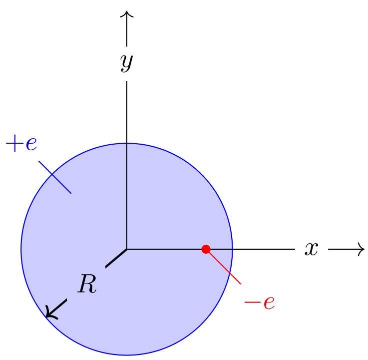
FSA11-ARCH11	
Juin 2024	*Physique 1*
LEPL1201	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

1 The plum pudding model

En 1904, Joseph John Thomson qui découvrit l'électron sept ans plus tôt, proposa un premier modèle de l'atome comme composé d'électrons plongés dans une soupe de charges positives pour équilibrer la charge négative des électrons comme des prunes dans un pudding. Pour l'atome d'hydrogène, la charge positive e de l'atome est uniformement répartie dans une sphère de rayon R, tandis que la charge négative $-e$ est une particule ponctuelle de masse m_e se déplaçant dans cette sphère.

Le champ électrique de la charge positive n'a qu'une unique composante radiale et sera à l'origine de l'unique force qui s'applique à l'électron. On néglige toutes les autres forces.



L'équation du mouvement de l'électron est :

$$\vec{\mathbf{x}}''(t) + \omega^2\ \vec{\mathbf{x}}(t) = 0$$

On utilisera
$m_e = 10^{-32}$ kg
$e = 1.6\ 10^{-19}$ C
$\varepsilon_0 =\ 10^{-11}\ \mathrm{C^2/N\ m^2}$
pour effectuer tous les calculs.

Expérimentalement, on mesure des fréquences pour le mouvement de l'électron de l'ordre de $1.6\ 10^{14}$ 1/s. Et on sait aujourd'hui que le rayon de l'atome de l'hydrogène a une valeur $53\ 10^{-12}$ m (ou 53 pm).

1. Donner l'expression de ρ la densité volumique de charge associée à la charge positive dans la sphère.

Il suffit juste de diviser la charge par le vclume de la sphère !

$$\boxed{\rho \quad = \quad \frac{e}{4\pi R^3/3}\ \mathrm{C\ m^3}}$$

Une majorité d'étudiants ne connaissent pas l'expression du volume d'une sphère !
C'est pourtant essentiel pour de nombreux calculs en physique :-)

2. Donner l'expression de $E(r)$ la norme du champ électrique associée à la charge positive.

   L'expression se trouve immédiatement dans le formulaire en annexe....
   A l'extérieur de la sphère de rayon R , il s'agit du champ généré par une charge ponctuelle.
   A l'intérieur de la sphère R, il faut considérer que la charge incluse dans la sphère de rayon r et donc multiplier l'expression précédente par r^3/R^3.

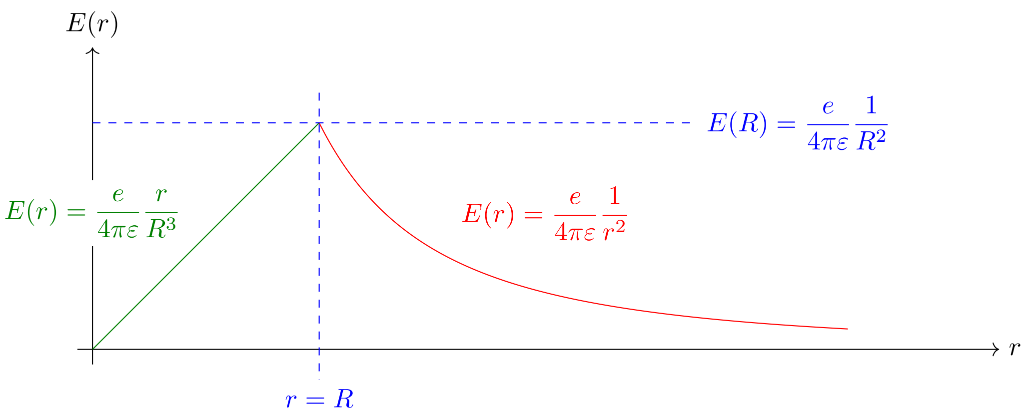
   On obtient donc immédiatement les deux expressions requises :

$$\boxed{\begin{aligned} E(r) &= \frac{e}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2} \qquad r > R \\ E(r) &= \frac{e}{4\pi\varepsilon}\frac{r}{R^3} \qquad r < R \end{aligned}}$$

   C'est vraiment une question très classique d'électrostatique et qui correspond directement à un exercice fait en séance. Oui : calculer des champs électriques fait aussi partie de la matière de l'examen :-)

3. Représenter graphiquement ce champ électrique en fonction de $r \in [0, \infty[$.

   Le graphe peut ensuite être dessiné très aisément.



