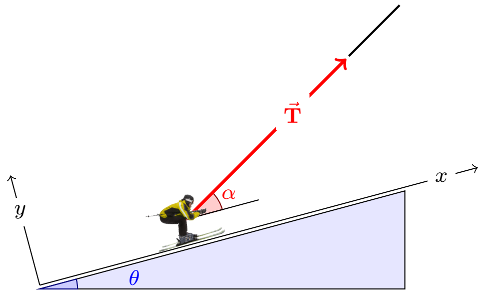
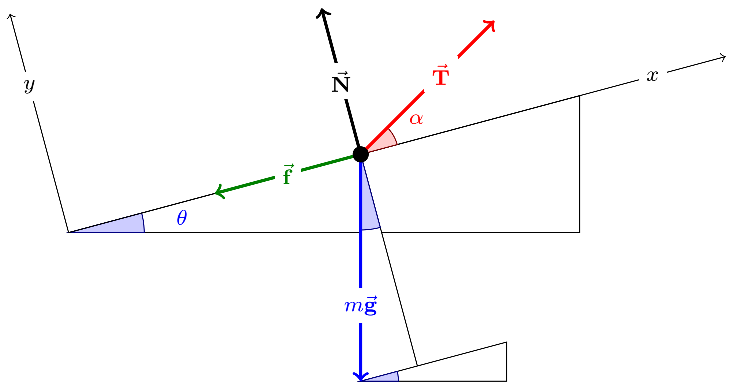
Le skieur : solution



31

La toute première étape consiste à répertorier l'ensemble des quatre forces qui s'appliquent sur le skieur : la force exercée par le cable du tire-fesses, la force de gravité, la réaction normale du sol et la force de frottement qui s'oppose au mouvement. On réduit le skieur à un unique point matériel et on dessine l'ensemble des forces.



On obtient donc :

- Force de gravité : $m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} -mg\sin(\theta) \\ -mg\cos(\theta) \end{bmatrix}$
- Frottement : $\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} -\mu_c N \\ 0 \end{bmatrix}$
- Force normale du sol : $\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix}$
- Traction du cable : $\vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} T\cos(\alpha) \\ T\sin(\alpha) \end{bmatrix}$

où T et N représentent la norme de forces correspondantes et sont donc des nombres réels positifs. Il faut ici bien observer que le frottement s'oppose au skieur qui monte. Sa composante en x est négative et vaut donc bien l'opposé de la norme (toujours positive) de la force normale multipliée par le coefficient de frottement cinétique.

1. Comme le skieur monte à vitesse constante, il n'y a pas d'accélération.
   Donc la somme des forces doit s'annuler :

$$\begin{bmatrix} -mg\sin(\theta) \\ -mg\cos(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu_c N \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T\cos(\alpha) \\ T\sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} -mg\sin(\theta) - \mu_c N + T\cos(\alpha) = 0 \\ -mg\cos(\theta) + N + T\sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$

L'équilibre en y permet d'obtenir la valeur de N.

$$N = mg\cos(\theta) - T\sin(\alpha)$$

A ce stade, il est utile de vérifier que le problème se présente bien comme on l'a imaginé et que la valeur de N est positive. En d'autres mots, il faut que la composante verticale de la force de gravité soit supérieure à la composante verticale de la force de traction : si ce n'est pas le cas, le skieur ne serait plus en contact avec le sol et il n'y aurait pas de réaction normale du sol[1].

L'équilibre en x permet ensuite de déduire la valeur de μ_c.

