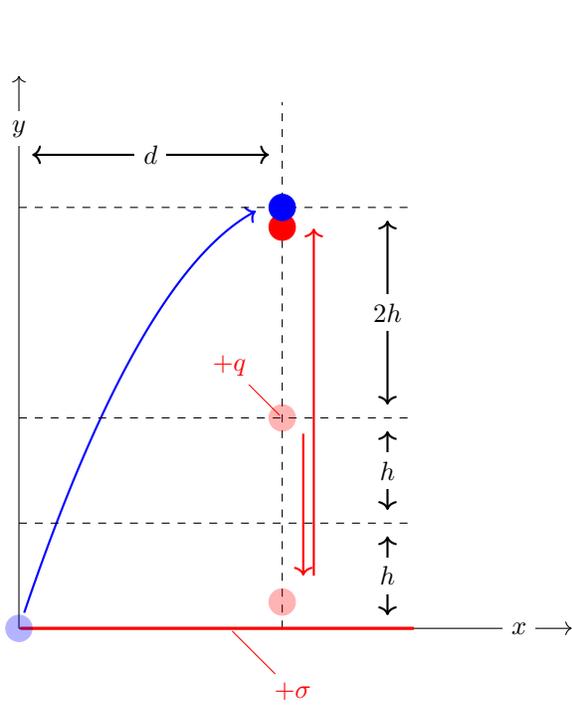


FSA11-ARCH11	
Août 2024	<i>Physique 1</i>
LEPL1201	<i>Vous pouvez conserver cet énoncé !</i>

1 Une catapulte particulière

En $t = 0$, une puissance hostile lance un missile avec un angle de tir de 45° et une vitesse initiale v .
 Au même instant, une sphère avec une charge électrique q est lâchée de la position $(d, 2h)$.
 En $t = t_*$, la sphère percutera le missile en $(d, 4h)$.



Lorsque la sphère est à une hauteur h du sol (et donc pas avant :-), une plaque métallique de très grande taille est instantanément chargée avec une densité de charge électrique surfacique σ . Il y aura donc une force répulsive entre la plaque et la bille qui fera remonter la sphère vers le haut.

On assimilera cette plaque à un plan infini chargé.
 La masse du missile et de la sphère est $m = 2 \text{ kg}$.
 La distance est $d = 2000 \text{ m}$.
 La hauteur est $h = 100 \text{ m}$.
 La charge électrique est $q = 10^{-5} \text{ C}$.
 On néglige tous les frottements !
 On néglige l'effet de la sphère sur les charges du plan !
 Le missile ne porte pas de charge électrique !

On utilisera $g = 10 \text{ m/s}^2$ et $\epsilon_0 = 10^{-11} \text{ C}^2/\text{N m}^2$ pour effectuer tous les calculs.

1. Donner l'expression du potentiel électrique $V(y, \sigma)$ généré par le plan infini chargé situé en $y = 0$.

Il suffit juste d'écrire le potentiel d'un plan infini chargé!

$$V = C - \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma y$$

*Cette relation était fournie dans le formulaire !
 Il suffisait juste de remplacer r par y :-)
 La pondération de cette question était : 2/20 :-)*