4. En appliquant le bilan de quantité de mouvement, obtenir l'équation du mouvement de l'électron. Obtenir l'expression de ω en fonction de e, R, ε_0 et m_e.

   On écrit simplement le principe fondamental de la mécanique :

$$m_e \vec{\mathbf{x}}'' = -e \underbrace{\frac{e}{4\pi\varepsilon\ R^3}\vec{\mathbf{x}}}_{\vec{\mathbf{E}}}$$

En regroupant les termes...

$$\vec{\mathbf{x}}'' = -\underbrace{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon\ m_e\ R^3}}_{\omega^2}\vec{\mathbf{x}}$$

On conclut donc : $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon\ m_e\ R^3}}}$

5. Obtenir l'expression du mouvement d'un $\vec{\mathbf{x}}(t)$ d'un électron qui a une position[1] initiale $\vec{\mathbf{x}}(0) = (r_0, 0, 0)$ et une vitesse initiale $\vec{\mathbf{x}}'(0) = (0, v_0, 0)$. Quelle est la forme géométrique de la trajectoire ?

   Les trois équations différentielles pour les trois composantes du mouvement de l'électron sont :

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\omega^2 x(t) \\ y''(t) &= -\omega^2 y(t) \\ z''(t) &= -\omega^2 z(t) \end{aligned}$$

   La solution générale de chacune de ces équations s'obtient immédiatement ! Pour la première composante, on peut écrire :

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \cos(\omega t) + B_x \sin(\omega t) \\ x'(t) &= -A_x \omega \sin(\omega t) + B_x \omega \cos(\omega t) \end{aligned}$$

   où les constantes A_x et B_x sont fixées par les conditions initiales en position et en vitesse.

   On conclut donc : $$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= r_0\ \cos(\omega t) \\ y(t) &= \frac{v_0}{\omega}\ \sin(\omega t) \\ z(t) &= 0 \end{aligned}}$$

   La forme géométrique de la trajectoire est une ellipse : $$\boxed{\left(\frac{x}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega y}{v_0}\right)^2 = 1}$$

   Beaucoup d'étudiants sont perdus face à un système de trois équations différentielles ordinaires scalaires et n'arrivent pas à trouver la trajectoire ! C'est pourtant une des équations différentielles les plus simples qui régit tous les mouvements harmoniques de la physique

6. Que devraient valoir v_0 et r_0 pour que la trajectoire soit circulaire ?

   Les équations paramètriques d'une trajectoire circulaire de rayon r_0 sont :

$$\begin{aligned} x(t) &= r_0\ \cos(\omega t) \\ y(t) &= r_0\ \sin(\omega t) \end{aligned}$$

   Donc, il suffit juste d'exiger : $$\boxed{v_0 = r_0 \omega}$$

   En lisant la question, on pouvait deviner la réponse à la précédente.

[1] L'électron est dans la sphère : $r_0 < R$!

7. Estimer la valeur de R à partir de la fréquence mesurée[2] du mouvement de l'électron. Observer[3] que cette valeur est largement supérieure à valeur de 53 pm.

On écrit la définition de la fréquence :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{e^2}{16\pi^3\varepsilon\ m_e\ R^3}}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En exprimant } R \textit{ à partir de } f \textit{ :-)}$$

$$R = \left(\frac{e^2}{16\pi^3\varepsilon\ m_e\ f^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Big\downarrow$$

$$R = \left(\frac{1.6^2\ 10^{-38}}{16\pi^3 10^{11}\ 10^{-32}\ 1.6^2\ 10^{28}}\right)^{\frac{1}{3}} = \underbrace{\left(\frac{10}{16}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\pi}}_{=0.272} 10^{-8}$$

On peut obtenir : $\boxed{R = 2.72\ 10^{-9}\ \text{m} = 2.72\ \text{nm}}$

Ce qui correspond bien à une valeur nettement excessive par rapport aux mesures expérimentales !

