

1 Dimitri fait rouler un petit disque...

Un petit disque homogène de masse $m = 0.1$ kg roule sans glisser dans un grand cercle fixe.

Le rayon du petit disque est $R = 0.1$ m et le rayon du grand cercle est $2R$.

Laurent a déposé deux charges ponctuelles positives $q = 10^{-6}$ C.

Une charge est mobile et se trouve au centre de masse du petit disque.

L'autre est fixe et se trouve au point inférieur du grand cercle.

L'angle du centre du petit disque est noté $\theta(t)$.

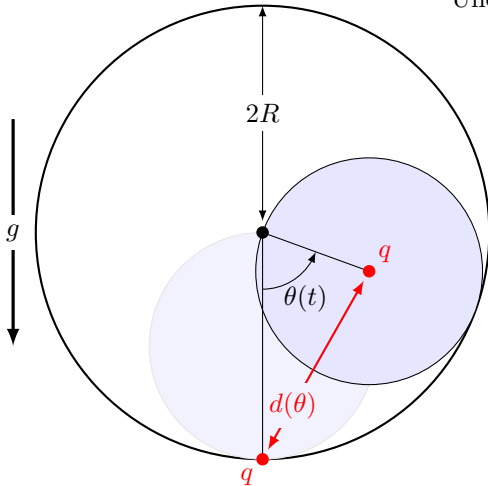
La vitesse angulaire correspondante est notée $\theta'(t)$.

La position $\theta = 0$ correspond donc au bas du grand cercle.

En $t = 0$, Dimitri dépose le petit disque en bas du cercle.

Le centre du petit disque a une vitesse horizontale initiale v_0 .

Le petit disque se met instantanément à rouler sans glisser.



Le moment d'inertie du petit disque est $I = \frac{mR^2}{2}$.

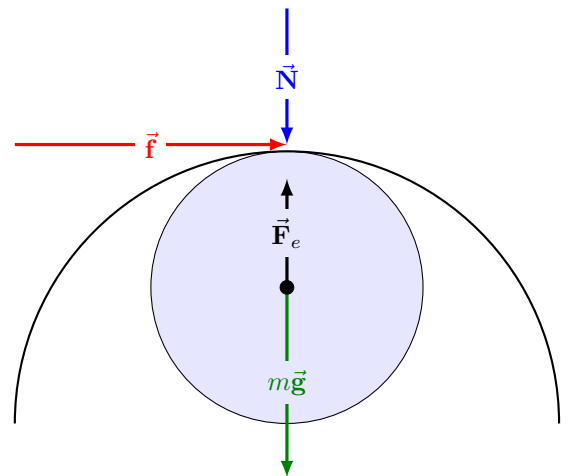
Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s² et $k = 10^{10}$ N m²/C².

1. Citer et dessiner l'ensemble des forces agissant sur le petit disque pour $\theta = \pi$

Les forces sont le frottement, la gravité, la force de Coulomb et la réaction du grand cercle !

Il faut donc citer :

- Force de gravité : $m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- Force de Coulomb : $\vec{F}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ kq^2/9R^2 \end{bmatrix}$
- Force de réaction normale : $\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ -N \end{bmatrix}$
- Force de frottement : $\vec{f} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$



*Oui : il est indispensable de citer le frottement et la réaction normale !
Indiquer le point d'application des forces est évidemment requis.*

2. Quelle est la relation entre vitesse de rotation $\omega(t)$ du petit disque et $\theta'(t)$?
Justifier brièvement votre réponse.

Lorsque le petit cercle a effectué une rotation sur lui-même, son centre de masse a parcouru une distance $2\pi R$ et a donc retrouvé sa position initiale, puisque le centre de masse effectue une rotation sur un cercle de rayon R . C'est le centre de masse qui bouge, pas le point de contact et donc la distance parcourue est bien $2\pi R$!

