FSA11-ARCH11	
Août 2025	*Physique 1*
LEPL1201	*Vous pouvez conserver cet énoncé !*

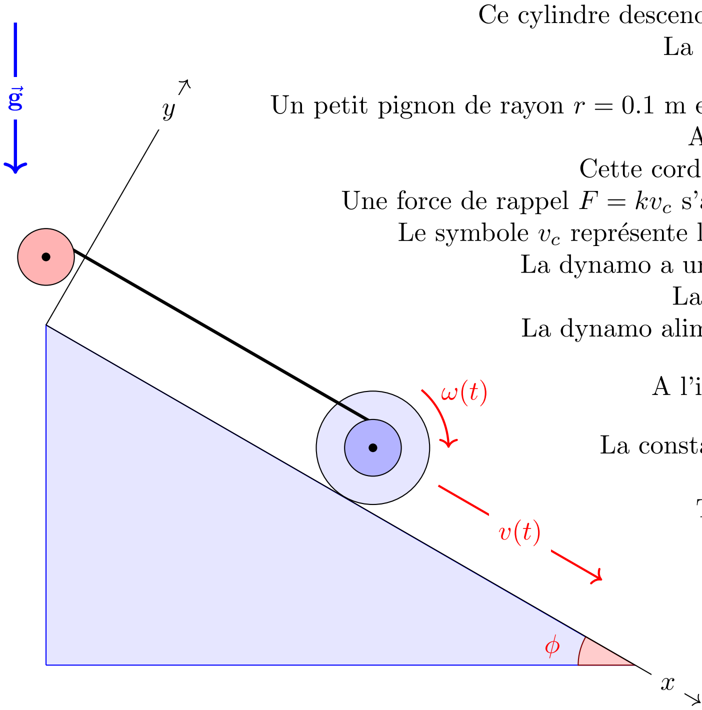
1 Thomas veut un toast grillé...

On considère un cylindre plein de rayon $R = 0.2$ m et de masse $m = 2$ kg.
Ce cylindre descend en roulant sans glisser sur un plan incliné.
La pente a un angle $\theta = 30^o$ avec l'horizontale.

Un petit pignon de rayon $r = 0.1$ m et de masse négligeable est collé sur la roue.
Autour de ce pignon, une corde est enroulée.
Cette corde fait tourner une dynamo située plus haut.
Une force de rappel $F = kv_c$ s'applique sur la corde attachée à la dynamo.
Le symbole v_c représente la vitesse linéaire de la corde qui se déroule.
La dynamo a une force électromotrice proportionnelle à v_c.
La dynamo a une résistance interne $R_i = 2\ \Omega$.
La dynamo alimente le grille-pain de résistance $R_* = 10\ \Omega$.

A l'instant $t = 0$, la roue se met en mouvement.

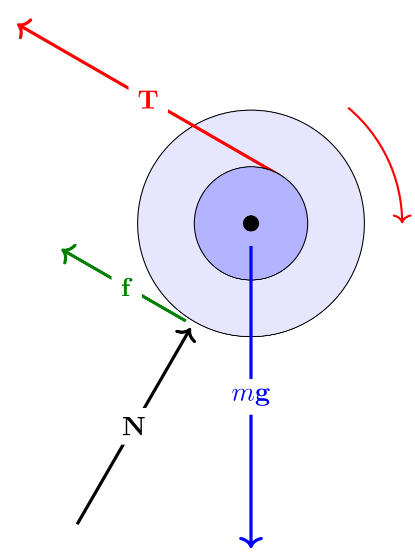
La constante de la force de rappel vaut $k = 10$ kg/s.
Dans les calculs, on utilisera $g = 10$ m/s^2.
Tous les frottements avec l'air sont négligés.



1. Dessiner l'ensemble des forces sur le cylindre.
   Y indiquer clairement le nom et la notation habituelle pour chacune des forces.

