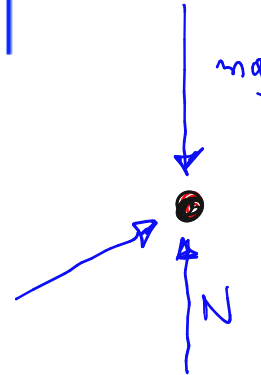
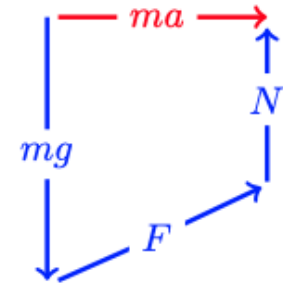
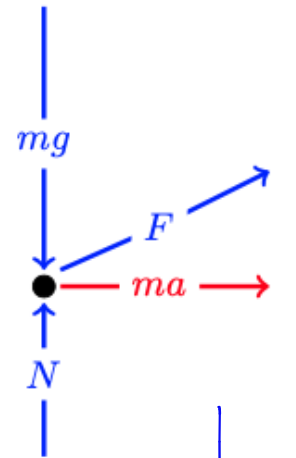
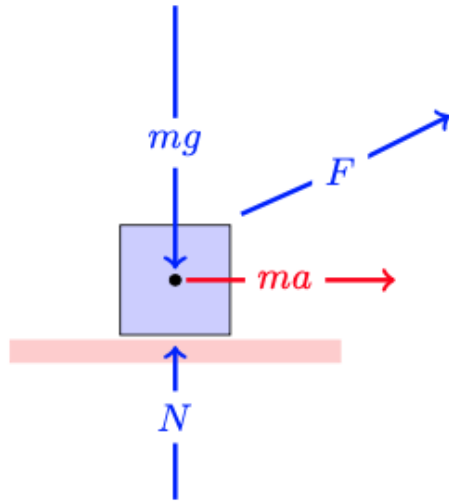


$$\begin{array}{c}
 \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = \sum \vec{F} \cdot \vec{v} \\
 \uparrow \\
 \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{F} \\
 \downarrow \\
 \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}
 \end{array}$$

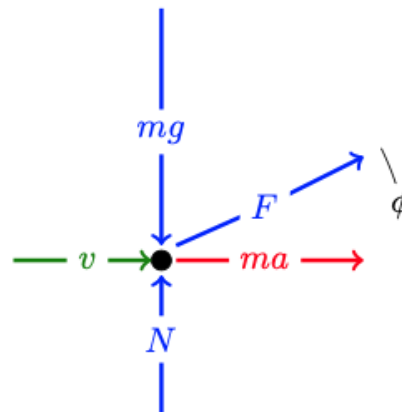
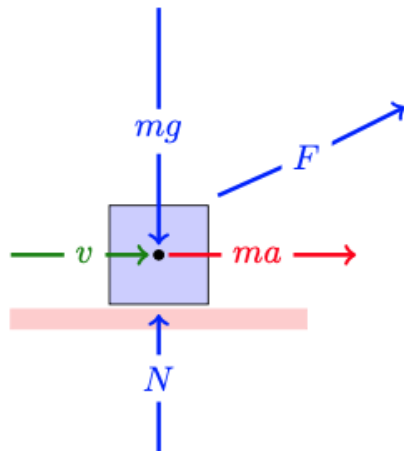
Deux
principes
corollaires...

$$\begin{array}{c}
 \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v} \\
 \uparrow \\
 \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{F} \\
 \downarrow \\
 \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \sum \vec{r} \times \vec{F}
 \end{array}$$



$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \sum \vec{F}$$

Bilan de quantité de mouvement



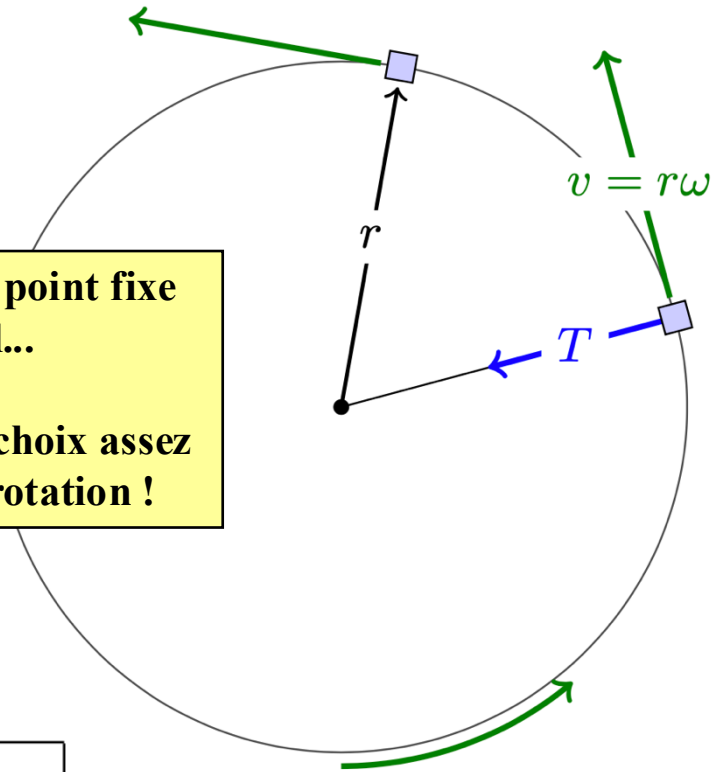
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2\right) &= \vec{v} \cdot m\vec{a} \\ 0 &= \vec{v} \cdot m\vec{g} \\ 0 &= \vec{v} \cdot \vec{N} \\ v F \cos \phi &= \vec{v} \cdot \vec{F}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Bilan d'énergie

On choisit un **vecteur** $\vec{r}$ qui relie un point fixe du repère galiléen au point matériel...

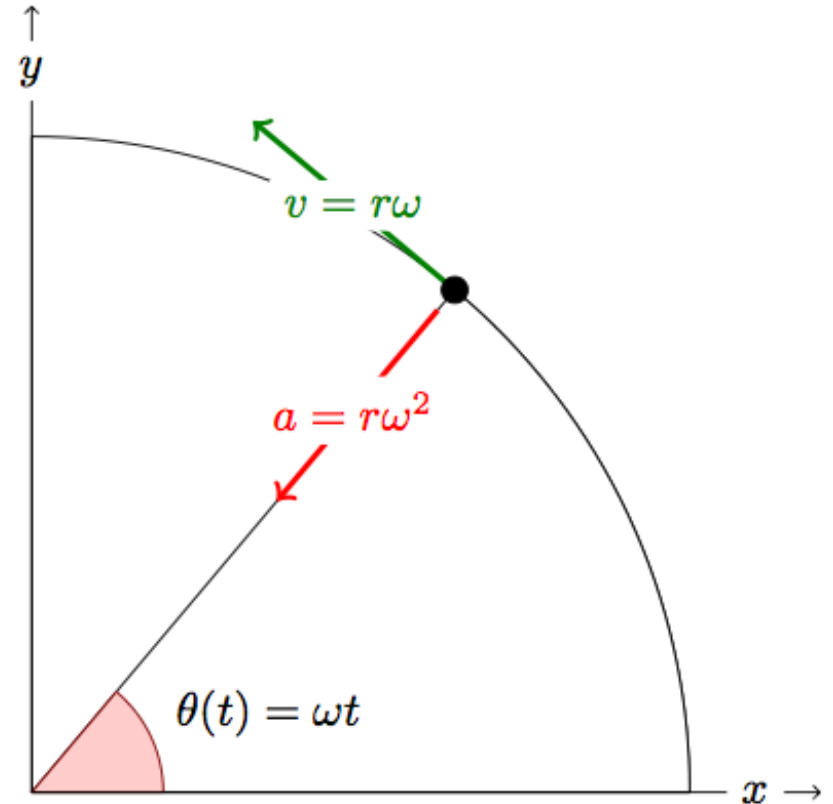
Dans un mouvement circulaire, un choix assez logique est de prendre le centre de rotation !