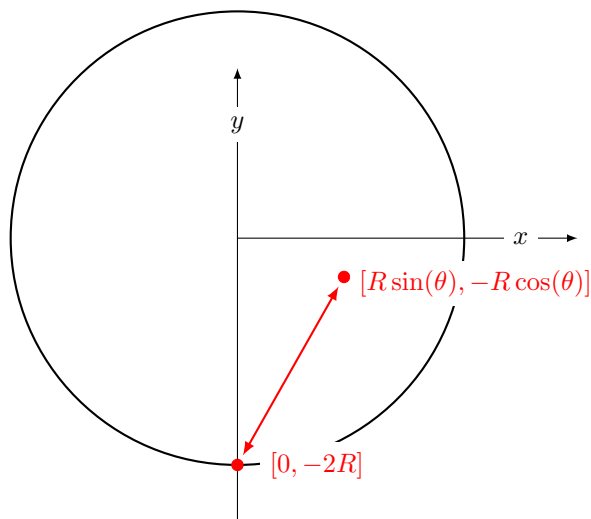
On déduit immédiatement :

$$\omega(t) = \theta'(t)$$

Oui, oui : cette question a déjà été posée les années précédentes et était dans les annales. Inclure un facteur deux n'était pas une erreur catastrophique et ne gênait en rien la résolution des autres sous-questions.

3. Obtenir l'expression de la distance $d(\theta)$ entre les deux charges.

Il suffit d'écrire les coordonnées des deux charges dans un système d'axes et ensuite de calculer la distance entre les deux points !



La distance entre les deux points s'écrit :

$$\begin{aligned} d^2(\theta) &= \left[R \sin(\theta) \right]^2 + \left[-2R + R \cos(\theta) \right]^2 \\ &\downarrow \\ d^2(\theta) &= R^2 \left[\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) - 4 \cos(\theta) + 4 \right] \\ &\downarrow \\ d^2 &= R^2 \left[5 - 4 \cos(\theta) \right] \end{aligned}$$

On déduit finalement :

$$d(\theta) = R\sqrt{5 - 4 \cos(\theta)}$$

Et c'est juste un peu de géométrie analytique :-)

4. Obtenir l'expression de l'énergie potentielle totale $U(\theta)$.
On supposera que l'énergie potentielle de gravité est nulle lorsque $\theta = 0$.

Il faut considérer l'énergie potentielle de gravité et l'énergie potentielle de la force de Coulomb !

$$\text{On a donc : } U(\theta) = mgR(1 - \cos(\theta)) + \frac{kq^2}{R\sqrt{5 - 4\cos(\theta)}}$$

Oui : il faut bien écrire $1 - \cos(\theta)$ pour avoir une énergie potentielle nulle pour $\theta = 0$:-)

5. Obtenir l'expression de l'énergie cinétique totale $K(\theta')$ du petit cylindre.

Il faut considérer l'énergie cinétique de translation et l'énergie de rotation !

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ &\downarrow \\ K &= \frac{1}{2}mR^2[\theta']^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}[\theta']^2 \\ &\downarrow \\ K &= \frac{3mR^2}{4}[\theta']^2 \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } K(\theta') = \frac{3mR^2}{4}[\theta']^2$$

Oui : il ne faut pas oublier l'énergie cinétique de rotation -)

6. Exprimer la vitesse v_π du centre du petit disque au sommet en fonction de v_0 .
Calculer la valeur minimale de v_0 pour que le petit cylindre reste au contact au sommet.

Au sommet ($\theta = \pi$), le centre du petit disque est en haut du grand cercle.

Il faut que la réaction normale N reste positive.