Cette question semble assez simple pour l'enseignant, mais les résultats ont été assez décevants pour être honnête. Il semblerait que pas mal d'étudiants considèrent qu'il n'y aura quasiment jamais de calcul de champ électrique dans la question ouverte : c'est une mauvaise idée.
Ne jamais oublier qu'au jeu du plus stupide, c'est toujours l'enseignant qui gagne !

[2] On définit la fréquence d'un mouvement harmonique de pulsation ω comme $f = \frac{\omega}{2\pi}$

[3] C'est pourquoi, le modèle de Thompson a été ensuite remplacé par le modèle de Rutherford en 1911 :-)

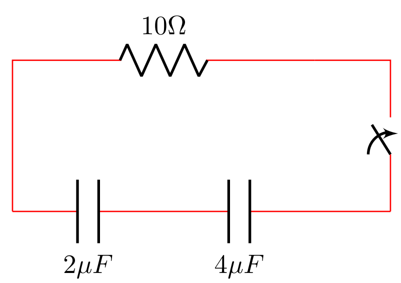
2 Questions à choix multiples

Attention !
Il y a toujours une et une seule bonne réponse !
Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.
Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)
Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé ou un bic noir !
N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Pour les QCMs, vous avez la possibilité de mettre une très brève justification.
Cette dernière sera lue uniquement si vous avez choisi une réponse erronée !
Une petite portion des points associés à la question pourra alors être attribuée si la justification le mérite.

Q1

Initalement, les deux condensateur ont une charge de 2.718 μC (soit la valeur numérique de e en μC). On ferme alors brutalement l'interrupteur laissant ainsi passer le courant.



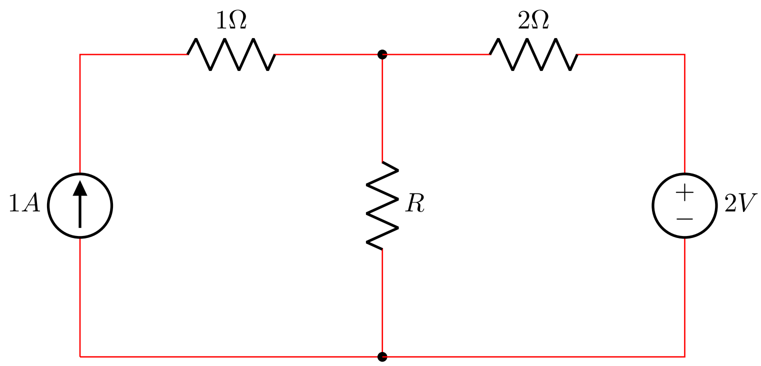
Quel est le temps t requis pour que la charge des deux condensateurs diminue jusqu'à 0.368 μC (soit la valeur numérique de $1/e$ en μC) ?

A $t = 0$ μs
B $t = 40/3$ μs
C $t = 80/3$ μs
D $t = 60$ μs
E $t = 120$ μs

A ☐
B ☐
C ■
D ☐
E ☐

Q2

La résistance R dissipe une puissance électrique de 2 Watt.



Quelle est la valeur de R ?

A $R = 0\ \Omega$
B $R = 0.5\ \Omega$
C $R = 1\ \Omega$
D $R = 2\ \Omega$
E $R = 3\ \Omega$

A ☐
B ☐
C ☐
D ■
E ☐

Q3

Une charge q ponctuelle se déplace le long d'une ligne de champ électrique.
Le champ électrique est homogène dans tout l'espace.

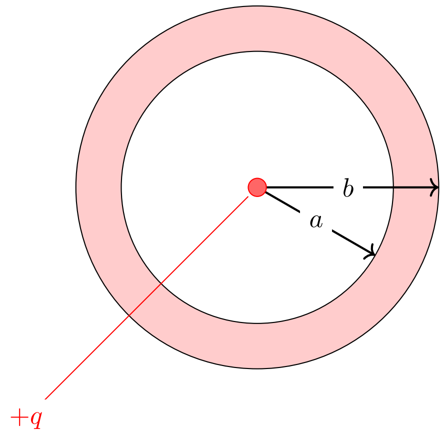
Quelle est l'unique affirmation **fausse** ?

