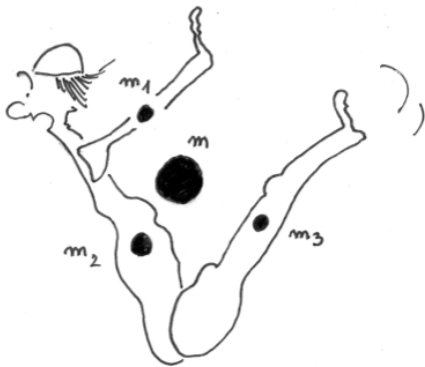


Séance 9

Mécanique des corps



$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$
$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

Ensemble de points : un corps !

$$m = \sum m_i$$
$$m \vec{x} = \sum (m_i \vec{x}_i)$$
$$m \vec{v} = \sum (m_i \vec{v}_i)$$
$$\frac{1}{2} m v^2 \neq \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

66

Une particule est en train de parcourir un cercle de rayon de 4 m. A un instant donné t^* , sa vitesse augmente à raison de 2 m/s^2 et son accélération centripète est 6 m/s^2 . Quelle est la norme de son accélération totale et de sa vitesse à cet instant précis ?

67

Un seau d'eau décrit un mouvement circulaire vertical de rayon 80 cm. Quelle est la vitesse minimale requise au point le plus élevé pour que l'eau ne tombe pas du seau lorsqu'il est à l'envers ?

68

Un objet est posé au bord du plateau de rayon $R = 15 \text{ cm}$ qui tourne à 45 tours par minute. Quel est le coefficient de frottement minimal requis pour que ce petit objet reste sur le plateau ?

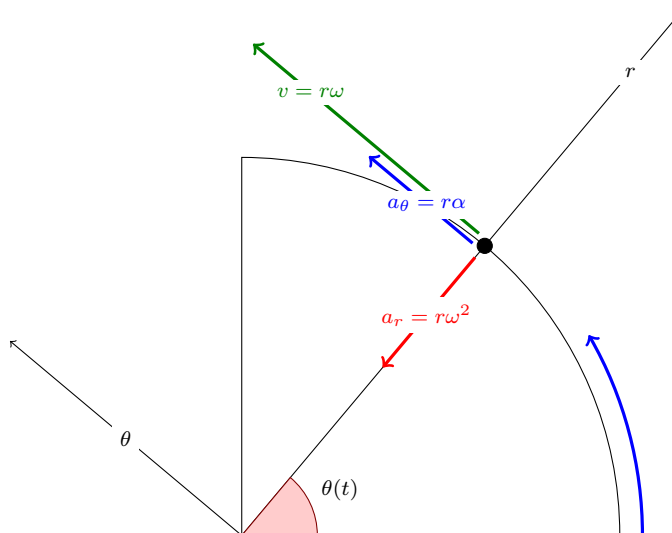
69

Dans un parc d'attractions, considérons une masse m , lâchée d'une hauteur h par rapport au bas d'un cercle vertical de rayon R . La masse glisse sans aucun frottement sur l'ensemble du parcours de l'attraction. Quelle est la valeur minimale de h pour que la masse ne tombe pas du cercle ?

Mouvement circulaire uniformément accéléré : $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}$$



Vitesse : $v = r\omega$ [m/s]

Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$ [m/s²]

Vitesse angulaire ω [radians/s] et accélération angulaire α [radians/s²]

70

Une bretelle circulaire de sortie d'autoroute a un rayon de 60 m et la signalisation indique une vitesse limite de 60 Km/h. Quelle est le coefficient de frottement minimal requis pour éviter que les voitures ne dérapent si la route est horizontale ?

71

A son sommet, la grande boucle verticale d'un parc d'attractions a un rayon $R = 6.5$ m. Quelle doit être la vitesse minimale du train pour ne pas quitter les rails à cet endroit ? En ce point, quel est le poids apparent d'un enfant de masse m pour une vitesse v du train ?

**La loi de Newton d'un point
et ses deux corollaires :-)**

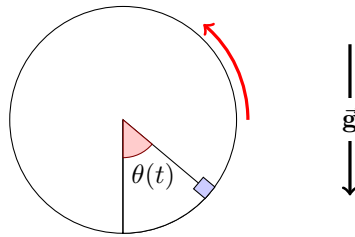
$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

72

Un petit bloc est placé à l'intérieur d'un cylindre de rayon $R = 40 \text{ cm}$ qui tourne avec une période de 2 s autour d'un axe horizontal.



Montrer que l'angle maximal θ atteint par le bloc avant qu'il ne commence à glisser est donné par :

$$g \sin(\theta) = \mu_s \left(g \cos(\theta) + \frac{v^2}{R} \right)$$

où $\mu_s = 0.75$ est le coefficient de frottement statique et v est le module de la vitesse du bloc. Il est ensuite possible de déterminer la valeur de l'angle θ , même si c'est un tout petit peu calculatoire et un fifrelin compliqué :-)

73

Calculer la position du centre de masse d'un athlète lors d'un plongeon. Le corps est segmenté en trois parties : le tronc avec la tête, les deux jambes et les deux bras. Globalement, le sujet pèse 60 kg . La masse d'une jambe et la masse d'un bras représentent respectivement 16% et 5% de la masse globale d'une personne.