$$\frac{d}{dt} \left(\vec{r} \times m \vec{v} \right) = \sum \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{\tau}}$$

Bilan de moment cinétique

Accélération centripète



$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

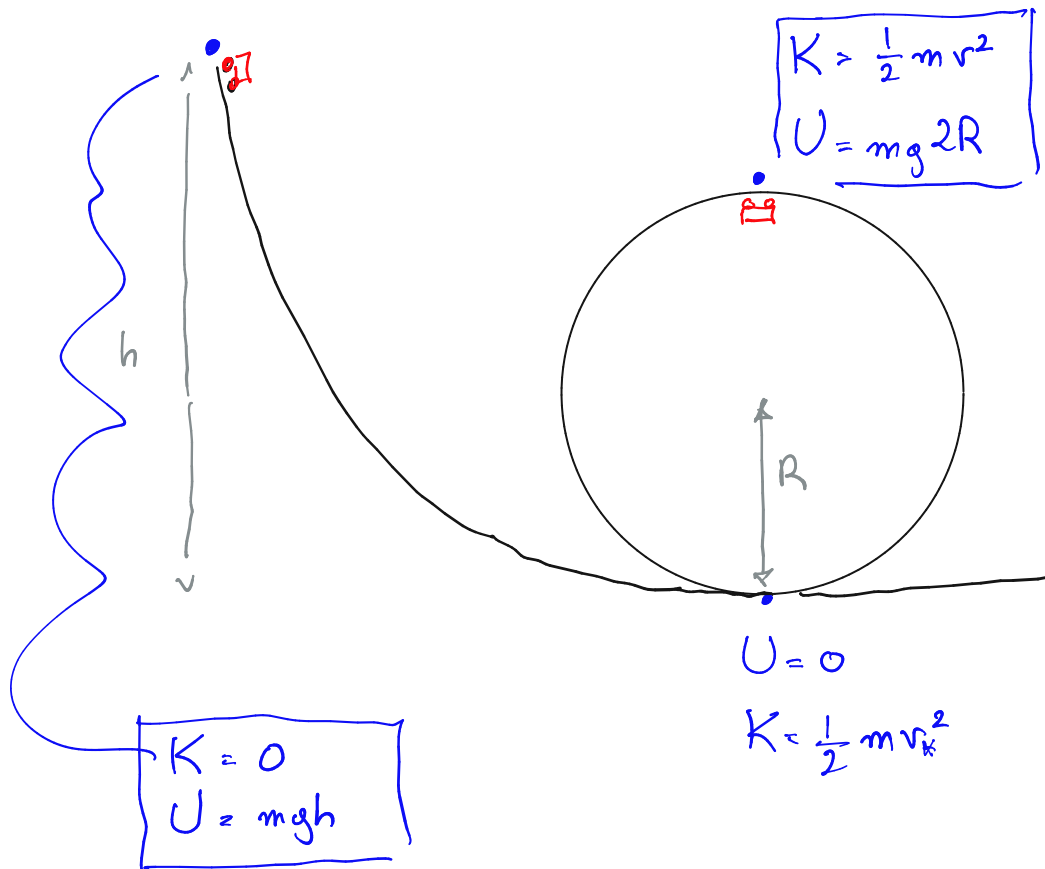
$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\omega^2 \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Vitesse
tangentielle



Exercice classique et pas tout-à-fait réaliste de tous les livres de physique



$$m a_c = mg$$

$$\frac{v^2}{R} \geq g$$

$$\frac{2g(h-2R)}{R} \geq g$$

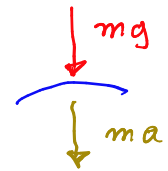
$$2h - 4R \geq R$$

$$2h \geq 5R$$

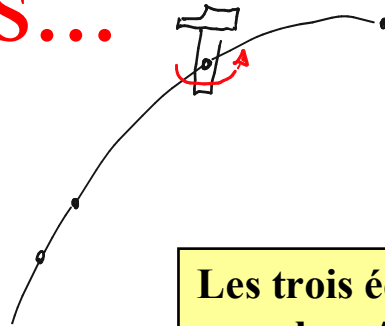
$$h \geq 5R/2$$

$$\cancel{m}gh = \cancel{m}g2R + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$2g(h-2R) = v^2$$



La mécanique d'un corps...



**Les trois équations fondamentales
pour la mécanique de solides indéformables !**

Bilan de la quantité de mouvement

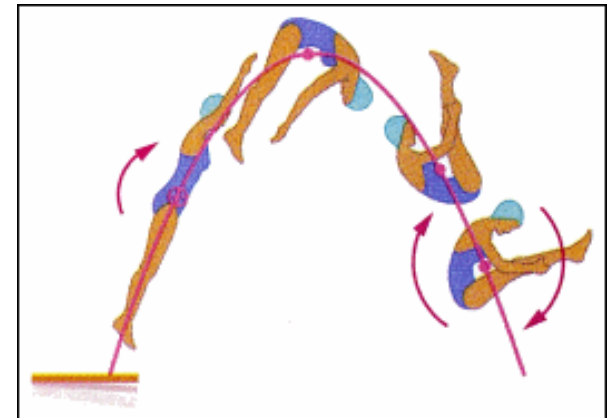
Bilan de l'énergie cinétique

Bilan du moment cinétique

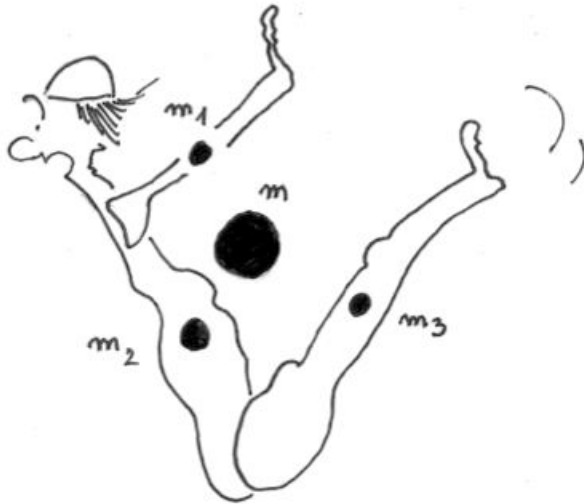
$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$



Le centre de masse...



La position d'une particule de masse plus importante doit compter davantage !