C'est la gravité qui fait descendre la roue
et est la force motrice ici !
Il faut citer 4 forces :

- *Force de gravité :* $m\vec{g} = \begin{bmatrix} mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{bmatrix}$
- *Force exercée par la corde :* $\vec{T} = \begin{bmatrix} -kr\omega \\ 0 \end{bmatrix}$
- *Force de frottement du sol :* $\vec{f} = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix}$
- *Force normale du sol :* $\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg\cos\theta \end{bmatrix}$



On peut déduire aisément le sens de la force f
car c'est l'unique force dont le moment pourra faire tourner la roue dans le bon sens.
En effet, le moment dû à la force de rappel de la corde s'oppose à la rotation de la roue
et les deux autres forces ne génèrent aucun moment :-)

2. Que vaut le moment d'inertie I de la roue ?

   Il suffit utiliser l'expression du moment d'inertie d'un cylindre plein et on conclut donc.

$$\boxed{I \;=\; \frac{mR^2}{2} \;=\; \tfrac{2}{2} \times (0.2)^2 \;=\; 0.04 \text{ kg m}^2}$$

   Cette formule était directement fournie dans le formulaire annexé au questionnaire. En outre, noter que cette question a déjà été posée un nombre incalculable de fois et que la solution vous était fournie... Il était donc vraiment impardonnable de ne pas obtenir cette valeur. Il faut la valeur numérique exacte pour valider votre réponse.

3. Ecrire l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la vitesse angulaire $\omega(t)$.

   On écrit les équations du mouvement pour la rotation et la translation de la roue.
   Et on utilise la définition de la force exercée par la corde supérieure sur la dynamo.

$$\left\{\begin{array}{rcl} mR\,\omega'(t) & = & mg\sin\theta - f - T \\[2ex] \dfrac{mR^2}{2}\,\omega'(t) & = & fR - Tr \\[2ex] T & = & kr\omega(t) \end{array}\right.$$

   Il fallait bien observer que la vitesse de translation de la roue est donnée par $R\omega$,
   tandis que la vitesse de la corde qui relie la dynamo est donnée par $r\omega$.
   Il suffit ensuite d'éliminer T et f pour obtenir l'équation différentielle demandée.
   En additionnant la première équation multiplié par R et la seconde équation, on obtient donc :

$$\left(\frac{mR^2}{2} + mR^2\right)\omega'(t) \;=\; mg\sin\theta R - k(Rr + r^2)\,\omega(t)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{3mR^2}{2}\,\omega'(t) \;=\; mgR\sin\theta - k(Rr + r^2)\,\omega(t)$$

$$\downarrow$$

$$\omega'(t) + \underbrace{\frac{2k(Rr + r^2)}{3mR^2}}_{=\frac{5}{2}}\,\omega(t) \;=\; \underbrace{\frac{2g\sin\theta}{3R}}_{=\frac{50}{3}}$$

   On conclut donc : $\boxed{\omega'(t) + \dfrac{5}{2}\,\omega(t) \;=\; \dfrac{50}{3}}$

   Obtenir les valeurs numériques n'était pas essentiel, mais obtenir la bonne forme symbolique de l'équation est fondamental. Ce n'est pas une bonne idée de founir uniquement des valeurs numériques erronées sans aucun détails et développements.... car cela laisse le correcteur bien perplexe :-)

   Oui : comme pour l'examen de juin 2025, il est aussi possible d'écrire directement un bilan énergétique, mais il faut bien y observer que la force T aura un impact sur la rotation et la translation de la roue... C'est un très bel exercice à réaliser par vos soins !
   Oui : la question était vraiment très proche de celle de juin 2025 !

4. Obtenir la valeur de la vitesse angulaire limite ω_* lorsque $t \rightarrow \infty$.

La vitesse de régime obtenue en imposant l'équilibre des forces.

$$\underbrace{\frac{2k(Rr + r^2)}{3mR^2}}_{=\frac{5}{2}} \omega_* \quad = \quad \underbrace{\frac{2g\sin\theta}{3R}}_{=\frac{50}{3}}$$

$$\downarrow$$

$$\omega_* \quad = \quad \frac{mgR\sin\theta}{k(rR + r^2)} \quad = \quad \frac{20}{3}$$