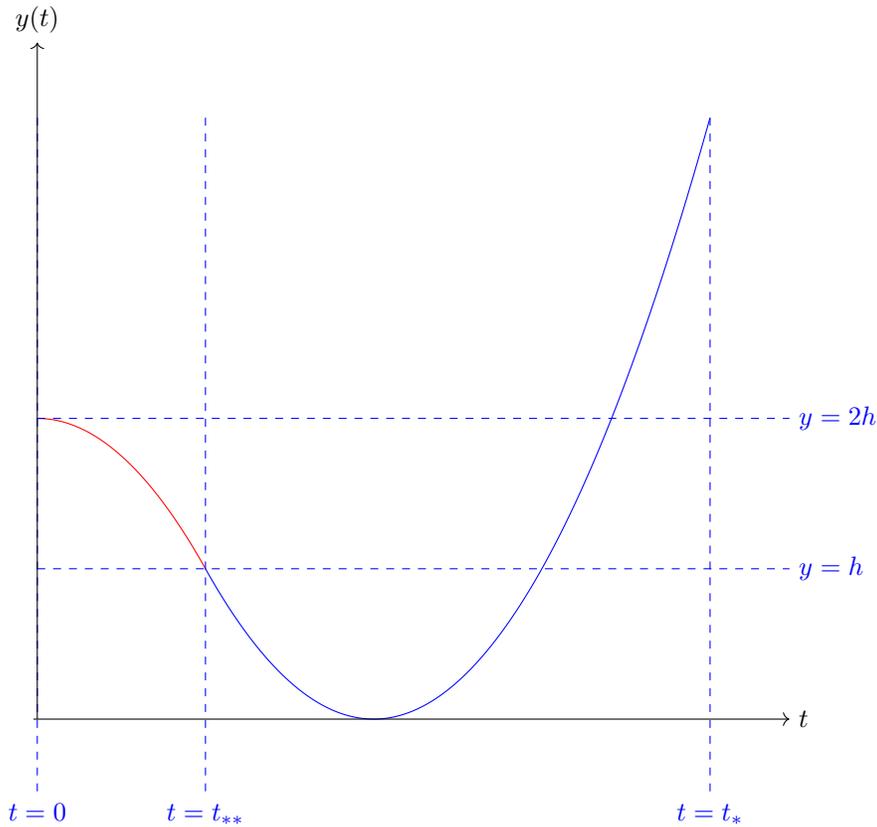
2. Esquisser la position verticale $y(t)$ de la sphère (pas du missile :-) en fonction de $t \in [0, t_*]$.
Indiquer clairement le moment où la plaque est chargée.

L'esquisse peut être réalisée très aisément.

Il faut juxtaposer deux paraboles dont les courbures sont différentes et de signe opposé.

Mais le raccord entre les deux paraboles est C_1 .

*En effet, la position et la vitesse ne changent pas à l'instant t_{**} où la plaque est chargée !*



Ici, nous avons tracé la solution !

On peut avoir un dessin légèrement différent !

Mais certaines données géométriques doivent être présentes impérativement dans l'esquisse !

En $t = 0$, la dérivée doit être nulle.

*En $t = t_{**}$, il y a changement de concavité, mais pas de point anguleux !*

De très nombreux étudiants n'arrivent pas à dessiner cette esquisse d'un MRUA,

même en ayant obtenu ensuite la bonne expression analytique aux sous-questions suivantes !

Il était évidemment utile de revenir itérativement sur ce dessin au fur à mesure de votre compréhension du problème.

La pondération de cette question était : 4/20 :-)

3. Quelle doit être la norme de vitesse initiale v pour que le missile passe par la position $(d, 4h)$?
Quel est l'instant t_* où le missile occupe cette position ?

Il s'agit d'un calcul classique de MRUA !

$$d = \frac{v}{\sqrt{2}} t_*$$

$$4h = \frac{v}{\sqrt{2}} t_* - g \frac{t_*^2}{2}$$



En injectant la première équation dans la seconde :-)

$$4h = d - g \frac{t_*^2}{2}$$



$$\sqrt{\frac{2d - 8h}{g}} = t_*$$

Ensuite, on obtient immédiatement : $v = \frac{\sqrt{2}d}{t_}$*

On conclut donc :

$$t_* = \sqrt{320} = 8\sqrt{5} = 17.9 \text{ s}$$

$$v = 50\sqrt{10} = 158.1 \text{ m/s}$$

Sans trop de surprise, la plupart de étudiants ont réussi cette question !

Ne pas obtenir les valeurs numériques finales était impardonnable !

Mais, c'était parfois au prix de très longs développements un peu désordonnés :-)

La pondération de cette question était : 4/20 :-)

4. Quelle doit être la valeur minimale de σ pour que la sphère ne touche pas le sol ?

*Il faut que les deux paraboles après l'instant t_{**} soit parfaitement antisymétriques sur le dessin de la sous-question 2 : ce qui implique que la force totale exercée après cet instant soit opposée à la force de gravité. Ce qu'on peut exprimer sous la forme suivante :*

$$\frac{\sigma d}{2\epsilon_0} - mg = mg$$

$$\downarrow$$

$$\sigma = \frac{4 mg\epsilon_0}{q} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

Quasiment tous les étudiants se contentent ici d'égaliser force de gravité et force électrostatique.