Le bilan radial de quantité de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} m\frac{v_\pi^2}{R} &= mg + N - \frac{kq^2}{9R^2} \\ &\downarrow \text{En exigeant que } N \geq 0 \text{ pour garder le contact} \\ m\frac{v_\pi^2}{R} &\geq mg - \frac{kq^2}{9R^2} \\ &\downarrow \\ v_\pi^2 &\geq gR - \frac{kq^2}{9mR} \end{aligned}$$

On relie ensuite v_π à la vitesse initiale v_0 par conservation de l'énergie.

$$\begin{aligned} \frac{3m}{4}v_\pi^2 + \frac{kq^2}{3R} + 2mgR &= \frac{3m}{4}v_0^2 + \frac{kq^2}{R} + 2mgR \\ &\downarrow \\ v_\pi^2 &= v_0^2 - \frac{8gR}{3} + \frac{8kq^2}{9mR} \end{aligned}$$

Et en utilisant la condition de contact au sommet,

$$\begin{aligned} v_0^2 - \frac{8gR}{3} + \frac{8kq^2}{9mR} &\geq gR - \frac{kq^2}{9mR} \\ &\downarrow \\ v_0^2 &\geq \frac{11gR}{3} - \frac{kq^2}{mR} \end{aligned}$$

Avec les valeurs numériques, la vitesse minimale est :

$$v_0 = \sqrt{\frac{8}{3}} = 1.63 \text{ m/s}$$

Cette question est une variante classique du fameux problème du looping :-)

Ce n'était donc pas bien compliqué à résoudre.

7. Dédurre l'équation différentielle du mouvement pour $\theta(t)$ en dérivant l'énergie mécanique totale.

L'énergie mécanique $E = K + U$ est conservée, car le frottement au point de contact n'effectue aucun travail puisque la vitesse au point de contact est nulle.

$$\begin{aligned} E &= \frac{3mR^2}{4} [\theta']^2 + mgR(1 - \cos(\theta)) + \frac{kq^2}{R\sqrt{5 - 4\cos(\theta)}} \\ &\downarrow \text{En dérivant par rapport à } t, \\ \underbrace{\frac{dE}{dt}}_{=0} &= \left[\frac{3mR^2}{2} \theta'' + mgR \sin(\theta) - \frac{2kq^2 \sin \theta}{R(5 - 4\cos(\theta))^{3/2}} \right] \theta' \end{aligned}$$

$$\text{L'équation différentielle est : } \frac{3mR^2}{2} \theta'' + mgR \sin(\theta) + \frac{2kq^2 \sin \theta}{R(5 - 4\cos(\theta))^{3/2}} = 0$$

Il est évidemment possible d'écrire cette équation en faisant en bilan de quantité de mouvement, mais l'approche est beaucoup plus calculatoire ! On observe ainsi qu'écrire le problème sous forme énergétique est un outil mathématique redoutablement efficace.

8. Thomas se demande si ce système possède des positions d'équilibre.
 Une position d'équilibre stable correspond à un minimum local de l'énergie potentielle.
 On observe immédiatement deux équilibres géométriques en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
 Calculer l'angle d'une autre position d'équilibre stable non triviale.

Un équilibre stable qui correspond à un minimum local de l'énergie potentielle vérifie

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{dU}{d\theta}}_{=0} &= \left[mgR - \frac{2kq^2}{R(5 - 4\cos(\theta))^{3/2}} \right] \sin(\theta) \\
 &\downarrow \text{En retirant les équilibres géométriques } \theta = 0 \text{ et } \theta = \pi, \\
 0 &= mgR - \frac{2kq^2}{R(5 - 4\cos(\theta))^{3/2}} \\
 &\downarrow \\
 (5 - 4\cos(\theta))^{3/2} &= \frac{2kq^2}{mgR^2} \\
 &\downarrow \\
 5 - 4\cos(\theta) &= \left(\frac{2kq^2}{mgR^2} \right)^{2/3} \\
 &\downarrow \\
 \cos(\theta) &= \frac{1}{4} \left[5 - \left(\frac{2kq^2}{mgR^2} \right)^{2/3} \right]
 \end{aligned}$$

Avec les valeurs numériques, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \cos(\theta) &= \frac{5 - 2^{2/3}}{4} = 0.853 \\
 \theta &= \pm 31.4^\circ
 \end{aligned}$$

Dans cette dernière question, l'algèbre était un peu plus calculatoire, mais dès que la démarche était initiée, le correcteur accordait tous les points :-)

Mais l'un ou l'autre étudiant a bien obtenu le bon angle : ce n'était donc pas totalement impossible.