On conclut donc : $\boxed{\omega_* \quad = \quad \frac{20}{3} \quad = \quad 6.66 \ 1/\text{s}}$

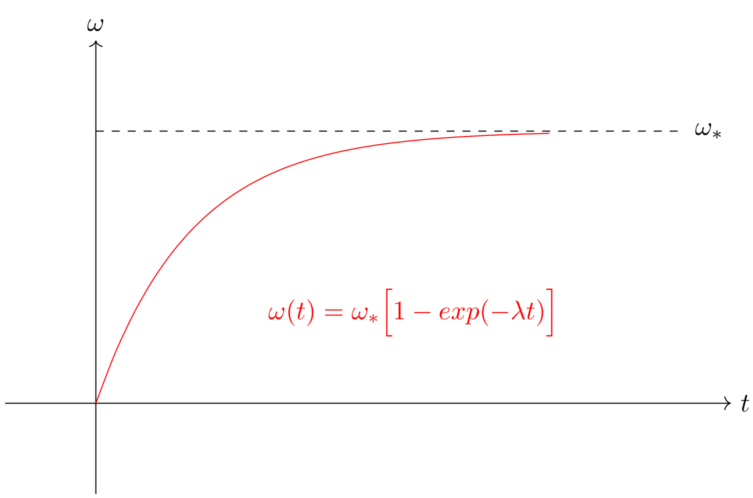
5. Obtenir l'expression symbolique de $\omega(t)$.
Esquisser graphiquement cette fonction.

Les solutions de l'équation homogène sont $\omega(t) = A\exp(-\lambda t)$ *avec* $\lambda = \dfrac{2k(rR + kr^2)}{3mR^2} \quad = \dfrac{5}{2}$.

Comme solution particulière de l'équation inhomogène, on utilise la valeur constante ω_*.
Finalement on utilise la condition initiale $\omega(0) = 0$ *pour déduire la constante* A.

On conclut donc : $\boxed{\omega(t) \quad = \quad \frac{20}{3}\left[1 - \exp\left(-\frac{5t}{2}\right)\right]}$

Cette sous-question était exactement identique à celle posée en juin...
Les deux exercices sont vraiment construits de manière quasiment identiques.
C'est donc vraiment assez impardonnable de ne pas obtenir cette solution
et encore davantage de ne pas arriver à l'esquisser graphiquement.



Cette question simple a été -de nouveau- un véritable massacre organisé malencontreusement !

6. Obtenir l'expression de l'énergie cinétique $K(t)$ de la roue.
   Esquisser l'évolution de cette énergie en fonction du temps.

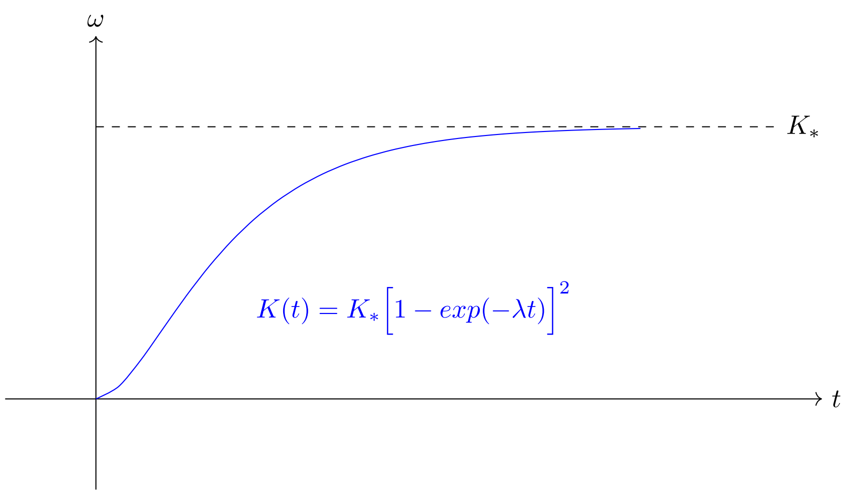
   Il suffit simple d'écrire l'expression de l'énergie cinétique totale :

$$K(t) = \frac{mR^2\,[\omega(t)]^2}{2} + \frac{I\,[\omega(t)]^2}{2}$$

$$\downarrow$$

$$K(t) = \underbrace{\frac{3mR^2\omega_*^2}{4}}_{=\frac{8}{3}}\left[1 - \exp\left(-\frac{5t}{2}\right)\right]^2$$

