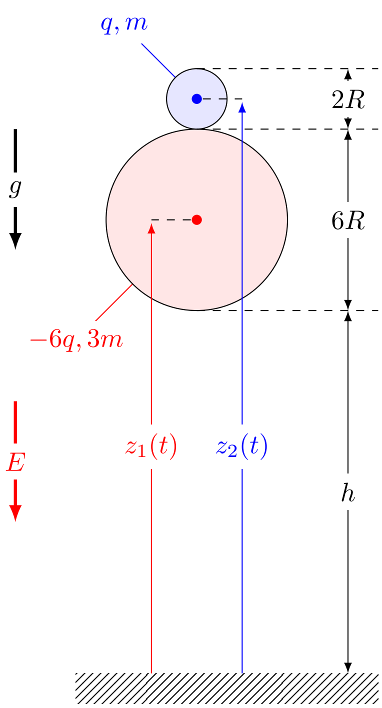
FSA11-ARCH11	
Janvier 2026	*Physique 1*
LEPL1201	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 Thomas veut faire rebondir des balles...



Thomas a deux balles en plastique avec une charge à leur centre.
Les rayons des balles sont $R_1 = 3R = 0.3$ m et $R_2 = R = 0.1$ m.
Leurs deux masses sont $3m = 0.03$ kg et $m = 0.01$ kg.
Leurs deux charges sont $-6q = -6 \times 10^{-7}$ C et $q = 10^{-7}$ C.
Thomas pose la petite balle sur la grosse balle.

En $t = 0$, Thomas lâche les deux balles d'une hauteur $h = 3.2$ m.
Les positions verticales des centres sont notées par $z_1(t)$ et $z_2(t)$.

En $t = t_*$, la grosse balle atteint le sol.
Les collisions entre les balles et le sol sont **parfaitement élastiques**.
Ces collisions sont aussi **instantanées et successives**.
Après les chocs, les balles ont deux vitesses distinctes $v_1^+ < v_2^+$.
Ensuite, un mouvement périodique par rebonds s'installe.
La période de ce mouvement est T.
Mais, c'était un problème trop simple pour Laurent !

En $t = t_*$, Laurent crée un champ électrique dirigé vers le bas $\vec{E}$.
La norme de ce champ spatialement uniforme est $E = 10^6$ V/m.
La grosse balle peut alors rattraper la petite balle en $t = t_{**}$.
Le champ électrique est coupé dès que les deux balles sont en contact.

Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2 et $k = 10^{10}$ N m^2/C^2.

1. Montrer que la force d'attraction électrique entre les deux charges est négligeable.
   Il suffit d'estimer la valeur numérique de la force de Coulomb.
   Et ensuite de la comparer avec la plus petite de forces de gravité.

$$F_e \;=\; k\,\frac{6q^2}{16R^2} \;=\; \tfrac{3}{8}\;10^{-2} \;=\; 3.75\;10^{-3}\ \text{N}$$

$$F_g \;=\; mg \;=\; 0.1\ \text{N}$$

On observe bien : $\boxed{F_e \quad \ll \quad mg}$

La question est vraiment totalement élémentaire !
Et pourtant beaucoup n'arrivent pas à obtenir les deux valeurs numériques.
Oui : le rapport est de l'ordre 3% : c'est bien négligeable.
Evidemment sur l'ensemble formé par les deux billes, ce sont des forces internes qui s'annulent.
Mais énoncer ce fait n'est pas une réponse correcte pour la question.
Car nous allons négliger cette force même si les billes se séparent...

2. Calculer le temps t_* correspondant à la chute libre des deux balles.

   C'est un simple calcul usuel de chute libre !

$$\begin{array}{ccc} h & = & g\dfrac{t_*^2}{2} \\ \downarrow & & \\ t_* & = & \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \sqrt{0.64} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} v & = & gt_* \\ \downarrow & & \\ v & = & gt_* = \sqrt{2hg} = \sqrt{64} \end{array}$$

On a donc : $\boxed{\begin{array}{ccc} v & = & 8 \text{ m/s} \\ t_* & = & 0.8 \text{ s} \end{array}}$

   Et cela reste totalement élementaire !
   Attention : Oui : il y a juste un facteur 10 entre vitesse et temps de chute.
   Attention : Non : il est incorrect d'écrire $h = t_* v$: ce n'est pas un MRU !

3. Calculer la vitesse v avant la collision, puis les vitesses v_1^+ et v_2^+.

   Pour obtenir les deux vitesses après la collision, il faut deux relations.
   L'énoncé mentionne deux collisions distinctes, simultanées et élastiques.
   D'abord, on considère le rebond élastique de la grosse bille sur le sol.
   Ensuite, on fait une collision élastique entre les deux billes.