A leur décharge, c'était aussi le cas de pas mal d'assistants et de mes collègues professeurs...

Ils ont bien l'intuition que la réponse est simple, mais pas aussi simple que cela.

Ne jamais oublier qu'il y a toujours une astuce dans ce qui semble trop simple !

Si les deux forces s'annulent, la sphère va garder une vitesse constante : il faut bien que la force électrostatique soit égale au double de la force gravitationnelle pour faire remonter la sphère !

La pondération de cette question était : 3/20 :-)

La réponse est donc simplement : $\sigma = 8 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$

Il est évidemment possible de se méfier des intuitions perfides et de résoudre la question de manière purement algébrique et mécanique en calculant la position de la sphère, lorsque la vitesse est minimale. Mais, cela c'est assez calculatoire et un peu compliqué à faire !

Une autre option efficace et possible est de faire deux bilans d'énergie.

- D'une part, l'énergie cinétique obtenue en $t = t_*$ est due à la chute entre $y = 0$ et $y = h$.
On fait donc un bilan entre $t = 0$ et $t = t_{**}$.
- D'autre part, cette énergie cinétique sera perdue lorsqu'on atteint le point le plus bas où la vitesse sera nulle : il faudra alors tenir compte de l'énergie de la force électrostatique qui s'oppose à la chute et de l'énergie potentielle gravitationnelle qui a tendance à faire chuter la sphère. On fait maintenant un bilan entre $t = t_{**}$ et $t = t_{min}$ où la courbe atteint son minimum et on suppose que ce minimum est atteint en $y = 0$.

$$\frac{mv_{**}^2}{2} = mgh$$

$$\frac{mv_{**}^2}{2} = \frac{\sigma q}{2\epsilon_0}h - mgh$$

En injectant la première équation dans la seconde :-)

$$mgh = \frac{\sigma q}{2\epsilon_0}h - mgh$$

$$\sigma = \frac{4 mg\epsilon_0}{q} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

5. Quelle doit être la valeur de σ pour que la sphère percute le missile en $t = t_*$?

Il faut ici écrire l'équation du mouvement de la sphère :

$$y(t) = 2h - g \frac{t^2}{2} \quad t \in [0, t_{**}]$$

$$y(t) = 2h - g \frac{t^2}{2} + \frac{\sigma q}{2m\epsilon_0} \frac{(t - t_{**})^2}{2} \quad t \in [t_{**}, t_*]$$

$$\text{avec } t_{**} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 4.5 \text{ s.}$$

Ce sont bien les deux équations des deux paraboles de l'esquisse.

Pour obtenir σ , il suffit d'imposer le passage par $4h$ en $t = t_* = 8\sqrt{5}$

$$4h = 2h - g \frac{t_*^2}{2} + \frac{\sigma q}{2m\epsilon_0} \frac{(t_* - t_{**})^2}{2} *$$

↓

$$400 - 200 + \frac{3200}{2} = \frac{\sigma q}{2m\epsilon_0} 180$$

↓

$$1800 = \frac{\sigma 10^6}{8} 180$$

↓

$$\sigma = 8 \cdot 10^{-5}$$

La réponse est donc à nouveau simplement :

$$\sigma = 8 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

*Evidemment, cela peut poser question que la sphère doit toucher le plan pour atteindre le missile !
Ecrire un commentaire ici permettait d'obtenir un petit bonus qu'aucun(e) étudiant(e) n'a obtenu.
La pondération de cette question était : 2/20 :-)*

6. Tracer les courbes de l'énergie potentielle gravitationnelle et électrostatique en fonction de $t \in [0, t_*]$.
On posera que les énergies potentielles sont nulles en $t = t_*$.