2 Petites questions courtes

Un condensateur de valeur $20\,\mu F$ est initialement déchargé.

A l'instant $t = 0$, le condensateur est connecté à une source idéale de tension continue de 10 V au travers d'une résistance de $250\text{ k}\Omega$.

A quel instant t_* la tension aux bornes du condensateur atteint-elle approximativement 95% de sa valeur finale ?

La tension du condensateur dans un circuit RC vérifie

$$V(t) = V_\infty \left[1 - \exp(-t\tau) \right]$$

Q 2.1

avec $\tau = RC = (250 \times 10^3)(20 \times 10^{-6}) = 5\text{ s}$.

On résout ensuite :

$$0.95 = 1 - \exp(-t\tau)$$

$$t_* = -\tau \ln(0.05) = -5 \ln(0.05)$$

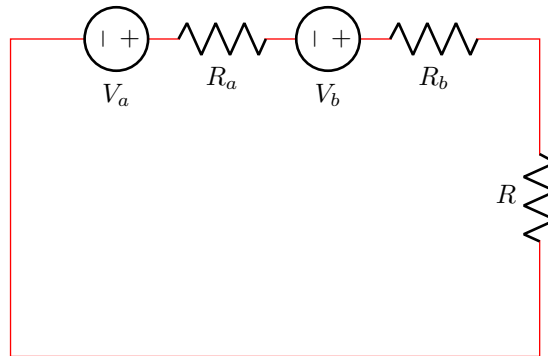


$$t_* = 14.98\text{ s} \approx 15\text{ s}$$

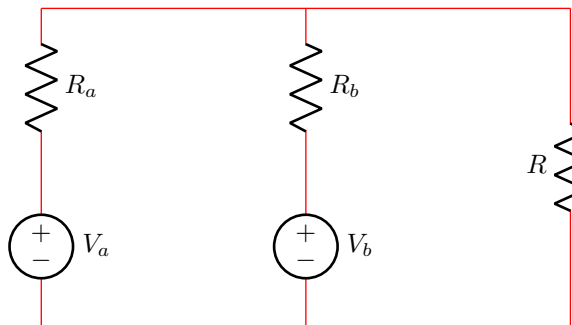
On retrouve aussi la règle usuelle : 95% de la charge est atteint après environ 3τ :-)

Deux piles alimentent une résistance externe $R = 4 \Omega$. Les piles sont caractérisées par leur force électromotrice $V_a = 6 \text{ V}$, $V_b = 9 \text{ V}$, et leur résistance interne $R_a = 9 \Omega$, $R_b = 2 \Omega$. On compare ensuite deux montages.

- Connecter les deux piles en série



- Connecter les deux piles en parallèle



Q 2.2 Quelle est le montage qui permet de dissiper le plus de puissance dans le résistance R ?
Quelle est la différence entre les puissances dissipées des deux montages ?

Pour le montage en série, $V_s = V_a + V_b = 15 \text{ V}$ et $R_s = R_a + R_b = 11 \Omega$.

Le courant vaut $I_s = 15/(11 + 4) = 1 \text{ A}$.

La puissance dissipée $P_s = RI_s^2 = 4 \text{ W}$.

Pour le montage en parallèle, il y a une tension commune V aux trois branches.

Pour la première pile, $I_a = (6 - V)/9$.

Pour la seconde pile, $I_b = (9 - V)/2$.

Pour la résistance externe $I_p = V/4$.