   Les deux chocs conservent l'énergie cinétique.
   La quantité de mouvement est conservée dans le choc entre les deux billes.

$$\begin{cases} 3mv - mv & = & 3mv_1^+ + mv_2^+ \\ 4mv^2 & = & 3m\left(v_1^+\right)^2 + m\left(v_2^+\right)^2 \end{cases}$$

   Avec comme vitesse initiale $v = 8$, le système devient :

$$\begin{cases} 16 & = & 3\ v_1^+ + v_2^+ \\ 256 & = & 3\left(v_1^+\right)^2 + \left(v_2^+\right)^2 \end{cases}$$

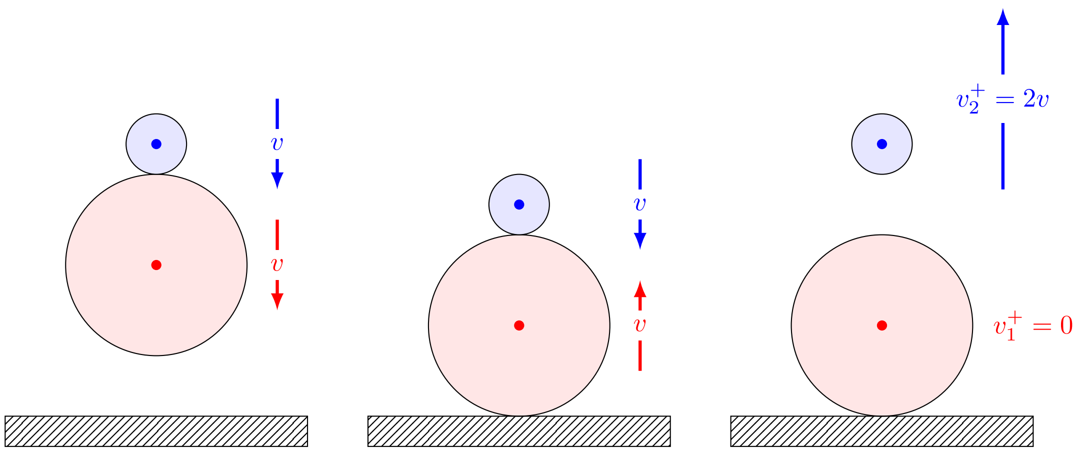
   Et en substituant une des inconnues, on obtient une équation du second degré pour v_1^+ :

$$\begin{array}{ccl} 256 & = & 3\left(v_1^+\right)^2 + \left(16 - 3v_1^+\right)^2 \\ & \downarrow & \\ 256 & = & 3\left(v_1^+\right)^2 + 256 + 9\left(v_1^+\right)^2 - 96v_1^+ \\ & \downarrow & \\ 0 & = & 12\ v_1^+\left(8 - v_1^+\right) \end{array}$$

   Il y a deux solutions possibles : soit $v_1^+ = 0$, soit $v_1^+ = 8$.

Comme l'énoncé exige que la vitesse de la grosse bille soit strictement inférieure, on rejette la solution où les billes rebondissent avec la même valeur et on choisit la valeur nulle $v_1^+ = 0$.

La réponse finale est donc : $\boxed{\begin{aligned} v_1^+ &= 0 \text{ m/s} \\ v_2^+ &= 16 \text{ m/s} \end{aligned}}$



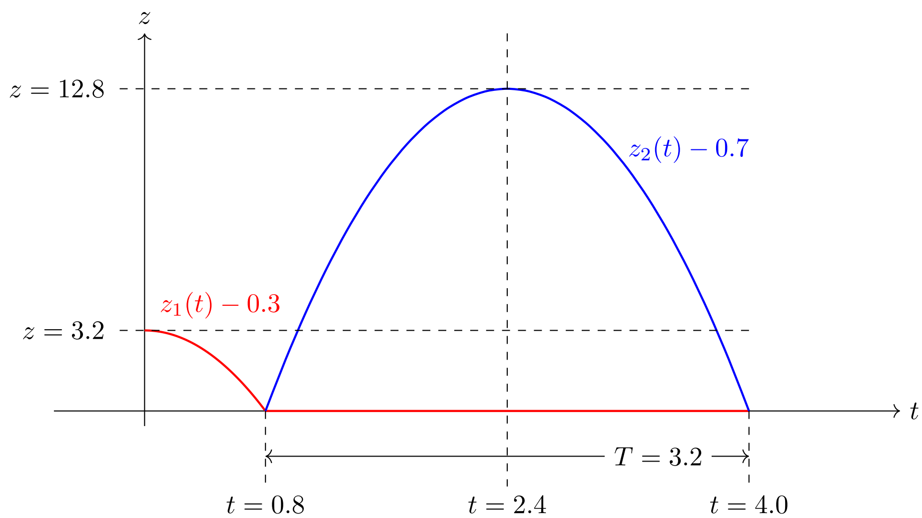
$K = \dfrac{4mv^2}{2} = 1.28$ J $\qquad K = \dfrac{4mv^2}{2} = 1.28$ J $\qquad K = \dfrac{m(2v)^2}{2} = 1.28$ J