L'énergie potentielle gravitationnelle U_g et électrostatique U_e sont :

$$U_g(t) = mg y(t) - mg y(t_*) \quad t \in [0, t_*]$$

$$U_e(t) = -2mg y(y_{**}) + 2mg y(t_{**}) \quad t \in [0, t_{**}]$$

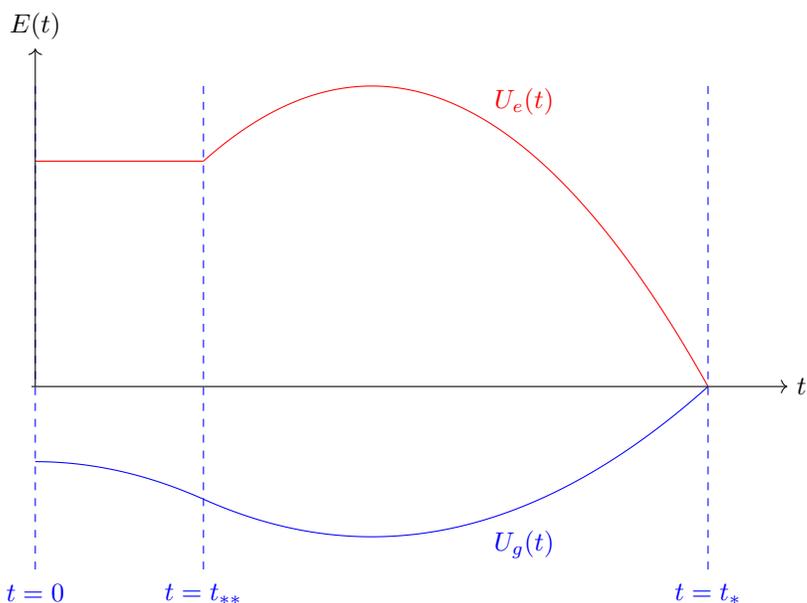
$$U_e(t) = -2mg y(y) + 2mg y(t_*) \quad t \in [t_{**}, t_*]$$

Pour U_e , on prend une valeur constante égale à celle qui va apparaître en $t = t_{**}$, lorsque $t < t_{**}$.

En effet, une énergie potentielle constante ne correspond à aucune force présente à cet instant !

On a écrit le facteur de proportionnalité pour U_e comme $-2mg$ par simplicité :-)

Tracer les courbes consiste donc simplement à recopier le mouvement de la sphère en y appliquant une translation (et une inversion de signe pour l'énergie potentielle électrostatique...)



Très peu d'étudiants arrivent à esquisser ces deux courbes.

C'est pourtant quasi immédiat à obtenir à partir de la fonction $y(t)$.

La pondération de cette question était : 3/20 :-)

7. Juste après la collision, les vitesses de la sphère et du missile seront identiques.

Quelles seront les deux composantes de cette vitesse commune ?

On utilise la conservation de la quantité de mouvement !

Le vecteur de quantité de mouvement des deux objets après la collision sera égal à la somme des deux vecteurs de quantité de mouvement de mouvement de chaque objet avant la collision.

En notant v_* la norme de la vitesse après la collision, cela s'écrit sous la forme :

$$m \begin{bmatrix} 50\sqrt{5} \\ -30\sqrt{5} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 \\ 40\sqrt{5} \end{bmatrix} = 2m \begin{bmatrix} v_* \cos(\alpha) \\ v_* \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

On peut observer que $\tan(\alpha) = 0.2$ en écrivant le quotient des deux équations.

Finalement, on en déduit la norme de la vitesse commune v_* après le choc :

$v_* = 57.0 \text{ m/s}$

Attention : on conserve la quantité de mouvement, pas la vitesse !

Attention : il faut vraiment écrire une équation vectorielle !

L'écriture d'une équation vectorielle valait 2/20 !

La calcul exact de la vitesse après le choc était un bonus :-)

2 Questions à choix multiples

Attention !

Il y a toujours une et une seule bonne réponse !

Ne pas répondre ou cocher une réponse erronée ne fait rien perdre.