**Tronc-tête : 58% de la masse corporelle
Jambes : 32% de la masse corporelle
Bras : 10 % de la masse corporelle**

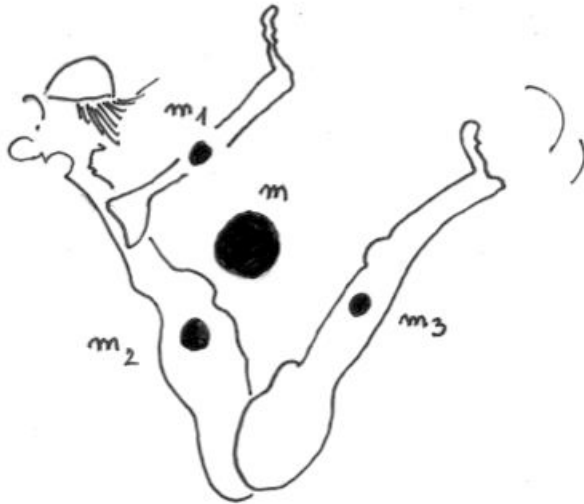
$$m = \sum m_i$$

$$m \vec{x} = \sum (m_i \vec{x}_i)$$

... est la position moyenne
pondérée des positions

La vitesse du centre de masse...

La vitesse d'une particule de masse plus importante doit compter davantage !

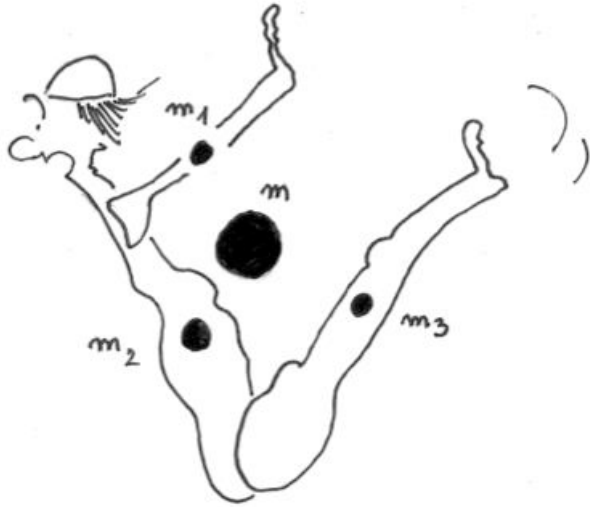


$$m = \sum m_i$$

$$m \vec{x} = \sum (m_i \vec{x}_i)$$

$$m \vec{v} = \sum (m_i \vec{v}_i)$$

... est aussi obtenue comme la
moyenne pondérée des vitesses



Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m \vec{x} = \sum (m_i \vec{x}_i)$$

$$m \vec{v} = \sum (m_i \vec{v}_i)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 \neq \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

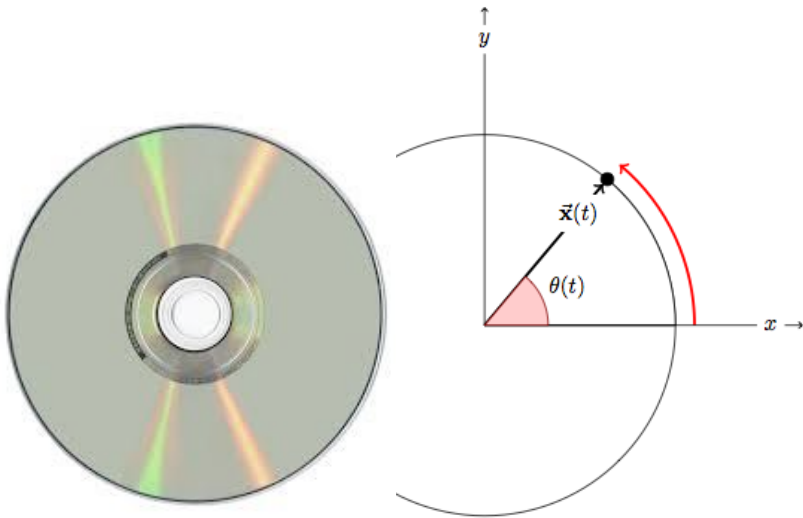
$$\vec{r} \times m \vec{v} \neq \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

Les deux dernières expressions ne sont pas égales en général !
Pour une translation pure d'un solide, on a deux égalités !

Pour l'énergie
et le moment cinétique,
c'est plus compliqué....

L'énergie cinétique...

**Le centre de masse ne bouge pas !
Mais, l'énergie cinétique n'est pas nulle !
Et ici, la symétrie est rompue !**



$$m = \sum m_i$$

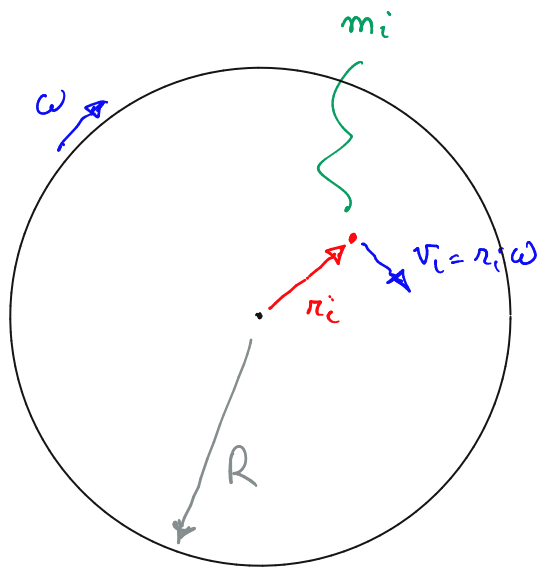
$$m \vec{x} = \sum (m_i \vec{x}_i)$$

$$m \vec{v} = \sum (m_i \vec{v}_i)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 \neq \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

... est aussi obtenue comme la
moyenne pondérée des énergies

Calcul de l'énergie cinétique d'un disque en rotation



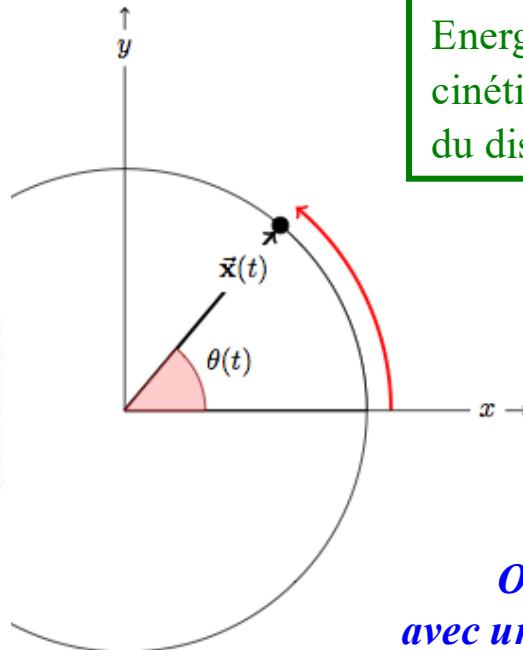
$$K = \frac{1}{2} \int m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \int \underbrace{m_i r_i^2}_{\triangleq I} \omega^2$$