On conclut donc : $\boxed{K(t) = \frac{8}{3}\left[1 - \exp\left(-\frac{5t}{2}\right)\right]^2}$



7. Quelle est la puissance mécanique transmise à la dynamo lorsque la vitesse est égale à ω_* ?
   La puissance de la force exercée par la dynamo est donnée par :

$$P = kr^2\omega_*^2$$

Et on conclut donc : $\boxed{P = \frac{40}{9} = 4.44 \text{ Watt}}$

A nouveau, c'était quasiment une sous-question de l'examen de juin !
Oui : il fallait avoir obtenu ω_*, pour avoir la valeur numérique !

8. Quel serait alors le courant qui passerait dans le grille-pain si la totalité de la puissance mécanique était convertie en puissance électrique par la dynamo qui aurait un rendement parfait de 100 %.

   La puissance dans le circuit est donnée par l'expression :

$$P = (R_i + R_*)I^2$$

$$\downarrow$$

$$I = \sqrt{\frac{P}{(R_i + R_*)}}$$

   Et on conclut donc : $\boxed{I = \sqrt{\frac{40}{108}} = 0.61 \text{ Ampere}}$

9. Expliquer comment on peut obtenir le rendement de dynamo
   en mesurant expérimentalement la tension U_* au bornes de la résistance du grille-pain.

   Il s'agit de calculer la puissance réelle P_* du grille-pain est obtenue avec le courant I_* correspondant à la tension mesurée U_* en sachant que $U_* = R_* I_*$. On écrit donc tout simplement l'expression de la puissance de notre grille-pain de la manière suivante :

$$P_* = R_* I_*^2$$

$$\downarrow$$

$$P_* = \frac{U_*^2}{R_*}$$

   Ensuite, le rendement η de la dynamo est défini
   comme le rapport entre cette puissance réelle P_* et la puissance mécanique fournie P.

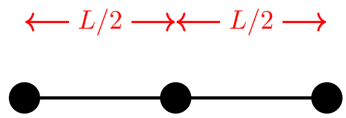
   Et on conclut donc : $\boxed{\eta = \frac{P_*}{P} = \frac{U_*^2}{R_* P}}$

   Il est donc bien possible d'obtenir le rendement à partir d'une mesure de expérimentale de tension !
   C'est magique de faire des mesures expérimentales : non ?

2 Petites questions courtes

L'inertie d'une bille tournant autour de son centre est $I_s = \dfrac{2mR^2}{5}$.

Trois billes de rayon R et de masse m sont attachées à une barre de longueur L comme indiqué ci-dessous. La masse et le moment d'inertie de la barre sont négligeables. On calcule le moment d'inertie I de cet ensemble *par rapport à une extrémité de la barre.*



Obtenir l'expression de ce moment d'inertie I.

Q 2.1 On applique le théorème des axes parallèles :

$$I = I_s + I_s + m\frac{L^2}{4} + I_s + mL^2$$

$$I = \frac{6mR^2}{5} + \frac{5mL^2}{4}$$

$$I = m\left(\frac{6R^2}{5} + \frac{5L^2}{4}\right)$$

La norme du champ électrique à une distance de 2 m d'une charge ponctuelle vaut 10 V/m.
Ce champ électrique est orienté vers la charge.
Le potentiel à l'infini est supposé nul.

Quel est le potentiel électrique à une distance de 1 m de cette charge ?