A Si la charge q est positive et remonte la ligne, son énergie potentielle augmente.
B Si la charge q est négative et descend la ligne, il faut appliquer une force pour déplacer la charge à une vitesse constante.
C Si la charge q remonte la ligne, le potentiel électrique du point où se trouve la charge augmente.
D Si la charge q est positive et est lâchée avec une vitesse initiale nulle, elle descend la ligne.
E Si la charge q est négative et est lâchée une vitesse initiale tangente à la ligne, sa vitesse augmente après l'avoir lâchée.

A ☐
B ☐
C ☐
D ☐
E ■

Q4

Une charge ponctuelle positive q est placée au centre d'une coquille métallique.
La coquille a une charge totale nulle.
Les rayons intérieur et extérieur de la coquille sont notés a et b.



Quelle est la densité de charge induite
sur la face extérieure de la coquille en $r = b$?

A $\sigma = \frac{q}{4\pi b^2}$

B $\sigma = -\frac{q}{4\pi b^2}$

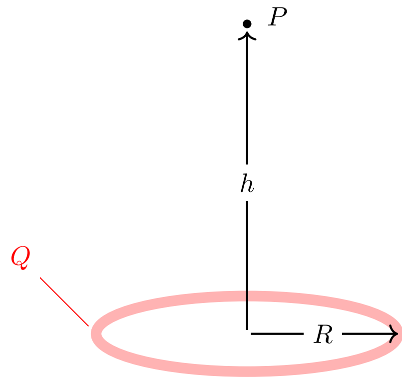
C $\sigma = \frac{q}{4\pi(b^2 - a^2)}$

D $\sigma = \frac{q}{4\pi(a^2 - b^2)}$

E $\sigma = \frac{q}{4\pi a^2}$

A	■
B	□
C	□
D	□
E	□

Un ruban de rayon R et de largeur d porte une charge Q.
On considère un point P situé sur l'axe perpendiculaire par le centre du cercle.
Le point se situe à une hauteur h du plan.



Q5 Que vaut l'intensité du champ électrique E au point P ?

A $E = \dfrac{kQ}{\left(R^2+h^2\right)^{1/2}}$ — **A** ☐

B $E = \dfrac{kQh}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}$ — **B** ■

C $E = \dfrac{kQR}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}$ — **C** ☐

D $E = \dfrac{kQ}{\left(R^2+h^2\right)}$ — **D** ☐

E $E = \dfrac{kQd}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}$ — **E** ☐

La valeur de la puissance d'une usine hydro-électrique exprimée en $N\ m/s$ est estimée par l'expression :

$$P = \rho\ Q^a\ g^b\ h^b$$

où ρ est la masse volumique de l'eau exprimée en kg/m^3, Q est un débit exprimé m^3/s, g est l'accélération de la gravité exprimée m/s^2 et h est une hauteur exprimée en mètres.

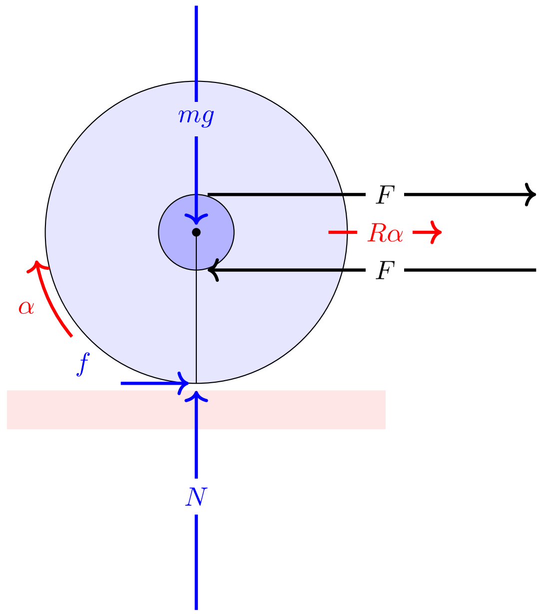
Q6

Calculer les valeurs des exposants a et b.

A $a = 3/2$ et $b = 1/4$ — **A** ☐
B $a = 1/2$ et $b = 5/4$ — **B** ☐
C $a = 2$ et $b = 1$ — **C** ☐
D $a = 1$ et $b = 1$ — **D** ■
E $a = 1$ et $b = 2$ — **E** ☐

Q7

Considérons une roue de vélo de rayon R entrainée par le mouvement de la chaine avec un pignon de rayon r. Par convention, une valeur positive des accélérations et forces représentées correspond à la donnée telle qu'elle est représentée sur le dessin.