$\triangleq I$
MOMENT
D'INERTIE

MOMENT
INERTIE

DISQUE	$m R^2$
CYLINDRE	$m R^2/2$

Et l'énergie cinétique de rotation d'un disque ?



$$\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum m_i r_i^2 \right)}_I \omega^2$$

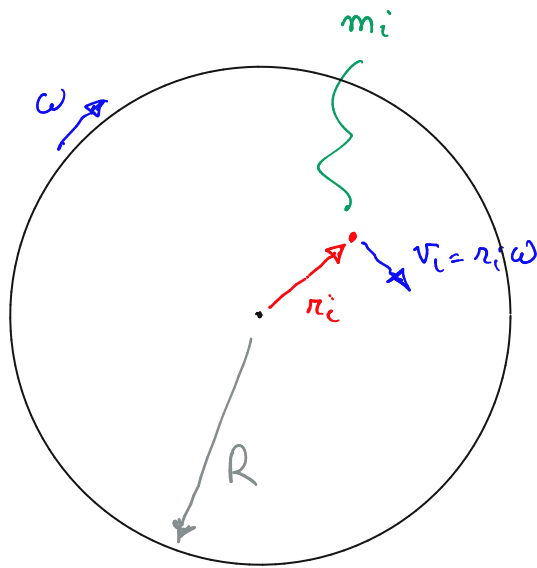
Energie
cinétique
du disque

Moment
d'inertie
du corps

*Et le centre de masse
ne bouge pas !*

*On peut donc avoir une énergie cinétique
avec un centre de masse totalement immobile !*

Calcul du moment cinétique d'un disque en rotation

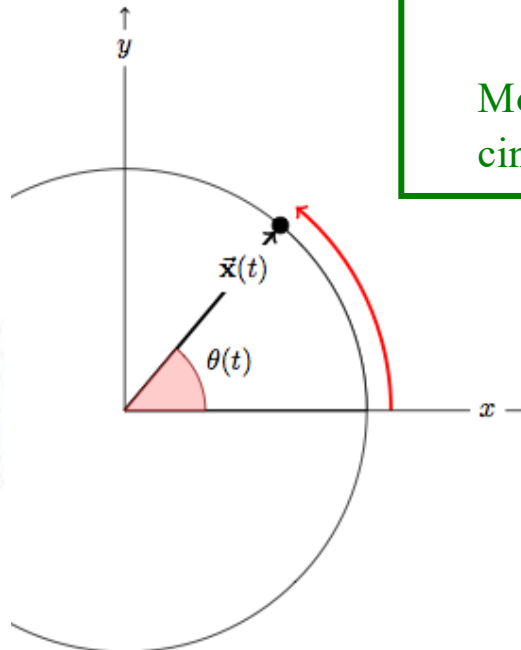


$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\sum \vec{r}_i}_{3D} \times \underbrace{m \vec{v}_i}_{3D} \right)$$

2D

$$\sum r_i m_i r_i \omega = \underbrace{\sum m_i r_i^2}_I \omega$$

Et le moment cinétique d'un disque ?



$$\sum r_i m_i v_i$$

Moment
cinétique

=

$$\underbrace{\left(\sum m_i r_i^2 \right)}_I \omega$$

Moment
d'inertie
du corps

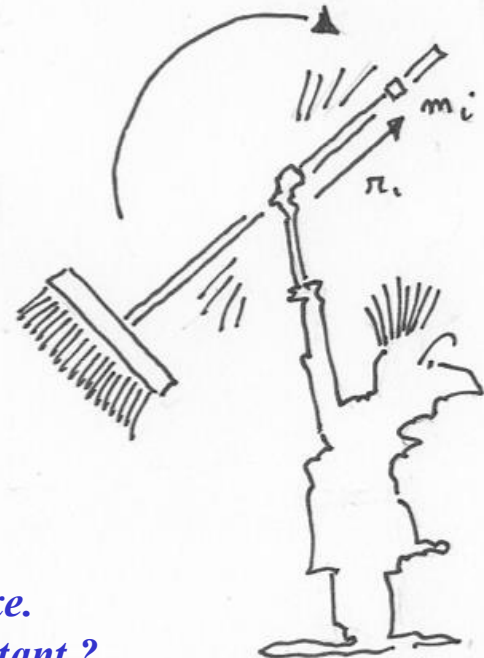
*Et le centre de masse
ne bouge pas !*

*Pas de quantité de mouvement !
Mais un moment cinétique non nul car le disque tourne !*

Qu'est ce qui influence le moment d'inertie ?

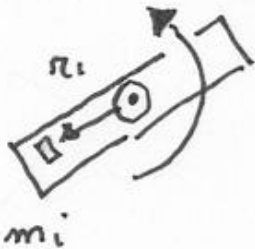
Le moment d'inertie dépend de :

- la **masse** du balai
- la **distribution de la masse** par rapport à l'axe de rotation



*On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?*

Et ceci est moins
fatigant et moins
spectaculaire !



*On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?*

$$I = 12.6 \text{ kg m}^2$$



Le moment d'inertie dépend de :

- la **masse** du plongeur
- la **distribution de la masse** par rapport à l'axe de rotation

$$I = 23.8 \text{ kg m}^2$$



$$I = 54.4 \text{ kg m}^2$$

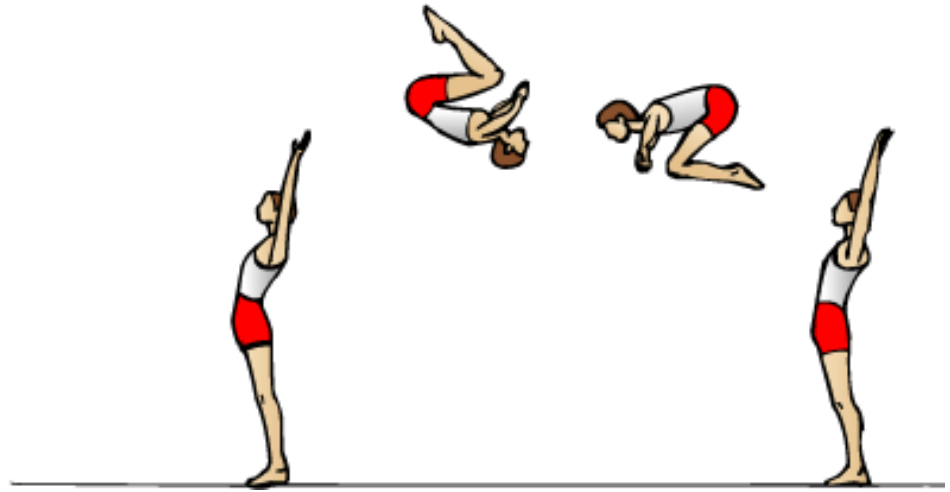


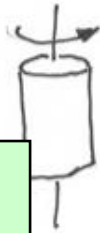
Moment d'inertie

$$I = \sum m_i r_i^2$$

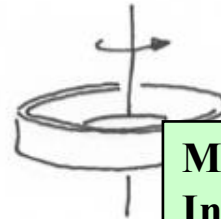
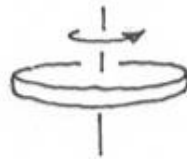
Moment d'inertie
du plongeur

Pourquoi est-ce que
la gymnaste se recroqueville
pour faire la pirouette ?