Les données des questions sans valeurs numériques sont supposées être dans des unités cohérentes :-)

Remplir la feuille pour lecture optique avec un crayon noir bien taillé ou un bic noir !

N'utiliser en aucun cas un correcteur liquide (Typex) pour corriger !

Pour les QCMs, vous avez la possibilité de mettre une très brève justification.

Cette dernière sera lue uniquement si vous avez choisi une réponse erronée !

Une petite portion des points associés à la question pourra alors être attribuée si la justification le mérite.

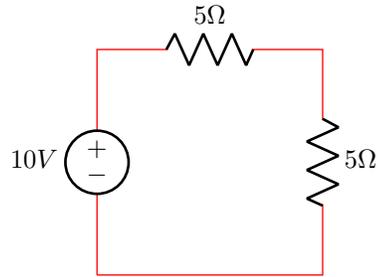
Q1

Considérons un montage de condensateurs connectés à une source réelle.

Qelle est la constante de temps τ de la charge des condensateurs ?

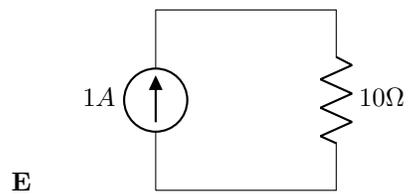
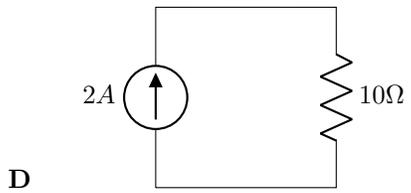
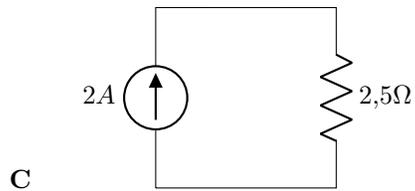
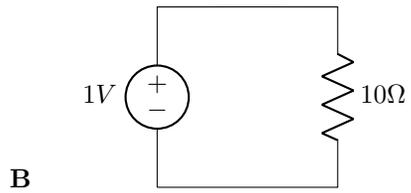
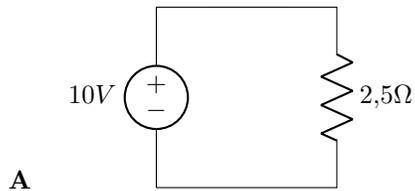
A	$\tau = 1 \mu s$	A	<input type="checkbox"/>
B	$\tau = 6 \mu s$	B	<input type="checkbox"/>
C	$\tau = 20 \mu s$	C	<input checked="" type="checkbox"/>
D	$\tau = 245/3 \mu s$	D	<input type="checkbox"/>
E	$\tau = 180 \mu s$	E	<input type="checkbox"/>

Une source réelle représentée par son équivalent de Thévenin est connectée à une résistance externe dans le circuit ci-dessous.



Quel est l'unique circuit équivalent ?

Q2



A

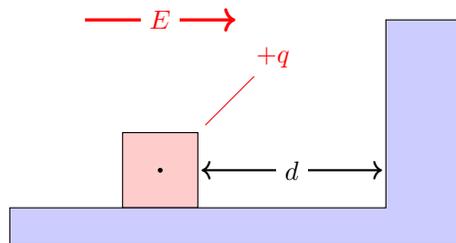
B

C

D

E

Un bloc a une masse m et une charge q positive.
 Il est immobile sur le sol à une distance d d'un mur.
 Ensuite, on applique un champ électrique constant horizontal E .
 Le bloc va alors se déplacer vers le mur et rebondir contre le mur.
 Il n'y aura aucun frottement entre le sol et le bloc.
 La collision entre bloc et le mur sera parfaitement élastique.
 Le bloc aura donc un mouvement oscillant entre le mur et sa position initiale.



Q3

Quelle sera la période T du mouvement harmonique ?

