to[V, v=$5\,\mathrm{V}$] (8,3);

% Source de courant 1A avec résistance en parallèle
\draw (8,3) to[R=$5\,\Omega$,*-] (8,0)--(0,0) ;
\draw (8,3) to[short](10,3);
\draw (10,0) to[I,  I_=$1\, \mathrm{A}$] (10,3);
\draw(10,0) to [short,-*](8,0);

\end{circuitikz}
\end{document}
```

Code python pour le graphe de la tension du condensateur

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Extend time and voltage to include pre-zero region
t_extended = np.linspace(-1, 5, 600)  # From -1 to 5 seconds
V_C_extended = np.where(t_extended < 0, 10, 10 * np.exp(-t_extended))  # Voltage = 10 V
for t < 0

# Constants
tau = 1  # Time constant RC = 1 second
V_tau = 10 / np.e  # Voltage at t = tau

# Plot
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(
   t_extended,
   V_C_extended,
   label=r"$V_C(t) = 10e^{-t}$, $V_C(t<t_0) = 10\,\mathrm{V}$",
   color="blue",
   linewidth=2.5,  # Widen the blue line
)
plt.axvline(tau, color="r", linestyle="--", label=r"$\tau = RC = 1 \, \mathrm{s}$")
plt.axhline(V_tau, color="g", linestyle="--", label=r"$V_C(\tau) = \frac{10}{e}$")

# Annotations
plt.text(tau + 0.1, 0.5, r"$\tau$", color="r", fontsize=12)
plt.text(tau + 0.1, V_tau + 0.5, r"$\frac{10}{e}$", color="g", fontsize=12)
plt.text(-0.9, 10.2, r"$V_C = 10 \, \mathrm{V}$", color="blue", fontsize=12)
plt.axvline(0, color="black", linestyle="--")  # Mark t_0
plt.text(0.05, 0.5, r"$t_0$", color="black", fontsize=12)
```

```python
# Titles and labels
plt.title("")
plt.xlabel("t (s)")
plt.ylabel(r"$V_C$ (V)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Code python pour le courant de la résistance

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Extend time and voltage to include pre-zero region
t_extended = np.linspace(-1, 5, 600)  # From -1 to 5 seconds
I_R_extended = np.where(t_extended < 0, 0, 100 * np.exp(-t_extended))  # Current = 0 for t < 0

# Constants
tau = 1  # Time constant RC = 1 second
I_tau = 100 / np.e  # Voltage at t = tau

# Plot
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(
    t_extended,
    I_R_extended,
    label=r"$I_R(t) = 10^{-4}e^{-t}$, $I_R(t<t_0) = 0\,\mathrm{A}$",
    color="blue",
    linewidth=2.5,  # Widen the blue line
)
plt.axvline(tau, color="r", linestyle="--", label=r"$\tau = RC = 1 \, \mathrm{s}$")
plt.axhline(I_tau, color="g", linestyle="--", label=r"$I_R(\tau) = \frac{100}{e} \ \mathrm{\mu A}$")

# Annotations
plt.text(tau + 0.1, 0.5, r"$\tau$", color="r", fontsize=12)
plt.text(tau + 0.1, I_tau + 5, r"$\frac{100}{e}$", color="g", fontsize=12)
plt.text(-0.8, 3, r"$I_R = 0 \, \mathrm{A}$", color="blue", fontsize=12)
plt.axvline(0, color="black", linestyle="--")  # Mark t_0
plt.text(0.05, 0.5, r"$t_0$", color="black", fontsize=12)

# Titles and labels
plt.title("")
plt.xlabel("t (s)")
plt.ylabel(r"$I_R\ ( \mathrm{\mu A})$")
plt.grid(True)
```

```
plt.legend()
plt.show()
```

Code Tikz pour le RC

```
\documentclass{article}
\usepackage{circuitikz}

\begin{document}

\begin{circuitikz}
   % Draw the resistor
   \draw (0,0) to[R, l=$R\ (100 k\Omega)$] (2,0)
        % Connect the resistor to the capacitor
        to[switch] (2,-2)
        to[C, l=$C \ (10 \mu F)$] (0,-2)
        % Close the loop
        to[short] (0,0);

\end{circuitikz}

\end{document}
```