$p = -4mv = -0.32$ Ns $\qquad p = 3mv - mv = 0.16$ Ns $\qquad p = m(2v) = 0.16$ Ns

Cette question était difficile !
Et pourtant, le résultat est vraiment super simple !
Ce résultat n'est pas intuitif et pourtant c'est bien ce qu'on observe physiquement.
De manière assez paradoxale, certains étudiants obtiennent la bonne réponse, expliquent esnuite sur leur copie que c'est pas possible et choisissent de continuer avec d'autres valeurs de vitesses !
Non ; le rapport des vitesses n'est pas donné par le rapport des masses !
Oui : il est possible de réussir toutes les autres sous-questions, sans avoir obtenu ces deux vitesses.
Oui : l'enseignant a choisi les paramètres pour avoir ce résultat assez remarquable et peu intuitif.
Oui : la plupart des étudiants n'ont pas trouvé les deux vitesses !
Oui : bien écrire les relations permettait d'obtenir pas mal de points !
Oui : l'algèbre était pourtant élémentaire !
Oui : à la fin, c'est toujours le Sénégal qui gagne et le Maroc qui perd !
Oui : à la fin, c'est toujours l'enseignant qui vous maraboute !

4. Tracer les courbes $z_1(t) - 3R$ et $z_2(t) - 7R$ si le champ électrique E n'est jamais enclenché.
   Quelle est la hauteur maximale atteinte par la petite balle ?
   Quelle est la période T du mouvement par rebonds ?

Il faut juste tracer deux paraboles !
La petite bille est lancée avec une vitesse initiale de 16 m/s *à l'instant* $t = 0.8$.
Elle atteindra une hauteur maximale de $4h = 4 \times 3.2 = 12.8$ m.
Elle prendra un temps $2t_* = 2 \times 0.8 = 1.6$ s *pour atteindre la hauteur maximale.*
Et la période du mouvement par rebonds est $T = 3.2$ s.



Ce graphe était simple à obtenir !
Il suffisait juste de dessiner deux (ou trois) paraboles !
Attention : si les deux billes rebondissent, elle n'auront pas la même période de rebond !
Attention : sans réponse à la sous-question précédente, ne pas calculer de valeurs numériques !
Oui : cette sous-question contenait un petit indice pour la sous-question précédente.
Les valeurs numériques ne sont vraiment pas importantes ici !
Par contre, il faut tracer correctement les deux (ou trois paraboles) pour valider la question !

5. Calculer le temps t_{**} lorsque le champ électrique est enclenché..
Que deviennent les courbes $z_1(t) - 3R$ et $z_2(t) - 7R$ pour $t \in [t_*, t_{**}]$?

Les accélérations des deux billes après le rebond sont :

$$z_1'' = -g + \frac{2qE}{m} \qquad\qquad z_2'' = -g - \frac{qE}{m}$$

La distance $d(t)$ entre les deux centres évolue donc comme suit :

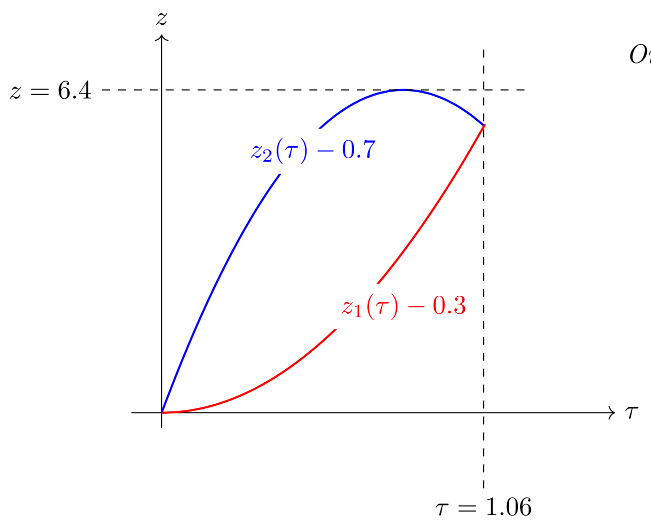
$$z_2'' - z_1'' = d''(t) = -\frac{3qE}{m}$$

En définissant $\tau = t - t_*$

$$d(\tau) = d_0 + d_0'\tau - \frac{3qE}{2m}\tau^2$$

En imposant $d(\tau) = d_0$ et $d_0' = v_2^+ v_1^+ = 16$;

$$0 = 16 - \frac{3qE}{2m}\tau$$



On conclut : $\boxed{\tau = \frac{16}{15} = 1.06 \text{ s}}$

Le dessin pouvait être réalisé sans aucun calcul !
Le développement est plus important que la valeur numérique !
Il était donc possible de valider cette sous-question sans avoir les deux vitesses de rebond en t_* !