A $T = 2\sqrt{\frac{2dm}{qE}}$

B $T = 2\sqrt{\frac{2dm}{qE + mg}}$

C $T = 2\sqrt{\frac{qm}{2dE}}$

D $T = 2\sqrt{\frac{2dq}{mgE}}$

E $T = 2\sqrt{\frac{2qE}{d}}$

A

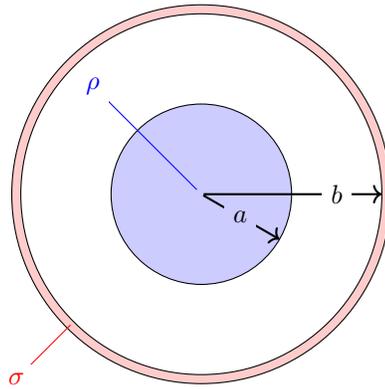
B

C

D

E

Une sphère de rayon a a une densité de charge volumique ρ .
 Cette sphère est dans une coquille de rayon b avec une charge surfacique σ .
 Il n'y a aucune autre charge présente dans l'univers de la question !



Q4

Quelle est la condition nécessaire entre les densités de charge ρ et σ afin que le champ électrique soit nul à l'extérieur de la coquille sphérique ?

A $\rho = -\frac{4b^2}{3a^3} \sigma$

A

B $\rho = -\frac{(a+b)^2}{(b-a)^3} \sigma$

B

C $\rho = -\frac{1}{4\pi(b-a)} \sigma$

C

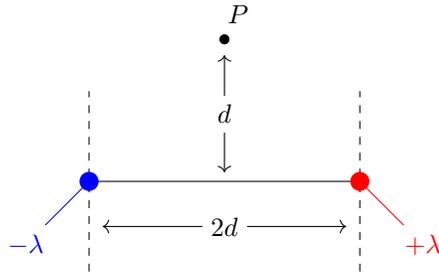
D $\rho = -\frac{4b}{3a^2} \sigma$

D

E $\rho = -\frac{3b^2}{a^3} \sigma$

E

Deux câbles parallèles de longueur infinie sont séparés d'une distance $2d$.
 Les câbles portent des densités de charges linéiques $+\lambda$ et $-\lambda$ respectivement.
 Considérons un point P équidistant des deux câbles et situé à une distance d
 du plan formé par les câbles.



Q5

Quelle est l'intensité du champ électrique en ce point P ?

A $E = \frac{4}{\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{d}$

A

B $E = \frac{2}{\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{d}$

B

C $E = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{d}$

C

D $E = \frac{1}{\sqrt{2} \pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{d}$

D

E $E = \frac{1}{2 \pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{d}$

E

Un treuil situé au sommet d'une pente d'angle 45° .
 Ce treuil fait remonter un bloc à une vitesse constante de $\sqrt{2}$ km/h.
 Le moteur du treuil développe une puissance de 1 kW.
 Le coefficient de frottement dynamique entre la pente et la masse est $\mu_c = 0.2$.
 On utilisera $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Q6

Quelle est la masse m tirée par ce treuil ?

A $m = 83.3 \text{ kg}$

A

B $m = 166.6 \text{ kg}$

B

C $m = 250.0 \text{ kg}$

C

D $m = 300.0 \text{ kg}$

D

E $m = 450.0 \text{ kg}$

E

Une alarme de température est basée sur le principe suivant.
 Une masse de 1 kg est suspendue à un ressort de constante de raideur $k(T)$ qui dépend de la température.

$$k(T) = k_0 - a \underbrace{(T - T_0)}_{\Delta T}$$

avec $k_0 = 100 \text{ N/m}$ et $a = 1 \text{ N/mK}$.

Le ressort est de moins en moins raide à mesure que la température augmente.

A température ambiante T_0 , la masse est située à 10 cm d'un détecteur.

Ce détecteur se déclenche si on lui applique une force de 1 N.

On utilisera $g = 10 \text{ m/s}^2$.