Q 2.2

Comme le champ électrique est orienté vers la charge,
on peut déduire la charge est négative et est notée $-Q$.
Le champ électrique et le potentiel électrique d'une charge ponctuelle sont donnés par :

$$E(r) = -k\frac{Q}{r^2} \qquad V(r) = k\frac{Q}{r}$$

Ensuite, on obtient Q de la valeur fournie du champ électrique
pour obtenir la valeur requise du potentiel !

$$E(r=2) = -\frac{kQ}{4} = 10$$

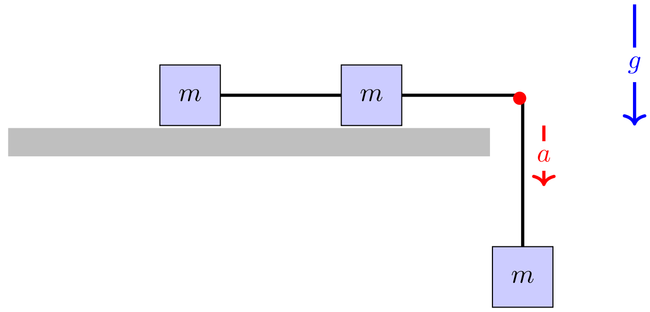
$$\downarrow$$

$$Q = -\frac{40}{k}$$

$$\downarrow$$

$$V(r=1) = \frac{kQ}{1} = -40 \text{ V}$$

Les trois blocs ont le même masse m.



Q 2.3 Le coefficient de frottement cinétique μ_c entre le sol et les blocs est identique.
Obtenir l'expression de la norme de l'accélération a de chacun des 3 blocs.

On applique le bilan de quantité de mouvement sur les 3 blocs
avec la gravité sur un bloc comme force motrice
et le frottement comme force résistive sur deux blocs.

$$3ma = mg - 2\mu_c mg$$

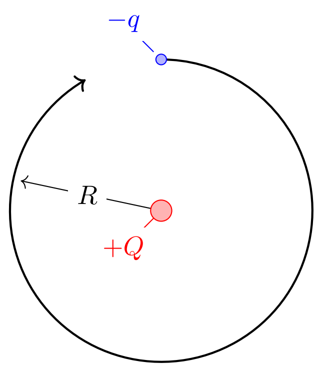
$$\downarrow$$

$$a = \frac{g(1-2\mu_c)}{3}$$

Q 2.4

Une charge ponctuelle $-q$ et de masse m tourne à une vitesse angulaire ω constante autour d'une charge fixe ponctuelle $+Q$ et de masse négligeable.
Le mouvement circulaire a un rayon R.

Comment choisir $+Q$ pour assurer ce mouvement circulaire de la charge $-q$?



Obtenir l'expression de la charge Q.

On écrit le principe fondamental de la mécanique
avec l'accélération centripète et la force de Coulomb

$$m\omega^2 R = \frac{kqQ}{R^2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{m\omega^2 R^3}{kq} = Q$$

Q 2.5

Une sphère de rayon R avec un moment d'inertie de $I = \frac{5}{7}MR^2$
roule sans glisser sur une surface plane.

Quelle fraction α de son énergie cinétique totale est une énergie cinétique de rotation ?

La sphère roule sans glisser $v = R\omega$.

L'énergie cinétique de rotation est donnée par :

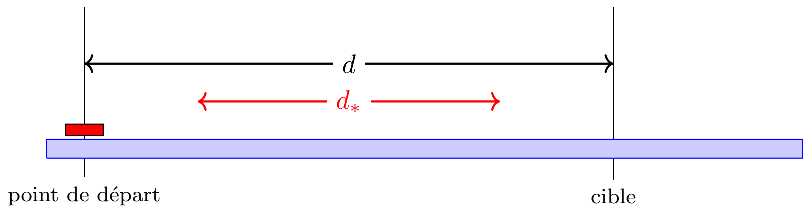
$$K_r = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{5MR^2\omega^2}{14}$$

L'énergie cinétique totale est donnée par :

$$K = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{5MR^2\omega^2}{14} + \frac{MR^2\omega^2}{2} = \frac{12MR^2\omega^2}{14}$$

La fraction demandée est donc : $\alpha = \dfrac{K_r}{K} = \dfrac{5}{12}$

Le *curling* est un sport de précision pratiqué sur la glace avec des pierres en granite. Le but est de placer la pierre le plus près possible d'une cible appelée la maison. Les joueurs ont un balai de curling qui permet de modifier localement le frottement devant la pierre afin d'y créer des effets complexes permettant d'obtenir une trajectoire courbée. C'est l'origine du nom de ce sport !