6. Le champ électrique généré par Laurent est-il réaliste d'un point de vue physique ?

C'est un champ très élevé !
Obtenir un tel champ parfaitement uniforme serait un vrai défi même pour les dieux du Maxwell
Finalement, on est aussi à la limite de claquage pour l'air.
L'apparition d'arcs éléctriques entre les deux plaques géantes du condensateur serait très probable.

Et il ne faut rien mentionner de plus !
Si vous n'aviez aucune idée, il ne servait rien à de baratiner le correcteur !
Mais on peut deviner que ma valeur était bien à la limite du réalisme, si cette question était là !
La sous-question est anecdotique et ne rapportait quasiment rien au passage :-)
Et très honnêtement, j'ai fait appel à ChatGPT pour vérifier cette réponse :-)

7. Mais, c'est encore un problème trop simple pour Vincent !
   Il souhaite introduire une force de trainée $F = -Kv^2$ avec $K = 0.4$ kg/m.
   On suppose, aussi maintenant, qu'aucun champ électrique n'est présent !
   Quelle est l'équation différentielle gouvernant la chute des deux balles avec cette trainée ?

   Il suffit d'écrire le principe fondamental de la mécanique

   En utilisant comme inconnue $v(t)$: $\boxed{4mv'(t) \quad = \quad 4mg - Kv^2(t)}$

   A nouveau, cette question est totalement élémentaire !
   Oui : on peut changer le signe de tous les termes.
   Oui : on peut écrire l'équation en termes de $z''(t)$ et $z'(t)$.
   Oui : peut introduire une nouvelle variable $M = 3m + m$.
   Oui : on peut même ré-utiliser le même symbole m en supposant qu'il remplace ici $4m$ à la rigueur.
   Mais non, écrire $mv''(t) = 4mg - Kv^2(t)$ est impardonnable par contre !
   Et pourtant, c'était une erreur fréquente : ne pas appliquer bêtement une formule, les gaminets !

8. Calculer la vitesse critique v_* associée à cette équation.

   La vitesse critique est atteinte lorsque l'accélération est nulle :

$$0 \quad = \quad 4mg - Kv_*^2$$

$$\downarrow$$

$$v_* \quad = \quad \sqrt{\frac{4mg}{K}}$$

   On peut donc calculer : $\boxed{v_* \quad = \quad 1 \text{ m/s}}$

9. Résoudre[1] cette équation différentielle.

Pour les valeurs numériques fournies, l'équation différentielle s'écrit simplement :

$$v' = 10\left(1 - v^2.\right)$$

$$\Big\downarrow$$

$$\frac{dv}{1-v^2} = 10\ dt$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En tenant compte que } v(0) = 0,$$

$$\operatorname{arctanh}(v) = 10\ t$$

La solution s'écrit tout simplement : $\boxed{v(t) = \tanh(10t)}$

Pas mal d'étudiants obtiennent ce résultat : bravo !
C'était nettement mieux que ce que j'espérais a priori !
C'est la résolution d'un mathématicien et elle est parfaitement correcte.
C'est donc bien la réponse attendue par le correcteur.
J'ai choisi les valeurs numériques pour que cette question soit simple d'un point de vue algébrique.

Une telle manière de procéder horrifie cependant les physiciens !
Que représente le facteur 10 ?
Ici : on pourrait croire que c'est la gravité.
Et bien : non, ce n'est pas gravité :-)

La solution analytique de ce problème sous forme symbolique s'écrit sous la forme suivante :

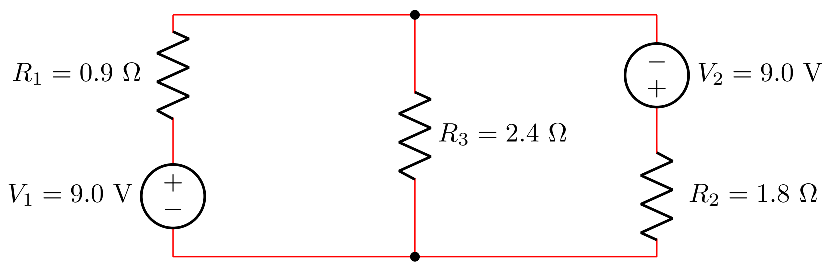
$$\boxed{v(t) = v_* \tanh\left(\frac{gt}{v_*}\right)}$$

On voit donc qu'en choisissant une vitesse critique unitaire, l'enseignant a simplifié l'algèbre !
Attention : avec une telle démarche on perd les dimensions physiques dans la résolution.
Quelques étudiants ont effectué le calcul sans tirer profit de la simplification : bravo à eux !