Avec la convention choisie, l'équilibre de rotation s'écrit :

A $I\alpha = 2rF + Rf$

B $I\alpha = 2rF - Rf$

C $I\alpha = rF - Rf$

D $I\alpha = rF + 2Rf$

E $I\alpha = 2RF - rf$

A ☐
B ■
C ☐
D ☐
E ☐

Q8

Un avion vole horizontalement à 540 km/h à une altitude de 3125 m.
A cet instant, une valise chute de l'avion car on a oublié de refermer la porte de la soute lors du départ.
La force de trainée de l'air est supposée négligeable.
La norme de l'accélération de la gravité est $g = 10\ m/s^2$.
L'axe x du repère est parallèle à la trajectoire de l'avion.
L'axe y du repère pointe vers le haut.

Quelles seront le deux composantes v_x et v_y du vecteur vitesse

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

lorsque la valise atteindra le sol ?

A $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 540 \\ -250 \end{bmatrix}\ km/h$ — **A** ☐

B $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ -354 \end{bmatrix}\ m/s$ — **B** ☐

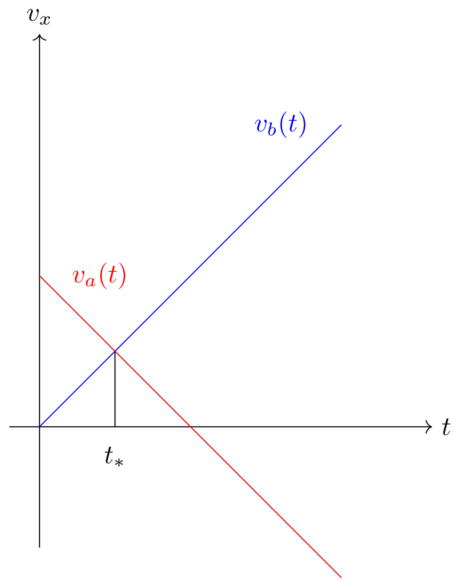
C $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ -177 \end{bmatrix}\ m/s$ — **C** ☐

D $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ -150 \end{bmatrix}\ m/s$ — **D** ☐

E $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ -250 \end{bmatrix}\ m/s$ — **E** ■

Q9

Deux voitures a et b roulent sur une même route parfaitement rectiligne et alignée avec l'axe x. Dans le graphique, on trace l'évolution de l'unique composante non-nulle des vecteurs vitesse des deux voitures en fonction du temps.



Quelle est l'unique affirmation toujours exacte
quelle que soit la position initiale des voitures ?

A Les deux voitures se croisent en l'instant t_*

B Les deux voitures roulent toujours en sens inverse.

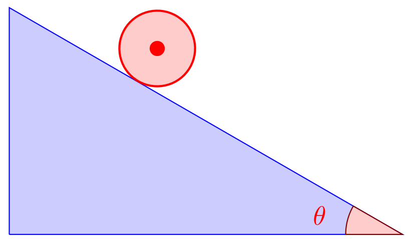
C Les deux voitures ne se croisent jamais.

D La voiture a double la voiture b l'instant t_*.

E Les deux voitures roulent parfois en sens inverse.

A	☐
B	☐
C	☐
D	☐
E	■

Un cylindre plein roule sans glisser sur une route en pente avec un angle θ.
La masse du cylindre est m et son rayon est R.
Les coefficients de frottement statique et dynamique entre l'asphalte de la route et l'acier du cylindre sont notés μ_s et μ_c.



Q10 Que vaut la force de frottement exercée par le sol sur la roue ?

A	$f = 0$	**A**	☐
B	$f = \mu_s mg \cos\theta$	**B**	☐
C	$f = \mu_c mg \cos\theta$	**C**	☐
D	$f = \dfrac{2mg\sin\theta}{3}$	**D**	☐
E	$f = \dfrac{mg\sin\theta}{3}$	**E**	■

N'oubliez pas de reporter vos réponses sur la feuille pour lecture optique.