$$\mu_c N = T\cos(\alpha) - mg\sin(\theta)$$

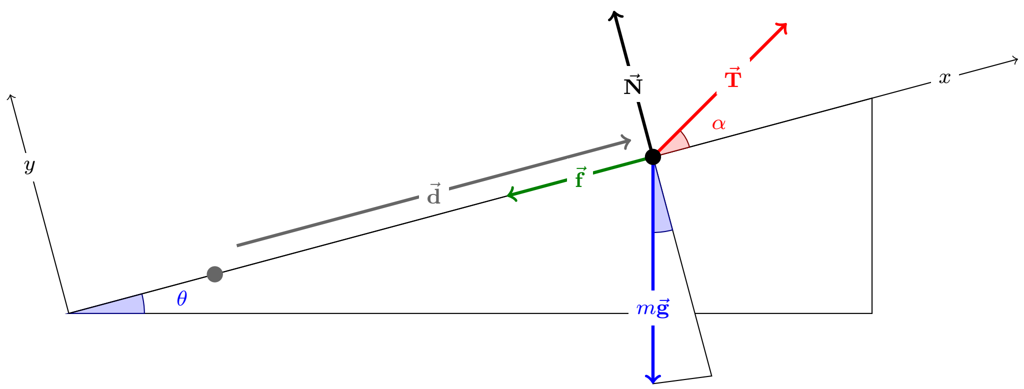
En y substituant $N = mg\cos(\theta) - T\sin(\alpha)$

$$\mu_c\Big(mg\cos(\theta) - T\sin(\alpha)\Big) = T\cos(\alpha) - mg\sin(\theta)$$

$$\mu_c = \frac{T\cos(\alpha) - mg\sin(\theta)}{mg\cos(\theta) - T\sin(\alpha)}$$

Bien observer que l'expression est dimensionnellement correcte !

2. Pour obtenir le même résultat en faisant un bilan d'énergie cinétique, on considère le travail effectué par toutes les forces lorsque le skieur se déplace d'une distance d le long de la pente. Comme la vitesse est constante, la somme des travaux de toutes les forces doit s'annuler.



Avec un déplacement quelconque $\vec{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$ le long de la pente, les travaux effectués par les forces sont :

- Travail de la force de gravité : $W_{mg} = \vec{\mathbf{d}} \cdot m\vec{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -mg\sin(\theta) \\ -mg\cos(\theta) \end{bmatrix} = -d\ mg\sin(\theta)$
- Travail du frottement : $W_f = \vec{\mathbf{d}} \cdot \vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\mu_c N \\ 0 \end{bmatrix} = -d\ \mu_c N$
- Travail de la force normale du sol : $W_N = \vec{\mathbf{d}} \cdot \vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} = 0$
- Travail de la traction du cable : $W_T = \vec{\mathbf{d}} \cdot \vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T\cos(\alpha) \\ T\sin(\alpha) \end{bmatrix} = d\ T\cos(\alpha)$

[1]Sauf si vous avez recouvert la neige d'une colle gluante et visqueuse qui pourrait retenir le skieur... mais est-ce vraiment bien réaliste ?

Imposer que la somme des travaux s'annulent est équivalent à écrire l'équilibre en x des forces !

$$
\begin{aligned}
-d\ \mu_c N - d\ mg\sin(\theta) + d\ T\cos(\alpha) &= 0 \\
&\downarrow \quad \text{En divisant l'expression par le déplacement quelconque } d \text{ :-)} \\
\mu_c N &= T\cos(\alpha) - mg\sin(\theta) \\
&\downarrow \quad \text{En y substituant } N = mg\cos(\theta) - T\sin(\alpha) \\
\mu_c\Big(mg\cos(\theta) - T\sin(\alpha)\Big) &= T\cos(\alpha) - mg\sin(\theta) \\
&\downarrow \\
\mu_c &= \frac{T\cos(\alpha) - mg\sin(\theta)}{mg\cos(\theta) - T\sin(\alpha)}
\end{aligned}
$$

On a bien obtenu exactement la même chose :-)

3. Pour obtenir l'accélération que subirait le skieur, il faut supprimer la force de traction du cable et la conservation de la quantité de mouvement s'écrit tout simplement :

$$
\begin{bmatrix} -mg\sin(\theta) \\ -mg\cos(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu_c N \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$\downarrow$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
-mg\sin(\theta) - \mu_c N &= -ma \\
-mg\cos(\theta) + N &= 0
\end{aligned}
\right.
$$

On peut directement en déduire que : $$\boxed{\begin{aligned} a &= g\sin(\theta) + \mu_c g\cos(\theta) \\ &= g\left[\sin(\theta) + \frac{T\cos(\alpha) - mg\sin(\theta)}{mg\cos(\theta) - T\sin(\alpha)}\ \cos(\theta)\right] \end{aligned}}$$

Attention, ce résultat n'est valide que si le skieur continue à monter ! Lorsque la vitesse change d'orientation et que le skieur commence à descendre, l'orientation de la force de frottement va s'inverser ! A ce moment, la force de frottement aura tendance à ralentir la descente du skieur tandis qu'aux premiers instants, la force de frottement a tendance à ralentir la montée du skieur...