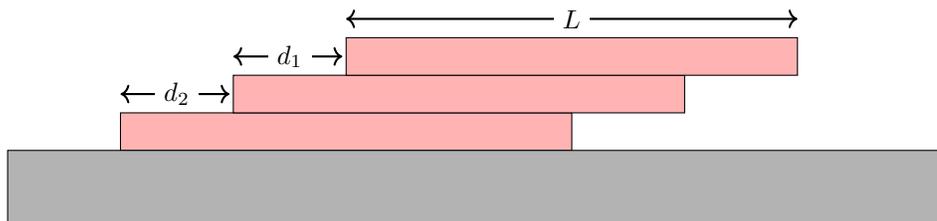
Quel est le plus petit écart de température qui fera déclencher l'alarme ?

- A $\Delta T = 2 \text{ K}$
 B $\Delta T = 10 \text{ K}$
 C $\Delta T = 20 \text{ K}$
 D $\Delta T = 55 \text{ K}$
 E $\Delta T = 100 \text{ K}$

- A
 B
 C
 D
 E

Q7

On empile trois briques homogènes identiques de longueur L .



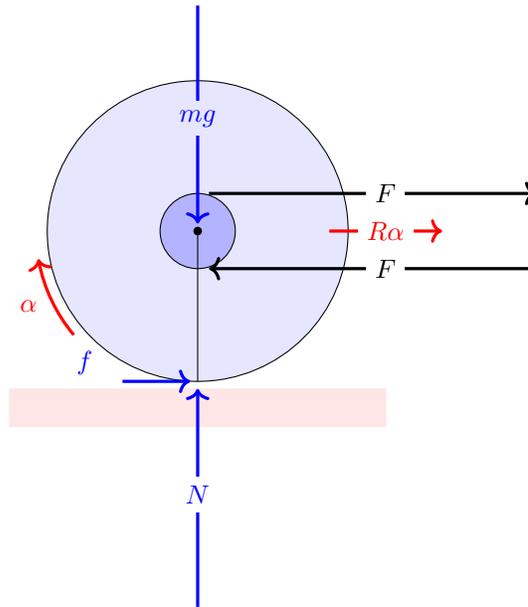
Quelle sont les distances maximales d_1 et d_2 que l'on peut choisir afin que les briques ne basculent pas ?

- A $d_1 = \frac{L}{2}$ et $d_2 = \frac{L}{2}$
 B $d_1 = \frac{L}{2}$ et $d_2 = \frac{L}{4}$
 C $d_1 = \frac{L}{3}$ et $d_2 = \frac{L}{3}$
 D $d_1 = \frac{L}{4}$ et $d_2 = \frac{L}{2}$
 E $d_1 = \frac{L}{4}$ et $d_2 = \frac{L}{4}$

- A
 B
 C
 D
 E

Q8

Considérons une roue de vélo de rayon R entraînée par le mouvement de la chaîne avec un pignon de rayon r . Par convention, une valeur positive des accélérations et forces représentées correspond à la donnée telle qu'elle est représentée sur le dessin.



Q9

Avec la convention choisie, l'équilibre de rotation s'écrit :

- A $I\alpha = 2rF + Rf$
- B $I\alpha = rF - Rf$
- C $I\alpha = rF + 2Rf$
- D $I\alpha = 2rF - Rf$
- E $I\alpha = 2RF - rf$

- A
- B
- C
- D
- E

Une voiture effectue un virage circulaire de rayon R sur une route dont le côté extérieur est relevé d'un angle θ par rapport à l'horizontale. Les coefficients de frottement statique et dynamique entre les pneus de la voiture et le sol sont notés μ_s et μ_c . L'accélération de la gravité est notée g .

Quelle est la vitesse maximale v pour que la voiture ne dérape pas ?

- A $v = \sqrt{Rg \frac{\sin(\theta) + \mu_c \cos(\theta)}{\cos(\theta)}}$
- B $v = \sqrt{Rg \frac{\sin(\theta) + \mu_s \cos(\theta)}{\mu_c \sin(\theta)}}$
- C $v = \sqrt{Rg \frac{\mu_s \sin(\theta)}{\sin(\theta) - \mu_s \cos(\theta)}}$
- D $v = \sqrt{Rg \frac{\sin(\theta) + \mu_s \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_s \sin(\theta)}}$
- E $v = \sqrt{Rg \frac{\sin(\theta) + \mu_c \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_c \sin(\theta)}}$