On applique la loi des noeuds $I_a + I_b = I_p$:

$$\frac{6 - V}{9} + \frac{9 - V}{2} = \frac{V}{4}$$



$$24 - 4V + 162 - 18V = 9V$$

$$31V = 186$$

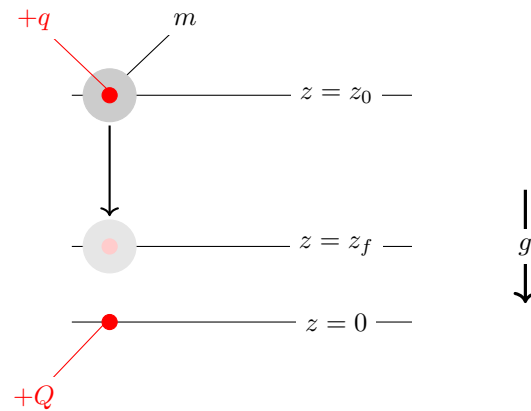
$$V = 6$$

Le courant $I_p = 6/4 = 1.5 \text{ A}$.

La puissance dissipée $P_p = RI_p^2 = 9 \text{ W}$.

La différence de puissance est donc : $9 - 4 = 5 \text{ W}$.

Une charge ponctuelle $+Q$ fixe se trouve en $z = 0$.
 Une bille de masse m avec une charge $+q$ se trouve en $z = z_0$ à la verticale de la charge $+Q$.
 A cette position, la force de gravité est plus grande que la force de répulsion électrostatique.
 On lâche la bille avec une vitesse nulle de cette position initiale.
 La bille va donc se déplacer vers le bas...



Q 2.3 Quelle sera la hauteur minimale z_f atteinte par la bille durant son mouvement oscillant ?

En z_0 et en z_f , la vitesse est nulle, il y a donc conservation de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned}
 mgz_f + \frac{kQq}{z_f} &= mgz_0 + \frac{kQq}{z_0} \\
 mg(z_f - z_0) &= kQq \left[\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_f} \right] \\
 mg(z_f - z_0) &= kQq \frac{z_f - z_0}{z_0 z_f} \\
 mgz_f &= \frac{kQq}{z_0} \\
 \downarrow \\
 z_f &= \frac{kQq}{mgz_0}
 \end{aligned}$$

Une balance électrostatique peut être obtenue avec un condensateur à plaques parallèles avec une charge constante Q .

Les plaques sont séparées d'une distance h_0 .

Les plaques sont maintenues écartées par un ressort avec une constante de raideur k .

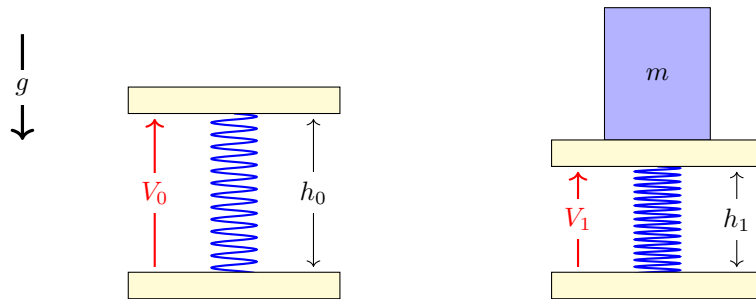
Déposons une masse m sur la balance.

Le ressort se comprime d'une distance $\delta = h_0 - h_1$.

La différence de potentiel aux bornes du condensateur passe d'une mesure V_0 à V_1 .

Ensuite, on déduit la masse m à partir du rapport $r = V_0/V_1$, de g , de k et de h_0 , sans devoir faire aucune mesure de la compression du ressort.

En ce sens, c'est une balance électrostatique.



Q 2.4

Quelle est l'expression de la masse m en fonction de r , k , g et h_0 ?

On a un condensateur à plaques parallèles avec une charge constante Q .

$$V = \frac{Qh}{\varepsilon S}$$

Le potentiel est donc proportionnel à h .

$$r = \frac{h_0}{h_1} = \frac{V_0}{V_1}$$

La compression du ressort $\delta = h_0 - h_1 = h_0 (1 - 1/r)$.