4. Lorsqu'on atteint l'angle critique θ où le skieur se met en mouvement, la composante tangentielle de la force de gravité est égale à la valeur maximale que peut atteindre la force de frottement statique.

$$
\begin{bmatrix} -mg\sin(\theta) \\ -mg\cos(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_s N \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

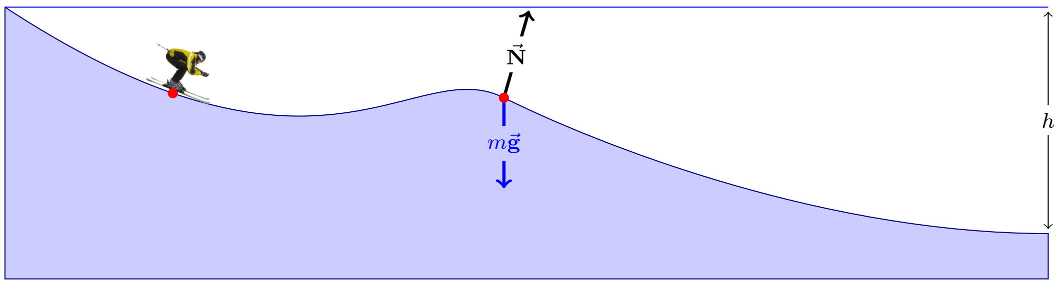
$$\downarrow$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
-mg\sin(\theta) + \mu_s N &= 0 \\
-mg\cos(\theta) + N &= 0
\end{aligned}
\right.
$$

On peut directement en déduire que : $$\boxed{\mu_s = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)}$$

Le skieur se mettra en mouvement si l'angle θ est tel que $\tan(\theta) > \mu_s$.

5. Pour obtenir la vitesse du skieur à la fin de la piste, il faut utiliser le bilan d'énergie cinétique car on ne dispose pas de suffisamment d'informations pour pouvoir résoudre les équations de Newton.
   En particulier, nous ignorons tout du profil de la piste ! Par contre, à tout instant, nous savons que la réaction normale du sol sera perpendiculaire au déplacement du skieur et ne produira donc strictement aucun travail.



Calculons le travail effectué par les deux forces qui agissent sur le skieur, puisqu'on suppose que l'on néglige tous les frottements[2].
Notons aussi que pour tenir compte du frottement, il serait nécessaire de connaître le profil exact de la piste !

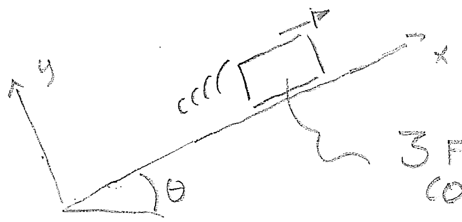
– Travail effectué par la force de gravité : $W_{mg} = mgh$
– Travail effectué par la force normale : $W_N = 0$

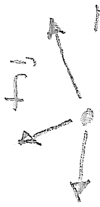
En faisant alors un bilan de l'énergie cinétique, on obtient immédiatement :
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}mv^2 - 0 & = & mgh \\ & \downarrow & \\ v & = & \sqrt{2gh} \end{array}}$$

Notons aussi que cette vitesse ne dépend pas de la longueur de la piste car nous avons négligé tous les frottements! Ce n'est évidemment pas tout-à-fait réaliste !

[2]Cette hypothèse n'est pas vraiment réaliste évidemment, mais est subtilement introduite pour que l'exercice soit facile à résoudre sinon, il serait nécessaire de faire appel au calcul intégral : ce qui est largement hors des objectifs du cours !

32





$\vec{N} = \begin{bmatrix} mg\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$

$m\vec{g} = \begin{bmatrix} -mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{bmatrix}$

3 FORCES CONSTANTES

IL Y A DU TRAVAIL POUR LA GRAVITE ET LE FROTTEMENT

$$\underbrace{\Delta\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)}_{0-\frac{1}{2}mv^2} = \underbrace{-d\mu_c mg\cos\theta}_{\text{TRAVAIL FORCE FROTTEMENT}} \underbrace{-dmg\sin\theta}_{\text{TRAVAIL GRAVITE}}$$

VITESSE INITIALE !