**Masse identique
Inertie minimale**



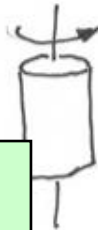
**Masse identique
Inertie maximale**

Cylindres, disques, anneaux...
Veaux, vaches, cochons !

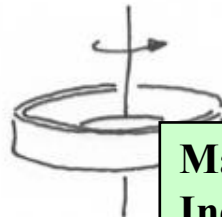
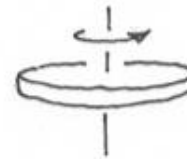
Une bibliothèque de moments d'inertie

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i r_i^2$$



**Masse identique
Inertie minimale**



**Masse identique
Inertie maximale**

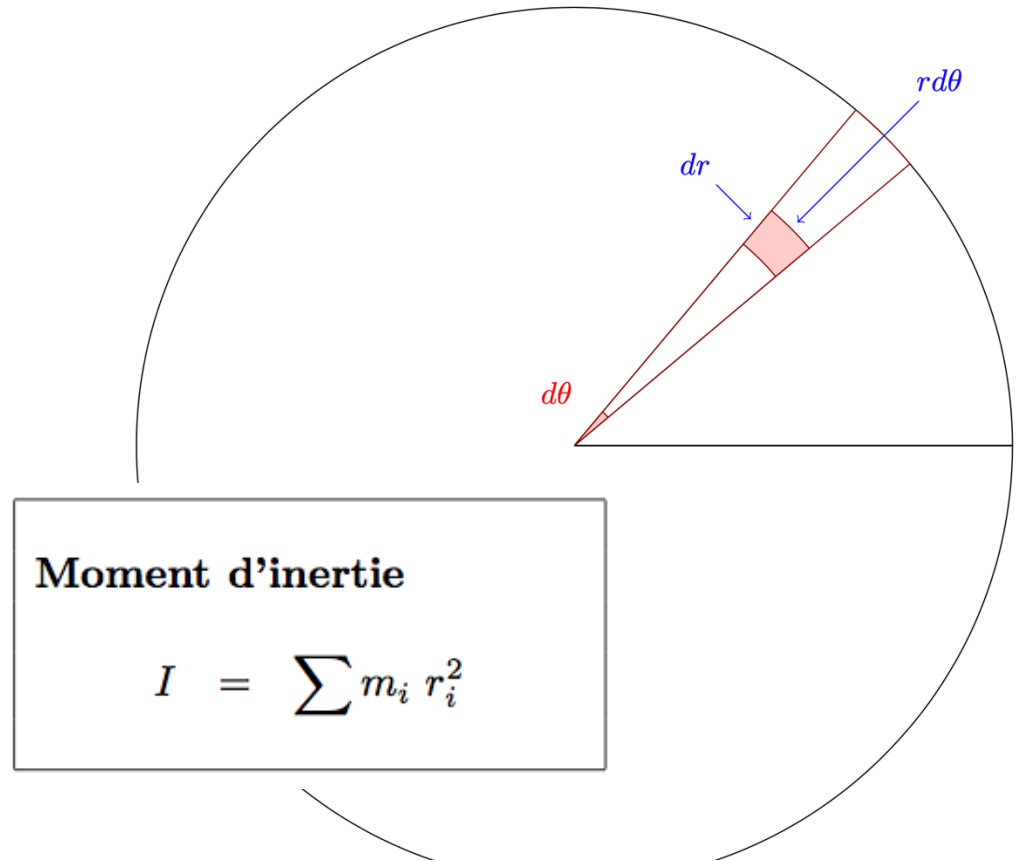
Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution $I = m R^2$

Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution $I = m \frac{R^2}{2}$

Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central $I = m \frac{L^2}{12}$

Intégration des moments d'inertie



Moment d'inertie

$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$m = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \overset{\substack{\text{MASSE} \\ \text{VOLUMIQUE} \quad \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}{\rho} dr r d\theta dz = 2\pi L \rho \int_0^R r dr = 2\pi L \rho \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \rho \pi L R^2$$

$$I = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho r^2 dr r d\theta dz = 2\pi L \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi L \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\rho \pi L R^4}{2} = \frac{m L R^2}{2}$$

Théorème de Huygens

Moment d'inertie quelconque



$$\begin{aligned} I_h &= \sum m_i (\vec{r}_i + \vec{h}) \cdot (\vec{r}_i + \vec{h}) \\ &= \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i}_{= I} + \underbrace{\sum m_i \vec{h} \cdot \vec{h}}_{= m h^2} + 2 \left(\underbrace{\sum m_i \vec{r}_i}_{= 0} \right) \cdot \vec{h} \end{aligned}$$

*En vertu de la définition
du centre de masse !*

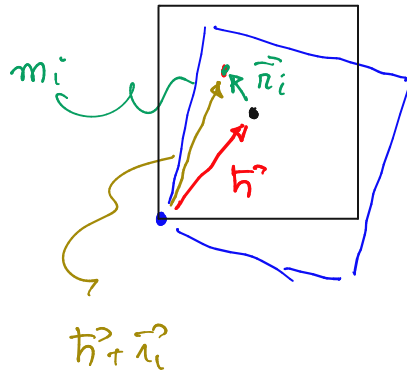
Une conséquence immédiate de ce théorème est qu'il est toujours moins coûteux (en énergie) de faire tourner un corps autour d'un axe passant par le centre de masse.

Théorème des axes parallèles

$$I_h = m h^2 + I$$



Théorème de Huygens ou des axes parallèles...



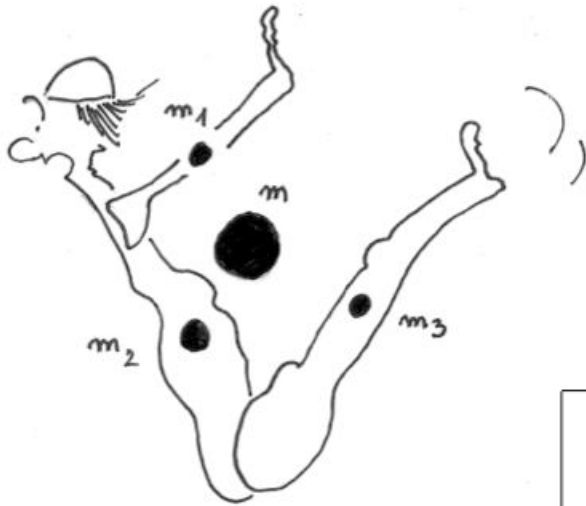
$$\vec{r}_i = \vec{x}_i - \vec{x}$$

$$\begin{aligned} I_h &= \sum_i m_i (\vec{h} + \vec{r}_i) \cdot (\vec{h} + \vec{r}_i) \\ &= \sum_i m_i \vec{h} \cdot \vec{h} + \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i \\ &\quad + 2 \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{h} \\ &= m h^2 + I \\ &\quad + 2 \left[\sum_i m_i \vec{x}_i - \sum_i m_i \vec{x} \right] \cdot \vec{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$m \vec{x} = \sum_i m_i \vec{x}_i$$



En conclusion !