Formulaire

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

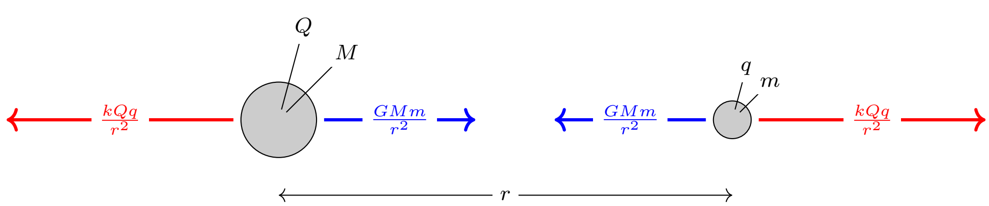
Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\ t^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\
\vec{\mathbf{a}}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Force de gravité et force d'interaction électrique

$$\begin{aligned}
G &= 6.674\ 10^{-11} \quad \text{N m}^2/\text{kg}^2 \\
\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k &= 8.988\ 10^{9} \quad \text{N m}^2/\text{C}^2 \\
\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} &= 8.854\ 10^{-12} \quad \text{C}^2/\text{N m}^2
\end{aligned}$$



Théorème de Gauss

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

Théorème de l'énergie mécanique

$$\Delta \overbrace{\left(\frac{1}{2}m\ v^2 + \frac{1}{2}I\ \omega^2\right)}^{K} = \overbrace{\sum \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

Energies potentielles mécaniques

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = \frac{kx^2}{2}$$

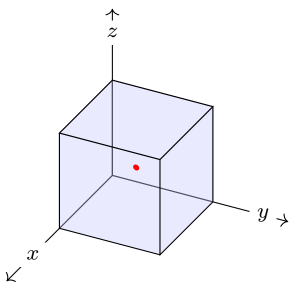
$$U_a - U_b = mgh$$

Energie et potentiel électrique

$$U_a - U_b = q_0 \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

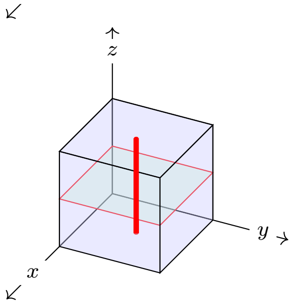
$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

Trois champs et potentiels électriques bien utiles :-)



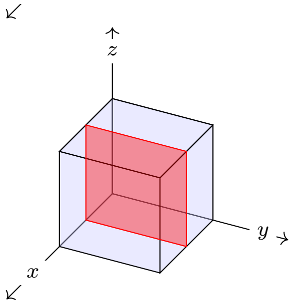
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{r^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{r} + C$$



$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ \frac{\lambda}{r}$$

$$V = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ \lambda\ \ln(r) + C$$



$$E = \frac{1}{2\epsilon_0}\ \sigma$$

$$V = -\frac{1}{2\epsilon_0}\ \sigma\ r + C$$

r représente la distance à la charge, au fil chargé ou au plan chargé.

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\, r_\perp = F_\perp\, r = F r \sin(\theta)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\, r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

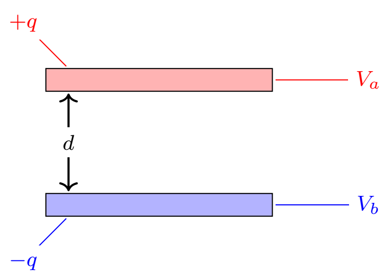
$$I_h = m\, h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

$$\text{Cylindre creux} \quad I = m\, R^2$$

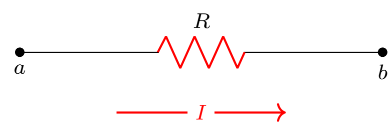
$$\text{Cylindre plein} \quad I = m\, \frac{R^2}{2}$$

$$\text{Barre autour du centre} \quad I = m\, \frac{L^2}{12}$$



$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{d}{\epsilon_0\, S}\, q = \frac{q}{C}$$

$$U = \int_0^q \frac{q}{C}\, dq = \frac{q^2}{2C}$$



$$V_{ab} = \frac{\rho L}{S}\, I = RI$$

$$P = RI^2$$

Résistances et capacités en série

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} \qquad R = \sum R_i$$

Résistances et capacités en parallèle

$$C = \sum C_i \qquad \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$$

Lois de Kirchhoff

$$\sum_{noeuds} I_i = 0$$

$$\sum_{mailles} V_i = 0$$