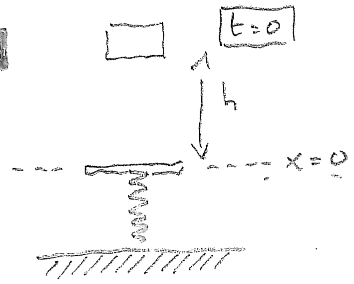
$$\frac{1}{2}v^2 = dg(\mu_c\cos\theta + \sin\theta)$$

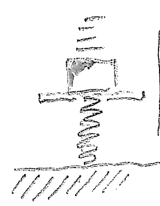
$$\boxed{d = \frac{v^2}{2g(\mu_c\cos\theta + \sin\theta)}}$$

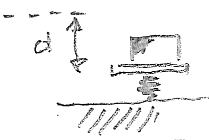
VALEURS NUMERIQUES

$$d = \frac{4\times 4}{\underbrace{2\times 9{,}81\,(0{,}6\,\sqrt{3}/2 + 1/2)}_{0{,}8}}$$

33







$t=0$ | t_1 | t_2

LE BLOC TOUCHE LE PLATEAU !

LE RESSORT EST COMPRIME AUX MAX $v=0$!

$t=0$	t_1	t_2
$U_g = mgh$	$U_g = 0$	$U_g = -mgd$
$U_r = 0$	$U_r = 0$	$U_r = kd^2/2$
$K = 0$	$K = \frac{mv^2}{2} = mgh$	$K = 0$

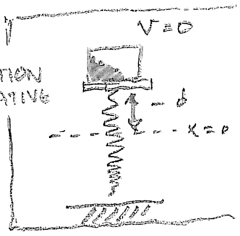
CAR CONSERVATION ENERGIE MECANIQUE !

• CONSERVATION ENERGIE MECANIQUE

$$\boxed{\underset{0{,}5\ \ 9{,}81\ \ 0{,}6}{mgh} = -mgd + \overset{120}{k}\,d^2/2}$$

$$\boxed{60d^2 - 4{,}9d - 2{,}94 = 0}$$

À EXCLURE !