Ensemble de particules : un corps !

$$m = \sum m_i$$

$$m \vec{x}(t) = \sum (m_i \vec{x}_i(t))$$

$$m \vec{v}(t) = \sum (m_i \vec{v}_i(t))$$

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

Forces

Moments

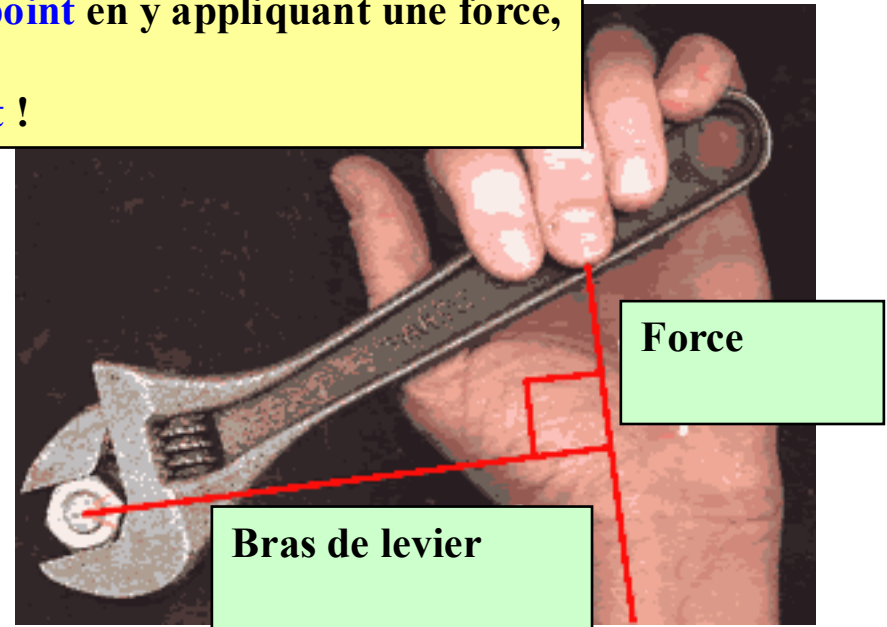
C'est quoi tout cela ?



**Le mouvement de chaque particule de la clé à molette est complexe
Mais, la vitesse du centre de masse est nulle...
On n'exercerait donc aucune force sur le centre de gravité ?**

Ce qui fait tourner la clé, c'est le moment !

Supposons que l'on fixe une barre en **un point** et que l'on souhaite la faire tourner autour **de ce point** en y appliquant une force, **l'accélération angulaire** sera proportionnelle **au moment de cette force** par rapport à **ce point** !



$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{bmatrix}$$



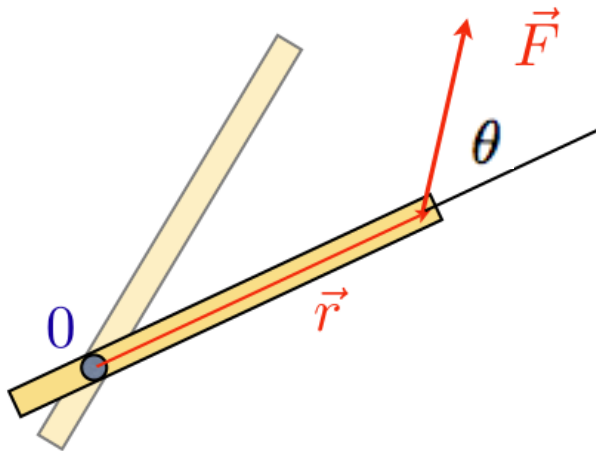
$$C = AB \sin(\theta)$$

Cross Product

Produit vectoriel de vecteurs

Attention ! $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
Le produit vectoriel n'est pas commutatif !

Et c'est quoi le moment d'une force par rapport à un point ?



Moment d'une force dans le plan

$$\underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{M}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

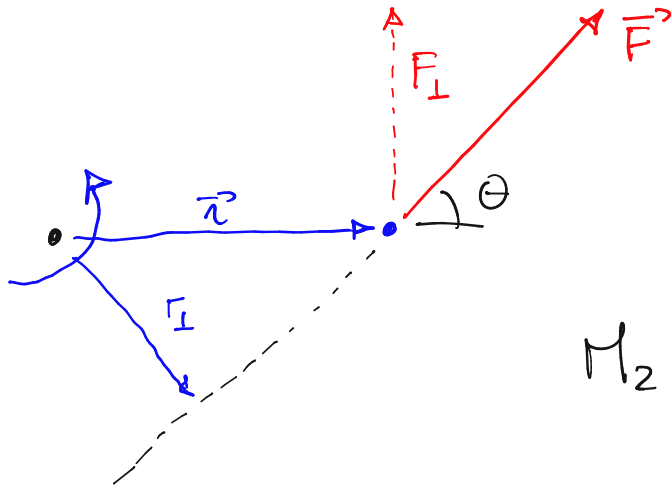
$$M = r_x F_y - r_y F_x = F r_{\perp} = F_{\perp} r = F r \sin(\theta)$$

Direction du moment = axe de rotation !

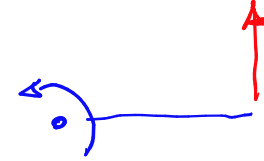
Norme de moment = proportionnel à l'accélération angulaire produite !

Signe de la composante M_z = sens de la rotation suivant la fameuse règle de la main droite !

Les 3 manières
de calculer
le moment d'une force !



$$\begin{aligned} M_z &= r_x F_y - r_y F_x \\ &= r_{\perp} F = r F_{\perp} = r F \sin \theta \end{aligned}$$



Accélération dans l'avant-bras due à la gravité



Quelle est l'accélération angulaire pour un angle quelconque ?

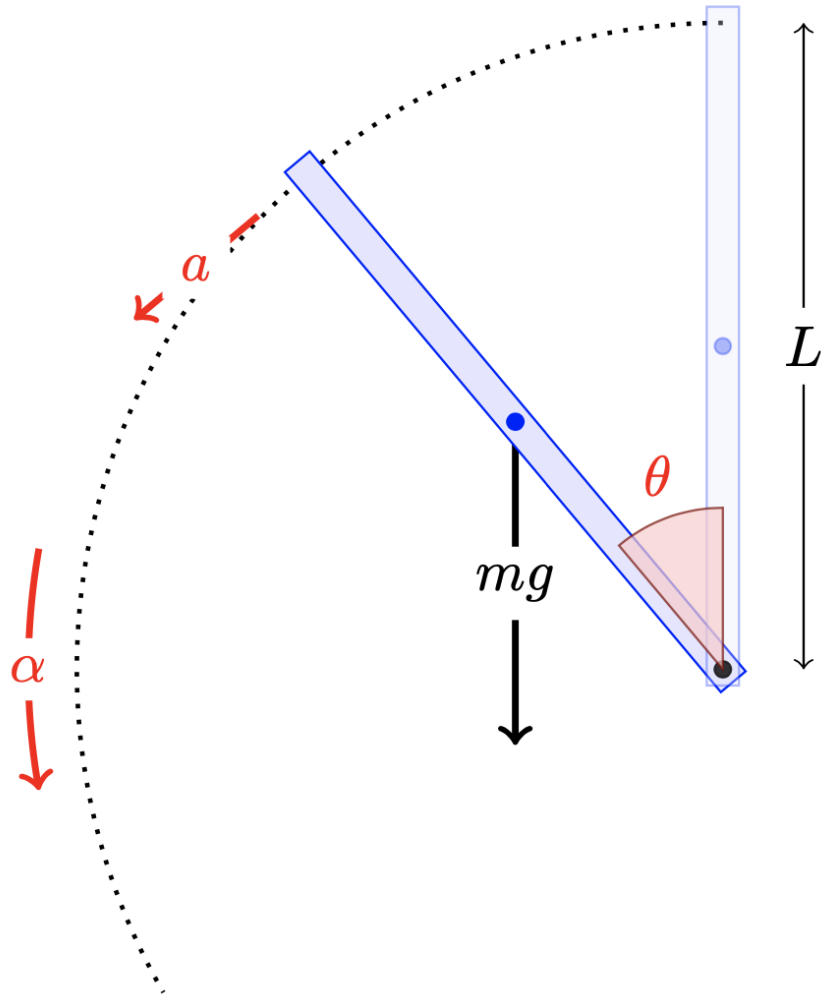
Quelle est l'accélération tangentielle lorsque l'avant-bras est horizontal ?