[1] On pourra utiliser les relations $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$ et $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

2 Petites questions courtes

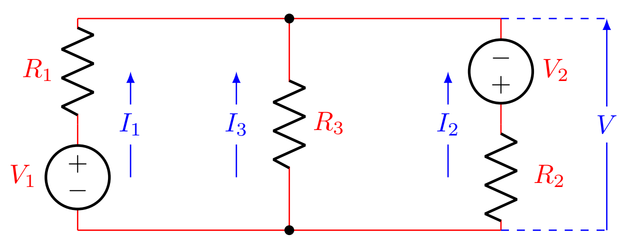
Deux piles modélisées par leurs forces électromotrices V_1 et V_2
avec leurs résistances internes R_1, et R_2. sont montées en opposition.
La borne positive d'une pile est reliée à la borne négative de l'autre pile.
Ensuite ces deux piles sont connectées à une résistance externe R_3.



Quelle la puissance P dissipée dans la résistance externe ?

Q 2.1

Le noeud du bas a un potentiel nul, tandis que le noeud du haut a une tension inconnue V.
Le schéma a trois branches en parallèle entre ces deux noeuds.
On définit un courant sur chaque branche.



On peut immédiatement calculer les trois courants en fonction de V.

$$V = V_1 - R_1 I_1 \quad\longrightarrow\quad I_1 = -\frac{V-9}{0.9}$$

$$V = -R_3 I_3 \quad\longrightarrow\quad I_3 = -\frac{V}{2.4}$$

$$V = -V_2 - R_2 I_2 \quad\longrightarrow\quad I_2 = -\frac{V+9}{1.8}$$

On obtient V avec la somme des courants sortants du noeud du bas.

$$\frac{V-9}{0.9} + \frac{V}{2.4} + \frac{V+9}{1.8} = 0$$

En mettant tout au même dénominateur 7.2 !

$$\begin{aligned}(8+3+4)V - 72 + 36 &= 0\\ V &= 2.4 \text{ V}\end{aligned}$$

Ensuite, on déduit que $I_3 = 1$ A.
La puissance dissipée est $P = R_3 I_3^2 = 2.4$ W.
Il était aussi judicieux de calculer I_1 et I_2 afin de vérifier que $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

Q 2.2

A l'instant $t = 0$, on commence à charger un condensateur de capacité inconnue C avec une source de tension constante V connectée en série avec une résistance $R = 1$ kΩ. Ensuite, on mesure la charge à deux instants t_1 et $t_2 = t_1 + 20$ ms :

$$\begin{aligned} Q(t_1) &= \left(1 - \tfrac{1}{e}\right) Q_{max} \\ Q(t_2) &= \left(1 - \tfrac{1}{e^3}\right) Q_{max} \end{aligned}$$

Quelle est la valeur de C ?

Pour un circuit RC en charge sous une tension constante V, on peut écrire :

$$Q(t) \;=\; CV\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \;=\; CV\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

On déduit immédiatement :

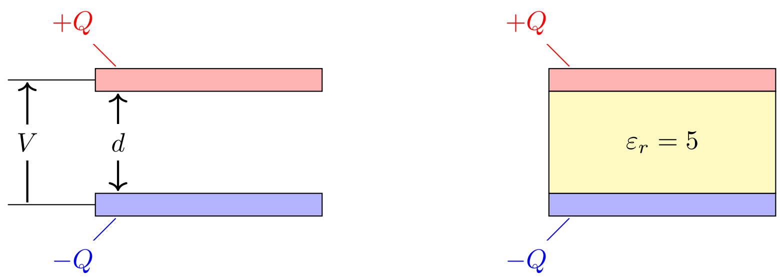
$$\left(1 - e^{-1}\right) = \left(1 - e^{-t_1/\tau}\right) \longrightarrow t_1 = \tau \qquad\qquad \left(1 - e^{-3}\right) = \left(1 - e^{-t_2/\tau}\right) \longrightarrow t_2 = 3\tau$$

Comme $t_2 - t_1 = 2\tau = 20$ ms, on peut finalement obtenir :

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{10^{-2}}{10^3} = 10^{-5}\ \text{F}$$

On conclut que $C = 10\ \mu$F.

Un condensateur a deux plaques distantes de $d = 1$ mm.
La surface des plaques est $S = 100$ cm^2.
On charge le condensateur avec une source de tension constante $V = 100$ V.
Ensuite, la source est déconnectée : le condensateur est isolé.
Finalement, on insère une lame diélectrique de permittivité relative $\varepsilon_r = 5$.
Dans les calculs, on approximera $\varepsilon_0 \approx 10^{-11}$ F/m.
Tous les effets de bord sont négligés.