Ici, nous considérons une version très simplifiée où la pierre de masse m suit une trajectoire rectiligne, sans aucun mouvement de rotation. La cible est à une distance d, la vitesse initiale de la pierre est v et le coefficient de frottement cinétique entre la pierre et la glace est μ_c. Afin que la pierre puisse atteindre la cible, les joueurs vont frotter la glace afin de réduire le coefficient de frottement à une valeur $\mu_* < \mu_c$, sur une section d_* de la trajectoire.

Q 2.6 Quelle doit être la distance d_* ?

Il suffit de faire un bilan d'énergie avec le travail des forces de frottement...

$$\frac{mv^2}{2} = (d - d_*)\mu_c mg + \mu_* d_* mg$$

$$\downarrow$$

$$v^2 = 2\mu_c gd + 2(\mu_* - \mu_c)gd_*$$

$$\downarrow$$

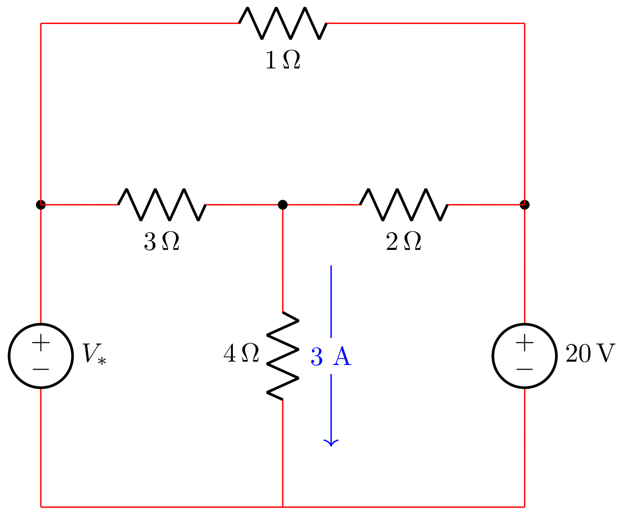
$$d_* = \frac{2\mu_c gd - v^2}{2(\mu_c - \mu_*)g}$$

Deux condensateurs $C_1 = 10\ \mu F$ et $C_2 = 20\ \mu F$ sont connectés en série.
Tout d'abord, ce montage de deux condensateurs est chargé longtemps avec une source de tension de 10 V.
Ensuite, on déconnecte ce circuit et on décharge C_1 dans une résistance $R = 1\ k\Omega$.

Q 2.7 Quelle est la tension V_* mesurée aux bornes du montage RC_1 à un intervalle de temps de $\Delta t = 10\ ms$ après le début de la décharge ?

$V_* = \frac{20}{3e}\ \text{V} = 2.45\ \text{V}$

Q 2.8



Quelle est la tension V_* de la source à gauche ?

$V_* = 9$ V

Formulaire

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$
$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

Mouvement d'un projectile

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} u_0 t + x_0 \\ -gt^2/2 + v_0 t + y_0 \end{bmatrix}$$
$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} u_0 \\ -gt + v_0 \end{bmatrix}$$
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

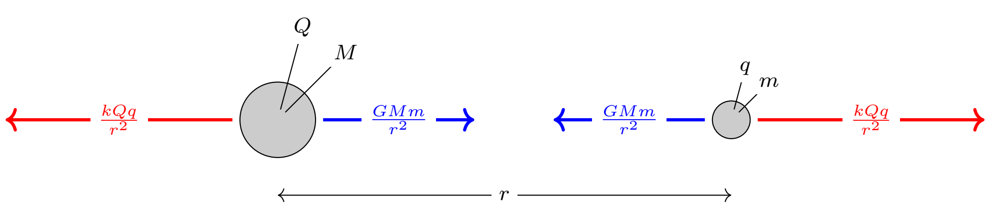
Mouvement horizontal = MRU (vitesse constante)
Mouvement vertical = MRUA (accélération constante)