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

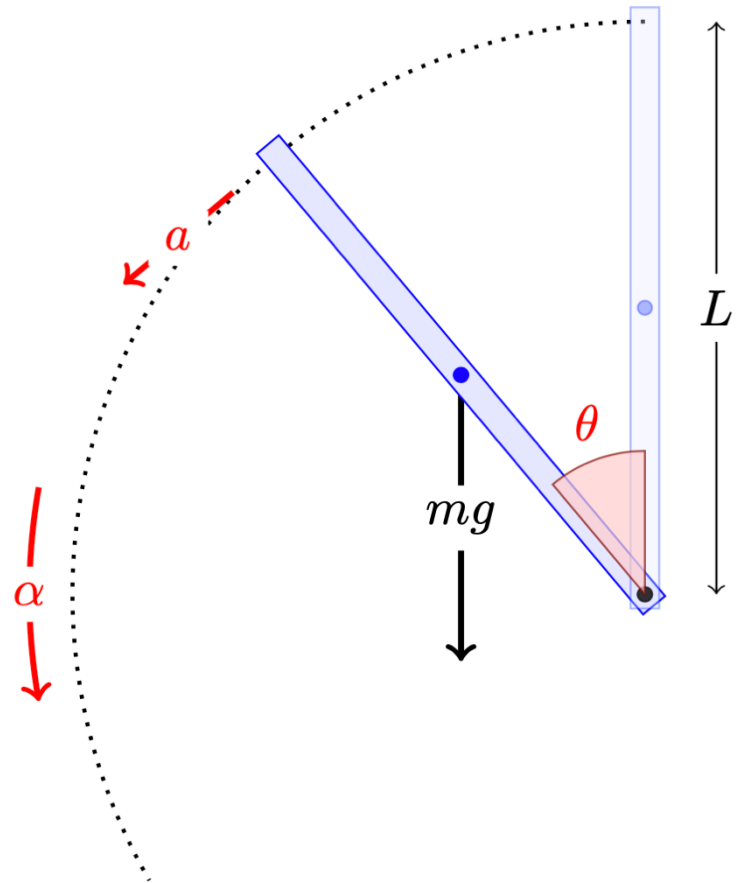
Baisser
le bras



$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$



Tout d'abord, calculer
le moment d'inertie du bras
autour de l'épaule !



$$\begin{aligned} I_h &= I + mh^2 \\ &= \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{(1+3)mL^2}{12} = \frac{4mL^2}{12} = \frac{mL^2}{3} \end{aligned}$$

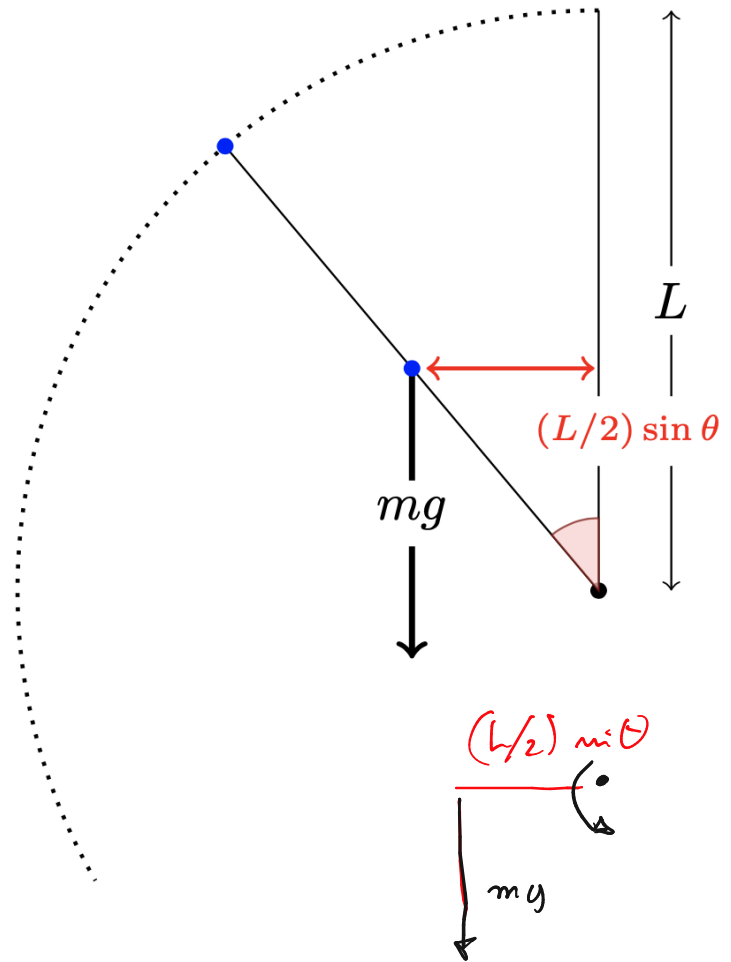


Ensuite calculer le moment de la force
et en déduire finalement
l'accélération de la main !

$$I_h \alpha = mg \frac{L}{2} \sin(\theta)$$

$$\frac{mL^2}{3} \frac{a}{L} = \frac{mgL}{2} \sin(\theta)$$

$$a = \frac{3}{2} g \sin(\theta)$$



La main a une accélération
supérieure
à celle de la chute libre !