Q 2.3 Quelle est l'énergie U dans le condensateur isolé avec le diélectrique ?

La capacité initiale du condensateur dans l'air est :

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 10^{-11} \frac{0^{-2}}{10^{-3}} = 10^{-10} \text{ F}$$

On charge à tension constante, on déconnecte et la charge reste constante :

$$Q = C_0 V_0 = 10^{-10} \times 100 = 10^{-8} \text{ C}$$

On introduit le diélectrique dans l'entrefer :

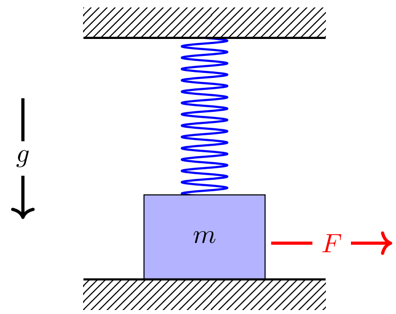
$$C = \varepsilon_r C_0 = 5 \times 10^{-10} \text{ F}$$

Et on obtient l'énergie finale du condensateur isolé :

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(10^{-8})^2}{2 \times (5 \times 10^{-10})} = \frac{10^{-16}}{10^{-9}} = 10^{-7} \text{ J}$$

Q 2.4

Un bloc de masse m est coincé entre un ressort de raideur k et le sol.
Le ressort, de longueur initiale h_0, est comprimé à une longueur $h < h_0$.
Le coefficient de frottement statique entre le bloc et le sol est noté μ_s.



Quelle est l'expression de la force minimale F requise pour mettre le bloc en mouvement ?

Le ressort exerce une force verticale vers le bas sur le bloc :

$$F_r = k(h_0 - h)$$

On calcule l'équilibre vertical du bloc pour déduire la force normale exercée par le sol :

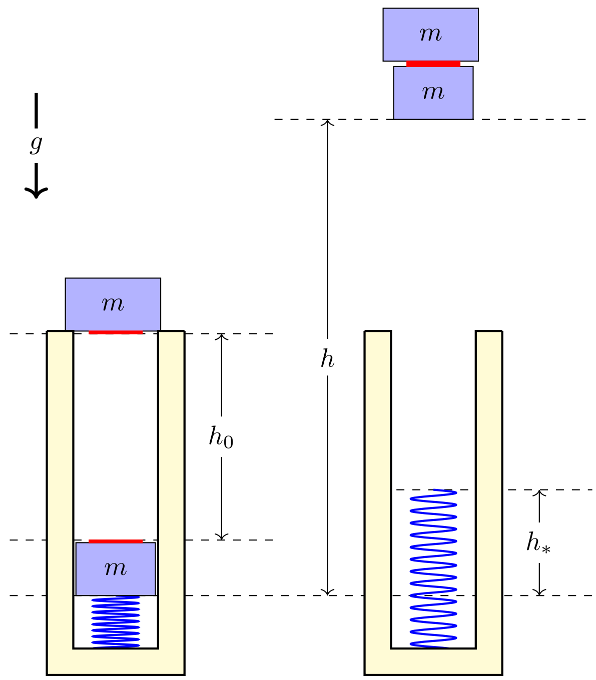
$$N = mg + F_r = mg + k(h_0 - h)$$

La force minimale requise pour mettre le bloc en mouvement est donc :

$$F = \mu_s N = \mu_s \Big(mg + k(h_0 - h) \Big)$$

Q 2.5

Une catapulte est composée d'un ressort, d'un tube et de deux blocs de masse m.
Le premier bloc est posé sur le ressort de raideur k comprimé d'une longueur h_*
Le second bloc est posé sur la sortie du tube à une hauteur h_0 au dessus du premier.
On libère le ressort, le bloc du bas est propulsé et atteint le second bloc
La collision est parfaitement inélastique : les deux blocs restent collés.
Ensuite, l'ensemble des deux blocs continue à monter jusqu'à une hauteur maximale h.
Tous les frottements sont négligés.



Quelle est l'expression de la hauteur maximale h atteinte par les deux blocs ?

La vitesse v_- du bloc avant la collision s'obtient par un bilan d'énergie :

$$\frac{mv_-^2}{2} = \frac{kh_*^2}{2} - mgh_0$$

La vitesse v_+ des blocs se déduit par la quantité de mouvement conservée !