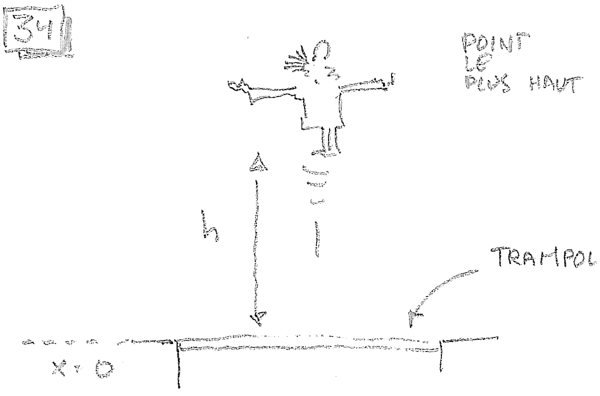


SOLUTION NEGATIVE

SOLUTION POSITIVE

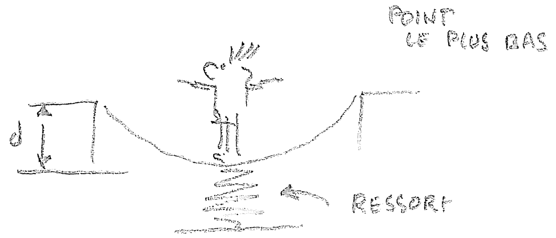
$$\boxed{d = 0{,}27\ \text{m}}$$

34



$U_g = mgh$
$U_r = 0$
$K = 0$

ETAT INITIAL



$U_g = -mgd$
$U_r = k\,d^2/2$
$K = 0$

ETAT FINAL

CONSERVATION ENERGIE MECANIQUE

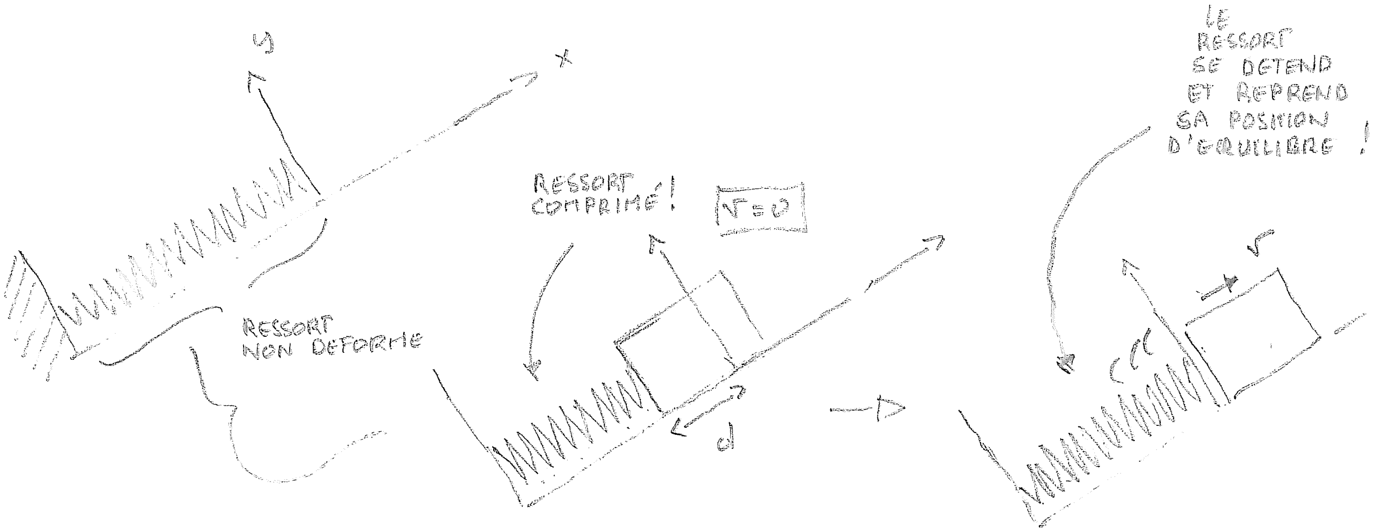
$$mgh = -mgd + k\,d^2/2$$

$$\frac{2mg(h+d)}{d^2} = k$$

CHECK DIMENSION !

VALEUR NUMERIQUE

$$\frac{2 * 68 * 9{,}81 * 3{,}45}{45 \times 45} = 22700 \text{ N/m}$$



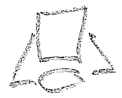
ETAT INITIAL

$$U_g = -mgd\sin\theta$$
$$U_r = kd^2/2$$
$$K = 0$$

$\longrightarrow$

$$U_g = 0$$
$$U_r = 0$$
$$K = mv^2/2$$

ETAT FINAL



ATTENTION
IL FAUT TENIR COMPTE DU FROTTEMENT !! !!

$$\underbrace{\Delta K}_{\frac{1}{2}mv^2} + \underbrace{\Delta U}_{mgd\sin\theta - kd^2/2} = \underbrace{\vec{f}\cdot\vec{d}}_{\text{TRAVAIL DU FROTTEMENT}}$$

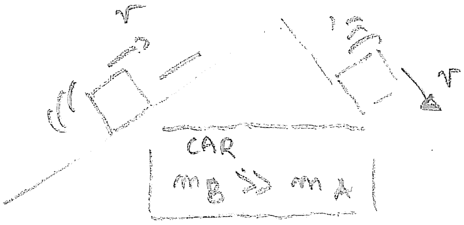
$$\begin{bmatrix} -\mu\, mg\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgd\sin\theta - kd^2/2 = -\mu_c mgd\cos\theta$$

$$v^2 = -2gd\left(\mu_c\cos\theta + \sin\theta\right) + kd^2/m$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{kd^2}{m} - 2gd\left(\mu_c\cos\theta + \sin\theta\right)}}$$

VALEUR NUMERIQUE $v = 1{,}46$ m/s



CAR
$m_B \gg m_A$

ETAT INITIAL

$K = 0$
$U_g = 0$

ETAT FINAL

$K = (m_A + m_B)\, v^2/2$

$U_g = \underbrace{m_A\, g\, d \sin\alpha}_{\text{LE BLOC A EST MONTE}} \; - \underbrace{m_B\, g\, d \sin\beta}_{\text{LE BLOC B EST DESCENDU !}}$

PAS DE FROTTEMENT !