Il suffit ensuite d'imposer l'équilibre des forces :

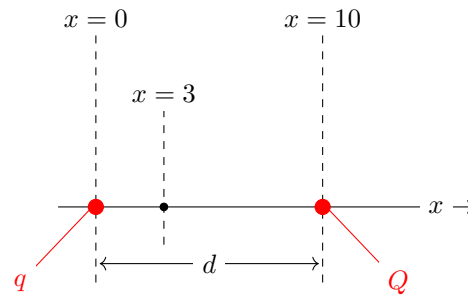
$$mg = k\delta$$

$$m = \frac{k\delta}{g}$$

$$\downarrow$$

$$mg = \frac{kh_0}{g} \left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

Une charge $q = 1\mu\text{C}$ et une charge inconnue Q sont séparées d'une distance $d = 10\text{ cm}$.
En $x = 3\text{ cm}$, le champ électrique est nul.



Quels sont le signe et la valeur de la charge Q ?

Quel est le potentiel électrique V en $x = 3$ si ce potentiel est nul à l'infini ?

Q 2.5 La charge Q doit être positive pour que les deux champs électriques s'opposent !
Comme les champs se compensent, on écrit :

$$\frac{kQ}{49} = \frac{kq}{9}$$

$$Q = q \frac{49}{9}$$

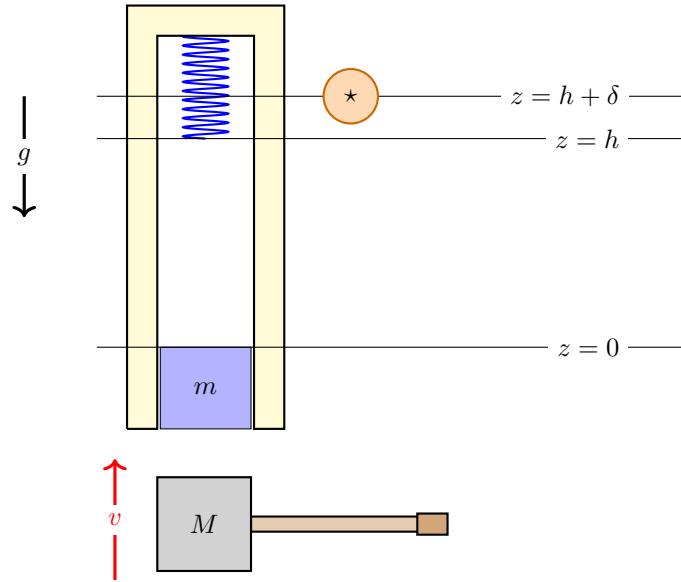


$$Q = 5.44\ \mu\text{C}$$

Le potentiel électrique en $x = 3$ est donné par :

$$V = \frac{kq}{0.03} + \frac{kQ}{0.07} = 1.11 \times 10^6\ \text{V}$$

Une attraction foraine consiste à percuter une petite masse m avec un lourd marteau M . La petite masse est maintenue initialement au repos en bas d'un tube vertical. Le joueur frappe la petite masse vers le haut avec le marteau. Le choc est parfaitement élastique et la direction du mouvement du marteau est verticale. La vitesse du marteau juste avant l'impact est notée v . Suite à l'impact, la petite masse s'élève et vient s'écraser sur le ressort de raideur k . Si le ressort se comprime d'une distance δ , une sonnette retentit et le joueur a gagné ! On choisit $z = 0$ à la position initiale du haut de la petite masse juste avant le choc. Tous les frottements sont négligés.



Q 2.6

Quelle vitesse minimale v faut-il imposer au marteau pour obtenir la récompense ?

Le choc est parfaitement élastique et la petite masse est au repos.