Les coordonnées des centres de masse des 3 parties du corps sont :

Jambes	(0.30 ; 0.32)
Bras	(0.21 ; 0.53)
Tronc-tête	(0.08 ; 0.27)

74

Un mécanicien équilibre une roue avec une masse $M = 20 \text{ kg}$ en plaçant un petit plomb de masse m sur la jante à $R = 18 \text{ cm}$ du centre de la roue. Le centre de masse de la roue se trouve initialement à une distance de $d = 0.3 \text{ mm}$ du centre géométrique de la roue. Où doit-il placer le plomb et quelle masse doit avoir ce plomb afin que le centre géométrique et le centre de gravité du système globale coïncident ? On ne tient pas compte de l'épaisseur de la roue.

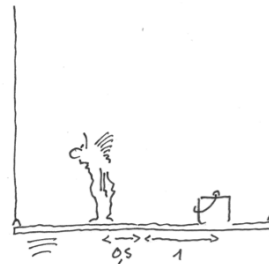
75

Une planche avec une masse $m_p = 5 \text{ kg}$ et une longueur $L = 3.6 \text{ m}$ est soutenue par des cordes verticales fixées à ses extrémités. Un peintre $m_h = 60 \text{ kg}$ se trouve à 0.5 m à gauche du centre et un seau de $m_s = 8 \text{ kg}$ à un mètre à droite du centre. Déterminer les tensions dans chacune des deux cordes.

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

$$0 = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$



76

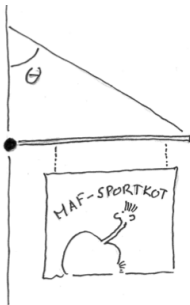
Un obus de masse $m = 6$ kg est projeté du sommet d'une falaise de $h = 100$ m de haut avec une vitesse initiale de $v = 50$ m/s avec une direction de $\theta = 53^\circ$ vers le haut. En un point de sa trajectoire, il explose en deux fragments. Le premier morceau de masse $m_1 = 4$ kg touche le sol à $L = 200$ m au pied de la falaise. Les deux morceaux touchent le sol au même instant. Où atterrit le second morceau ?

77

La masse de Jacques est $m_1 = 75$ kg tandis que la masse corporelle de Jean est $m_2 = 60$ kg. Ils se trouvent à une distance de $L = 10$ m l'un de l'autre sur un lac gelé où ils peuvent glisser sans aucun frottement. Ils sont initialement immobiles. Ensuite, ils tirent chacun sur une même corde tendue entre eux de sorte que la vitesse de Jean est 0.3 m/s. La longueur de la corde entre eux se réduit donc progressivement. Quelle est la vitesse de Jacques ? Où se rencontreront-ils par rapport à leurs positions initiales ?

78

Les crochets auxquels est suspendue une enseigne avec une masse $m_1 = 3$ kg sont distants de 72 cm et situés à égale distance du milieu de l'enseigne. Le crochet droit est à 20 cm de l'extrémité de la barre horizontale. Cette barre a une masse $m_2 = 2$ kg et une longueur de $L = 1,2$ m. Le côté gauche de la barre est attaché à un pivot et peut donc tourner librement autour de celui-ci. Le côté droit de la barre est retenu par une câble tendu qui forme un angle $\theta = 60^\circ$ avec le mur. Quelle est la tension dans le câble ? Quelle est la force exercée par le pivot sur la barre ?



Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{M}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$M = r_x F_y - r_y F_x = F r_{\perp} = F_{\perp} r = Fr \sin(\theta)$$

Notions physiques en mécanique

Vitesse	\vec{v}	m/s
Vitesse angulaire	ω	rad/s
Force	\vec{F}	kg m/s ² = N
Impulsion	$\vec{F} \Delta t$	kg m/s = Ns
Quantité de mouvement	$m\vec{v}$	kg m/s = Ns
Moment de force	M	kg m ² /s ² = Nm
Impulsion angulaire	$M \Delta t$	kg m ² /s = Nm s
Moment de la quantité de mouvement	$I\omega$	kg m ² /s = Nm s
Puissance	$\vec{F} \cdot \vec{v}$	kg m ² /s ³ = Nm/s = J/s = W
Travail	$\vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$	kg m ² /s ² = Nm = J
Energie cinétique	$mv^2/2 + I\omega^2/2$	kg m ² /s ² = Nm = J
Energie potentielle de gravité	mgh	kg m ² /s ² = Nm = J
Energie potentielle du ressort	$kx^2/2$	kg m ² /s ² = Nm = J