CONSERVATION ENERGIE MECANIQUE

$$(m_A + m_B)\frac{v^2}{2} + m_A\, g\, d \sin\alpha - m_B\, g\, d \sin\beta = 0$$

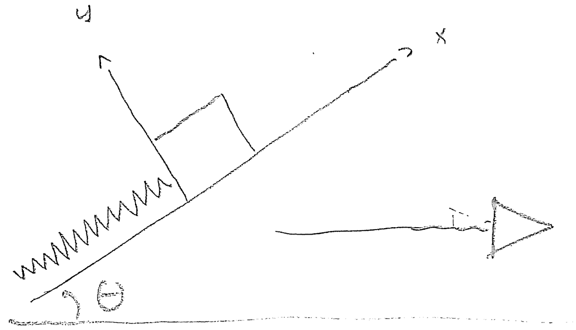
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2gd}{(m_A + m_B)}\left[m_B \sin\beta - m_A \sin\alpha\right]}}$$

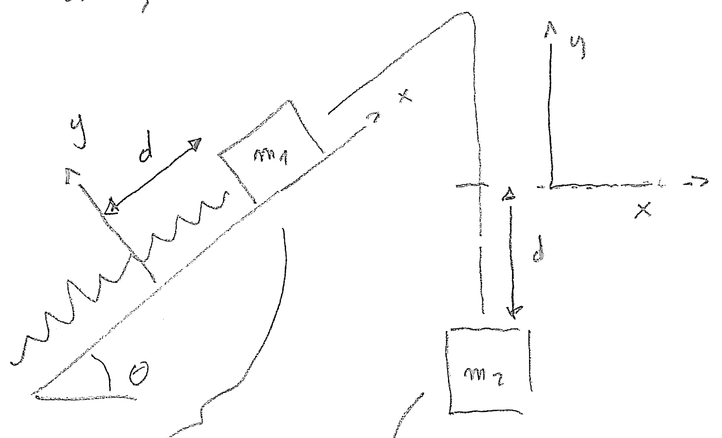
VALEURS NUMERIQUE

$$v = \underbrace{\sqrt{\frac{2 \times 9.81 \times 0.4}{9}\left(5 \sin(60°) - 4 \sin(30°)\right)}}_{1{,}43\ m/s}$$

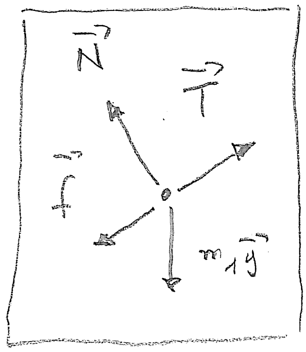
37

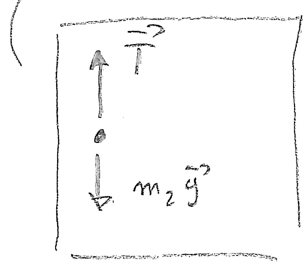
$d = 0{,}2\ m$





SYSTEME = ENSEMBLE DES 2 BLOCS





ETAT INITIAL

$U_g = 0$

$U_r = 0$

$K = 0$

ETAT FINAL

$$U_g = \underbrace{m_1 g d \sin\theta}_{\substack{\text{LA MASSE} \\ \text{EST MONTEE} \\ U_g \nearrow}} \; \underbrace{- m_2 g d}_{\substack{\text{LA MASSE} \\ \text{EST DESCENDUE} \\ U_g \searrow}}$$

$$U_r = \tfrac{1}{2} k d^2$$

$$K = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2$$

$$\Delta K + \Delta U = \underbrace{\vec{f} \cdot \vec{d}}_{-\mu_c m_1 g \cos\theta\, d}$$

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 + m_1 g d \sin\theta - m_2 g d + \tfrac{1}{2} k d^2 = -\mu_c m_1 g \cos\theta\, d$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2}{(m_1+m_2)} \left[m_1 g d (-\mu \cos\theta - \sin\theta) + m_2 g d - \tfrac{1}{2} k d^2 \right]}}$$

VALEUR NUMERIQUE

$v = 1{,}5\ m/s$