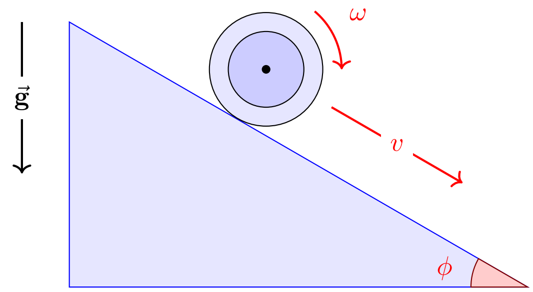
$$mv_- = 2mv_+$$

Finalement, on calcule la hauteur maximale h avec un nouveau bilan d'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{2mv_+^2}{2} &= 2mg(h-h_0) \\ &\Big\downarrow \text{ En remplaçant } v_+ = \tfrac{v_-}{2} \\ v_-^2 &= 8g(h-h_0) \\ &\Big\downarrow \text{ En remplaçant } v_-^2 = \tfrac{kh_*^2}{m} - 2gh_0 \\ h &= \frac{kh_*^2}{8gm} + \frac{3h_0}{4} \end{aligned}$$

Q 2.6

Un cylindre plein de rayon R et de masse m roule sans glisser à vitesse constante $v = R\omega$.
La roue descend sur un plan incliné qui a un angle ϕ avec l'horizontale.
La roue est équipée d'un amortisseur visqueux rotatif composé d'un rotor et d'un stator.
Un fluide visqueux est cisaillé entre ces deux éléments de l'amortisseur.
Cet amortisseur exerce uniquement un moment $\tau = K\omega$ qui s'oppose à la rotation.
Tous les frottements avec l'air sont négligés.



Quelle est l'expression de la vitesse de rotation ω de la roue ?

On écrit les deux équations pour l'équilibre des forces et des moments :

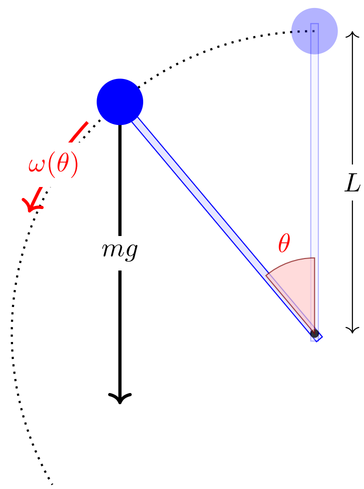
$$\begin{aligned} mg\sin\phi - f &= 0 \\ fR - K\omega &= 0 \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{mgR\sin\phi}{K}$$

Le frottement f s'oppose à la translation et exerce un couple moteur !

Q 2.7

Une bille de masse m est fixée à l'extrémité d'une barre rigide.
La tige, de longueur L et de masse négligeable, peut tourner librement autour d'un axe fixe.
Initialement, la bille est située presque à la verticale au-dessus de l'axe ($\theta = \epsilon$) et est immobile. Toutefois, cette position est instable !
Sous l'effet de gravité, la bille et la tige se mettent progressivement en mouvement.
La bille descend alors et puis remonte vers sa hauteur initiale ($\theta = 2\pi - \epsilon$).
Tous les frottements sont négligés.



Quelle est l'expression de la vitesse angulaire $\omega(\theta)$?

Il s'agit d'un pendule simple inversé sans frottement.
Il suffit de faire un bilan d'énergie avec l'énergie potentielle de gravité !

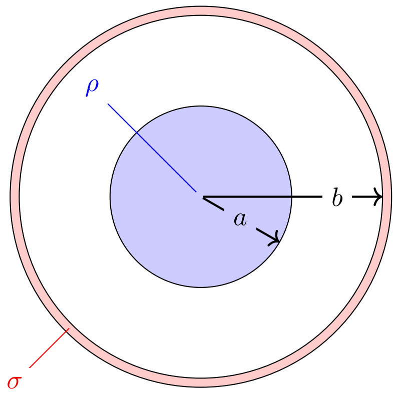
$$\frac{mL^2}{2}\,\omega^2(\theta) + mgL\cos\theta \quad = \quad mgL\cos\epsilon$$

$$\downarrow$$

$$\omega(\theta) \quad = \quad \sqrt{\frac{2g}{L}\Big(\cos\epsilon - \cos\theta\Big)}$$

Le signe de la racine carrée dépend du sens de rotation !

Une sphère de rayon a a une densité de charge volumique ρ.
Cette sphère est dans une coquille de rayon b avec une charge surfacique σ.
Il n'y a aucune autre charge présente dans l'univers de la question !



Q 2.8 Quelle doit être le rapport entre les densités de charge ρ et σ afin que le champ électrique soit nul à l'extérieur de la coquille sphérique ?