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\alpha\, t^2}{2}$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$

Force de gravité et force d'interaction électrique

$$G = 6.674\ 10^{-11} \quad \text{N m}^2/\text{kg}^2$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 8.988\ 10^{9} \quad \text{N m}^2/\text{C}^2$$
$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.854\ 10^{-12} \quad \text{C}^2/\text{N m}^2$$



Théorème de Gauss

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad = \quad \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

Théorème de l'énergie mécanique

$$\Delta \overbrace{\left(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\right)}^{K} \quad = \quad \sum \overbrace{\int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}}^{W}$$

Energies potentielles mécaniques

$$W_{a \to b} \quad = \quad U_a - U_b \quad = \quad \frac{kx^2}{2}$$

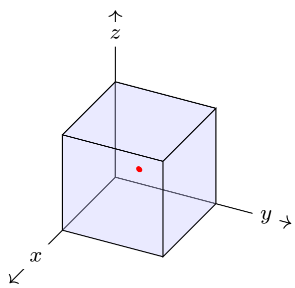
$$U_a - U_b \quad = \quad mgh$$

Energie et potentiel électrique

$$U_a - U_b \quad = \quad q_0 \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

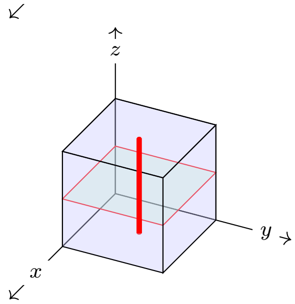
$$V_a - V_b \quad = \quad \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

Trois champs et potentiels électriques bien utiles :-)



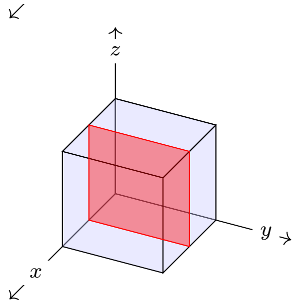
$$E \quad = \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{r^2}$$

$$V \quad = \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{r} + C$$



$$E \quad = \quad \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ \frac{\lambda}{r}$$

$$V \quad = \quad -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ \lambda\ \ln(r) + C$$



$$E \quad = \quad \frac{1}{2\epsilon_0}\ \sigma$$

$$V \quad = \quad -\frac{1}{2\epsilon_0}\ \sigma\ r + C$$

r représente la distance à la charge, au fil chargé ou au plan chargé.

Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F\, r_\perp = F_\perp\, r = F r \sin(\theta)$$

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i\, r_i^2$$

Théorème des axes parallèles

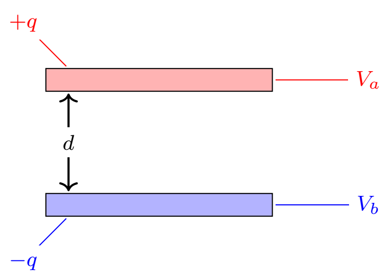
$$I_h = m\, h^2 + I$$

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

$$\text{Cylindre creux} \quad I = m\, R^2$$

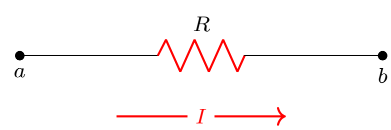
$$\text{Cylindre plein} \quad I = m\, \frac{R^2}{2}$$

$$\text{Barre autour du centre} \quad I = m\, \frac{L^2}{12}$$



$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{d}{\epsilon_0\, S}\, q = \frac{q}{C}$$

$$U = \int_0^q \frac{q}{C}\, dq = \frac{q^2}{2C}$$



$$V_{ab} = \frac{\rho L}{S}\, I = RI$$

$$P = RI^2$$

Résistances et capacités en série

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} \qquad R = \sum R_i$$

Résistances et capacités en parallèle

$$C = \sum C_i \qquad \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$$

Lois de Kirchhoff

$$\sum_{noeuds} I_i = 0$$

$$\sum_{mailles} V_i = 0$$