$$\begin{cases} Mv &= Mv_+ + mu_+ \\ Mv^2 &= Mv_+^2 + mu_+^2 \end{cases}$$

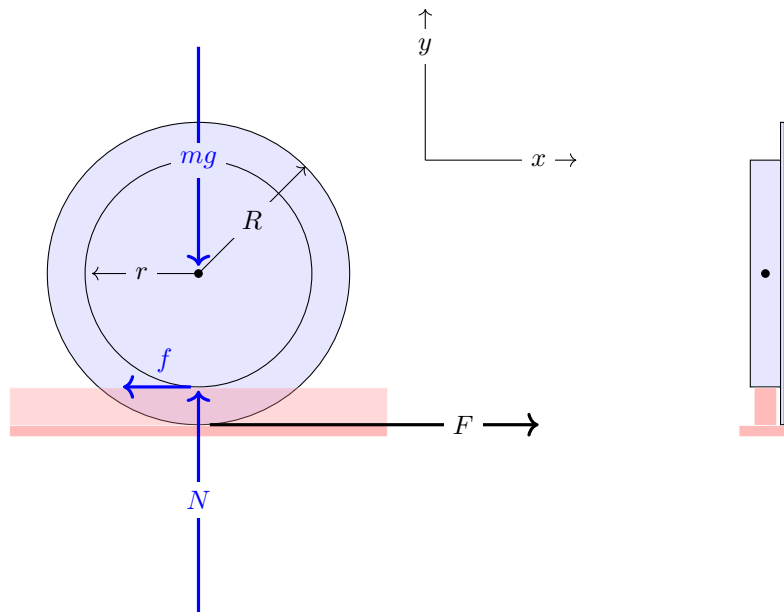
La résolution du choc permet d'obtenir $u_+ = \frac{2M}{M+m} v$ et $v_+ = \frac{M-m}{M+m} v$.

On effectue la conservation de l'énergie après le choc.

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \left(\frac{2Mv}{M+m} v \right)^2 &= mg(h+\delta) + \frac{k\delta^2}{2} \\ \downarrow \\ v &= \frac{M+m}{2M} \sqrt{2g(h+\delta) + \frac{k\delta^2}{m}} \end{aligned}$$

Il serait aussi légitime de supposer que $M \gg m$ et d'estimer $u_+ \approx 2v$.

Une roue de tramway roule sans glissement sur son moyeu de rayon r sur un rail. La masse m de la roue est concentrée dans le moyeu et le moment d'inertie est donc approximativement celui d'un cylindre plein de rayon r . La roue est entraînée par un système de crémaillère sur la base du rail par une force constante F : il n'y a aucune force normale sur la crémaillère.



Q 2.7

Donner l'expression de la composante a_x de l'accélération du centre de masse. Cette expression ne doit faire intervenir que R , r , m et F . Est-elle positive ou négative ?

On écrit le bilan de forces et de moments pour la roue :

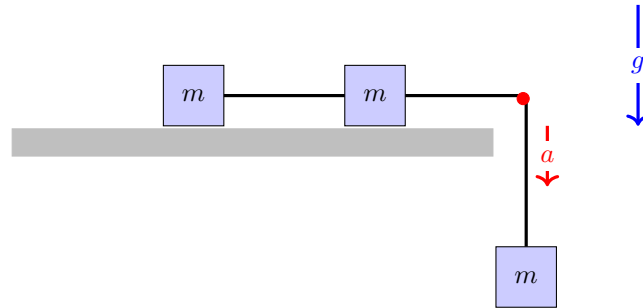
$$ma = F - f$$

$$I\alpha = \frac{mr^2}{2} \frac{a}{r} = fr - FR$$

En éliminant f , on obtient l'expression de l'accélération (qui sera négative :-).

$$a_x = \frac{2(r - R)F}{3mr} < 0$$

Les trois blocs ont le même masse m .



Q 2.8 Le coefficient de frottement cinétique μ_c entre le sol et les blocs est identique. Obtenir l'expression de la norme de l'accélération a de chacun des 3 blocs.