Pour que le champ électrique soit nul à l'extérieur,
il faut que la charge totale enfermée soit nulle.

$$Q_{\text{sphère}} + Q_{\text{coquille}} = \frac{4\rho\pi a^3}{3} + 4\sigma\pi b^2$$

$$\Big\downarrow \quad \text{En appliquant le théorème de Gauss !}$$

$$0 = \frac{4\rho\pi a^3}{3} + 4\sigma\pi b^2$$

$$\Big\downarrow$$

$$\frac{\rho}{\sigma} = -\frac{3b^2}{a^3}$$

Formulaire

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Mouvement d'un projectile

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

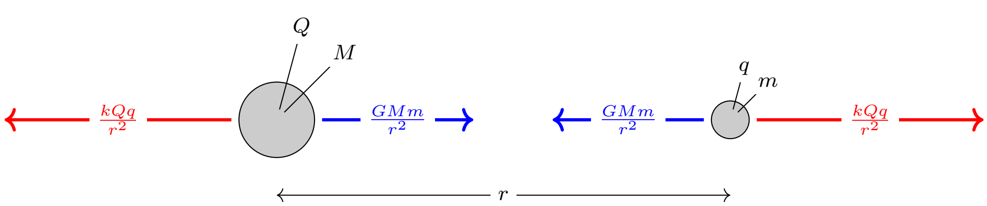
Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Force de gravité et force d'interaction électrique

$$
\begin{aligned}
G &= 6.674\ 10^{-11} \quad \mathrm{N\ m^2/kg^2} \\
\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k &= 8.988\ 10^{9} \quad \mathrm{N\ m^2/C^2} \\
\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} &= 8.854\ 10^{-12} \quad \mathrm{C^2/N\ m^2}
\end{aligned}
$$



Théorème de Gauss

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

Energies potentielles mécaniques

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = \frac{kx^2}{2}$$
$$U_a - U_b = mgh$$

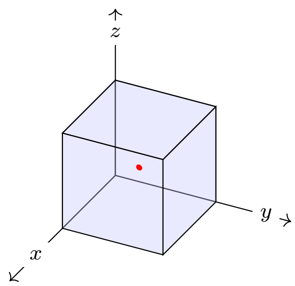
Théorème de l'énergie mécanique

$$\Delta \overbrace{\left(\frac{1}{2}m\ v^2 + \frac{1}{2}I\ \omega^2\right)}^{K} = \overbrace{\sum\int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

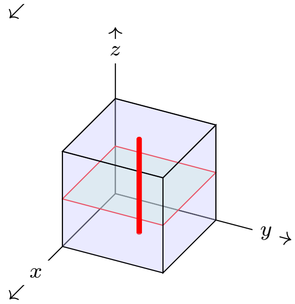
Energie et potentiel électrique

$$U_a - U_b = q_0 \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}$$
$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

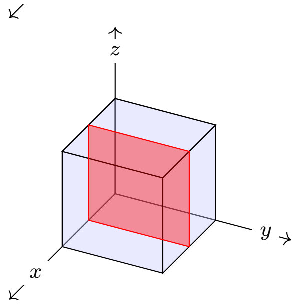
Trois champs et potentiels électriques bien utiles :-)



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{r^2}$$
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{r} + C$$



$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ \frac{\lambda}{r}$$
$$V = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ \lambda\ \ln(r) + C$$



$$E = \frac{1}{2\epsilon_0}\ \sigma$$
$$V = -\frac{1}{2\epsilon_0}\ \sigma\ r + C$$

r représente la distance à la charge, au fil chargé ou au plan chargé.

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\, r_\perp = F_\perp\, r = F r \sin(\theta)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\, r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

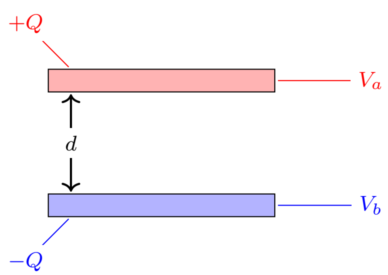
$$I_h = m\, h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

$$\text{Cylindre creux} \quad I = m\, R^2$$

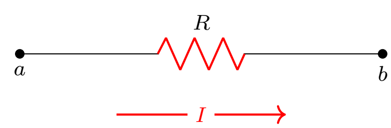
$$\text{Cylindre plein} \quad I = m\, \frac{R^2}{2}$$

$$\text{Barre autour du centre} \quad I = m\, \frac{L^2}{12}$$



$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{d}{\epsilon_0\, S}\, Q = \frac{Q}{C}$$

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq = \frac{Q^2}{2C}$$



$$V_{ab} = \frac{\rho L}{S}\, I = RI$$

$$P = RI^2$$

Résistances et capacités en série

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} \qquad R = \sum R_i$$

Résistances et capacités en parallèle

$$C = \sum C_i \qquad \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$$

Lois de Kirchhoff

$$\sum_{noeuds} I_i = 0$$

$$\sum_{mailles} V_i = 0$$