Q10

- A
- B
- C
- D
- E

Formulaire

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

Mouvement d'un projectile

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
 Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

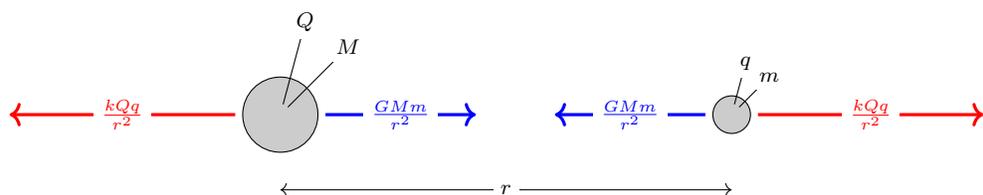
$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$

Force de gravité et force d'interaction électrique

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 8.988 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2$$



Théorème de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

Théorème de l'énergie mécanique

$$\Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) = \sum \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Energies potentielles mécaniques

$$W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b = \frac{kx^2}{2}$$

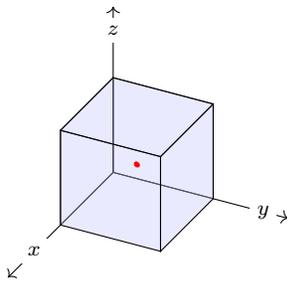
$$U_a - U_b = mgh$$

Energie et potentiel électrique

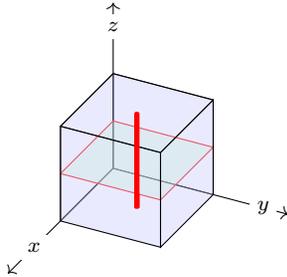
$$U_a - U_b = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

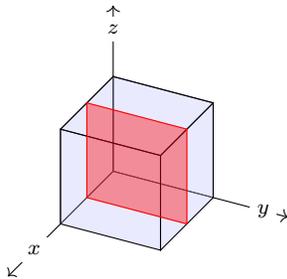
Trois champs et potentiels électriques bien utiles :-)



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C$$



$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$
$$V = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda \ln(r) + C$$



$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma$$
$$V = -\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma r + C$$

r représente la distance à la charge, au fil chargé ou au plan chargé.

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{M}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F r_{\perp} = F_{\perp} r = Fr \sin(\theta)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

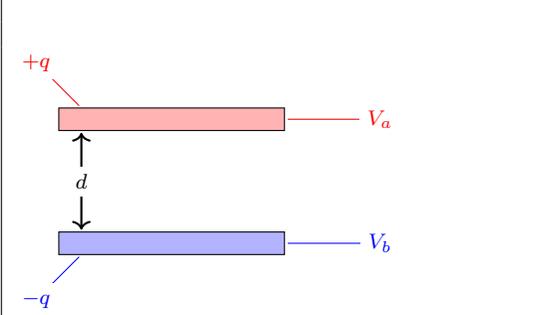
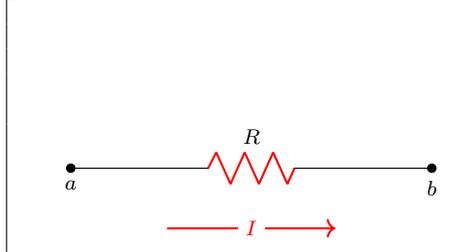
$$I_h = m h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux $I = m R^2$

Cylindre plein $I = m \frac{R^2}{2}$

Barre autour du centre $I = m \frac{L^2}{12}$


$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{d}{\epsilon_0 S} q = \frac{q}{C}$$
$$U = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C}$$

$$V_{ab} = \frac{\rho L}{S} I = RI$$
$$P = RI^2$$

Résistances et capacités en série

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} \quad R = \sum R_i$$

Résistances et capacités en parallèle

$$C = \sum C_i \quad \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$$

Lois de Kirchhoff

$$\sum_{\text{noeuds}} I_i = 0$$

$$\sum_{\text{mailles}} V_i = 0$$