On applique le bilan de quantité de mouvement sur les 3 blocs
avec la gravité sur un bloc comme force motrice
et le frottement comme force résistive sur deux blocs.

$$\begin{aligned} 3ma &= mg - 2\mu_c mg \\ &\downarrow \\ a &= \frac{g(1 - 2\mu_c)}{3} \end{aligned}$$

Formulaire

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m \vec{v}) &= \sum \vec{F}_i \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) &= \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \\ \frac{d}{dt}(I \omega) &= \sum M_i\end{aligned}$$

Mouvement d'un projectile

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix} \\ \vec{v}(t) &= \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix} \\ \vec{a}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$

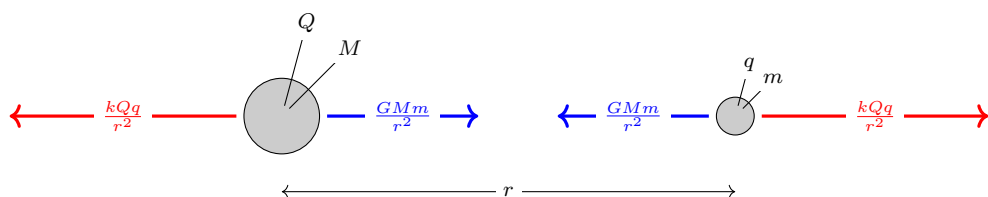
$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{a}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Force de gravité et force d'interaction électrique

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 8.988 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2$$



Théorème de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

Energies potentielles mécaniques

$$W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b = \frac{kx^2}{2}$$
$$U_a - U_b = mgh$$

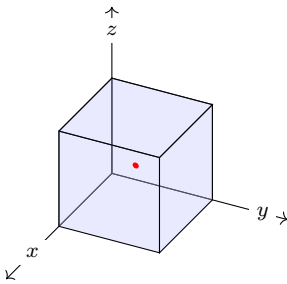
Théorème de l'énergie mécanique

$$\Delta \left(\overbrace{\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2}^K \right) = \sum \overbrace{\int \vec{F} \cdot d\vec{x}}^W$$

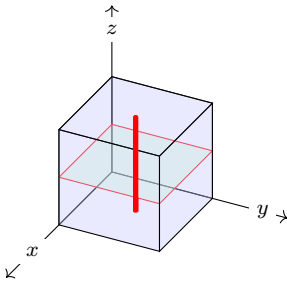
Energie et potentiel électrique

$$U_a - U_b = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{x}$$
$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

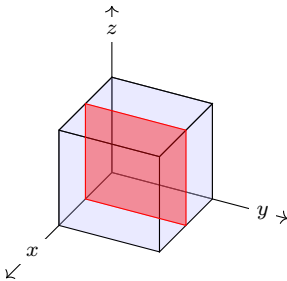
Trois champs et potentiels électriques bien utiles :-)



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C$$



$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$
$$V = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda \ln(r) + C$$



$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma$$
$$V = -\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma r + C$$

r représente la distance à la charge, au fil chargé ou au plan chargé.

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{M}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F r_{\perp} = F_{\perp} r = Fr \sin(\theta)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

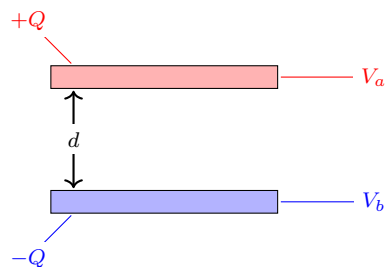
$$\text{Cylindre creux} \quad I = m R^2$$

$$\text{Cylindre plein} \quad I = m \frac{R^2}{2}$$

$$\text{Barre autour du centre} \quad I = m \frac{L^2}{12}$$

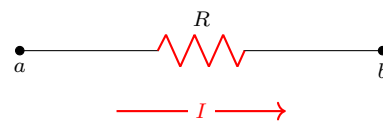
Théorème des axes parallèles

$$I_h = m h^2 + I$$



$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{d}{\epsilon_0 S} Q = \frac{Q}{C}$$

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$



$$V_{ab} = \frac{\rho L}{S} I = RI$$

$$P = RI^2$$

Résistances et capacités en série

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} \quad R = \sum R_i$$

Résistances et capacités en parallèle

$$C = \sum C_i \quad \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$$

Lois de Kirchhoff

$$\sum_{\text{noeuds}} I_i = 0$$

$$\sum_{\text{mailles}} V_i = 0$$