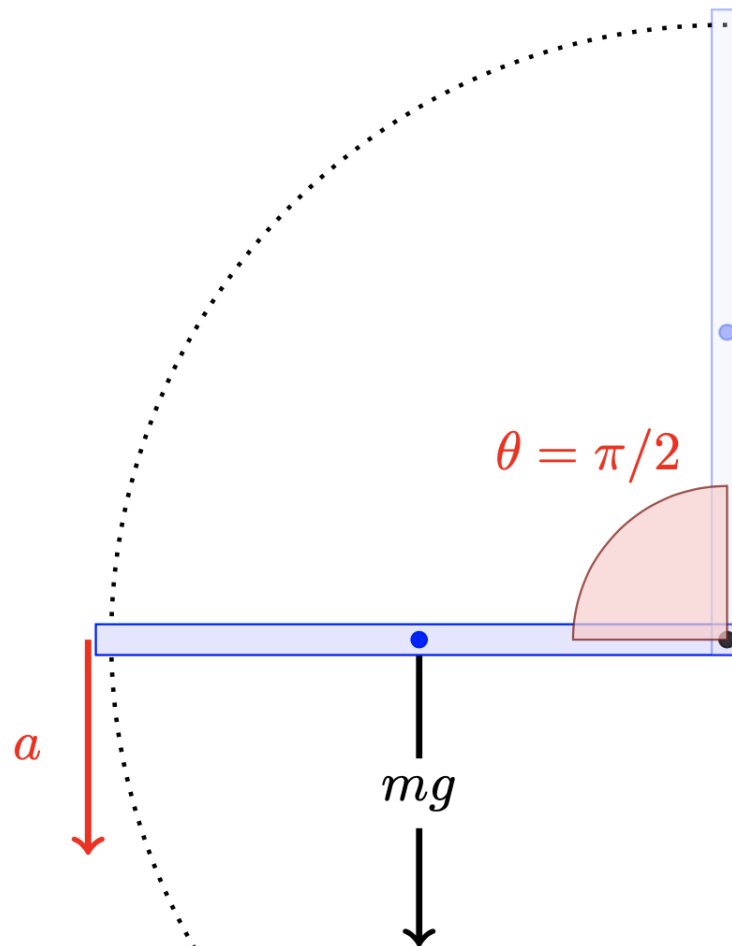
$$I_h \alpha = mg \frac{L}{2} \sin(\theta)$$
$$\frac{mL^2}{3} \frac{a}{L} = \frac{mgL}{2} \sin(\theta)$$

$$a = \frac{3}{2} g \sin(\theta)$$



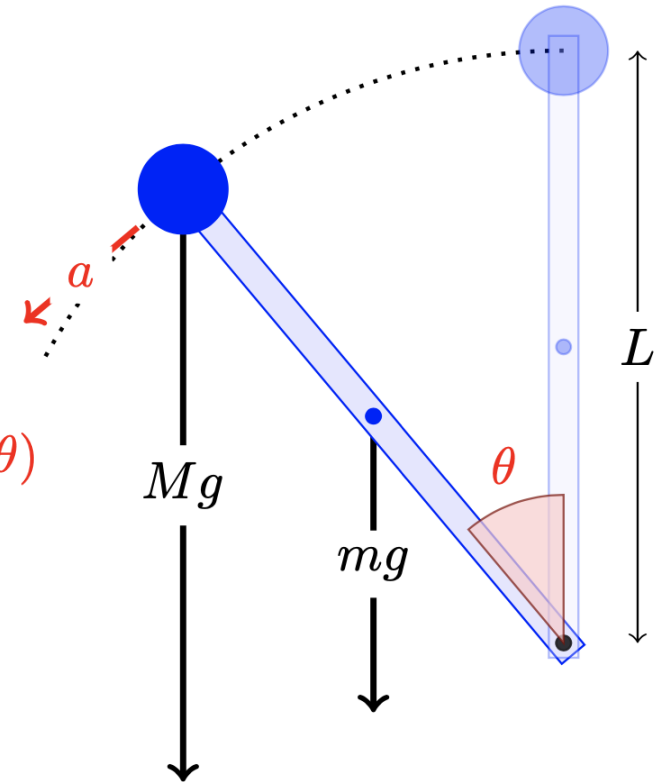
L'accélération est maximale lorsque $\theta = \pi/2$.

$$a = \frac{3}{2} g$$



Et avec le poids ?

$$I\alpha = mg \frac{L}{2} \sin(\theta) + Mg L \sin(\theta)$$
$$\left(M + \frac{m}{3}\right) L^2 \frac{a}{L} = \left(M + \frac{m}{2}\right) g L \sin(\theta)$$
$$a = \left(\frac{6M + 3m}{6M + 2m}\right) g \sin(\theta)$$



$$I = ML^2 + \frac{mL^2}{3}$$

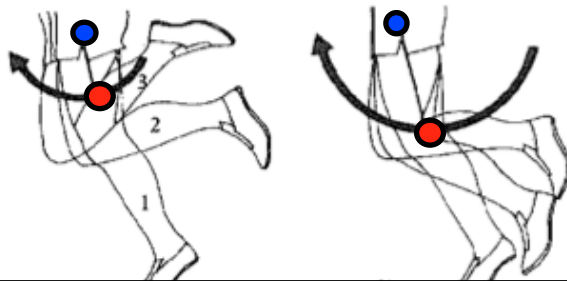
On tient compte de l'inertie du poids et du bras !



Moment d'inertie de la jambe par rapport à la hanche

Lors d'un sprint, le coureur va chercher à ramener ses jambes le plus rapidement possible en avant.

Il va attirer le talon vers le haut durant la phase d'oscillation.
Le moment d'inertie par rapport à la hanche est diminué.



Pour les courses de fond, le coureur va dépenser moins d'énergie à relever le talon.

Le moment d'inertie par rapport à la hanche reste plus grand.
La vitesse est évidemment aussi moins rapide !

Moments

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$



$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

Forces

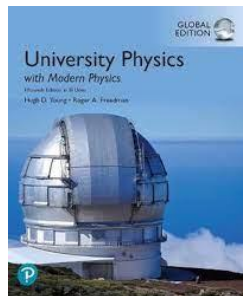
Résistance au
mouvement = masse

La cause :
la force !

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

La conséquence :
l'accélération !

Linear
Momentum



*Quelle est la voiture qui va accélérer
le plus vite pour la même force motrice ?*

Bilan
de la quantité
de mouvement

Résistance à la rotation
= moment d'inertie

La cause :
le moment de force !

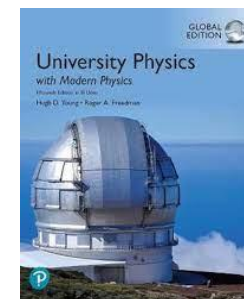
$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

La conséquence :
l'accélération angulaire !

Bilan
du moment
cinétique



*Que fait la danseuse
pour tourner plus vite
sur elle-même ?*



Angular
Momentum



- La **masse** mesure la résistance d'un corps à une **accélération** causée par une **force**.
- Le **moment d'inertie** mesure la résistance d'un corps à une **accélération angulaire** causée par un **moment de force**.

Ne pas
oublier !



$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

Equilibre de rotation

$$\cancel{\frac{d}{dt}(I\omega)} = \sum M_i$$



Etudions d'abord les forces et les moments de corps au repos !

Concept d'équilibre statique



$$\cancel{\frac{d}{dt}(m\vec{v})} = \sum \vec{F}_i$$

Equilibre de translation

Equilibre de rotation

$$0 = \sum M_i$$



Lorsque le corps ne bouge pas, son accélération angulaire est nulle pour n'importe quel point !

Dans ce cas, on peut donc calculer les moments de force par rapport à n'importe quel point alors !



$$0 = \sum \vec{F}_i$$

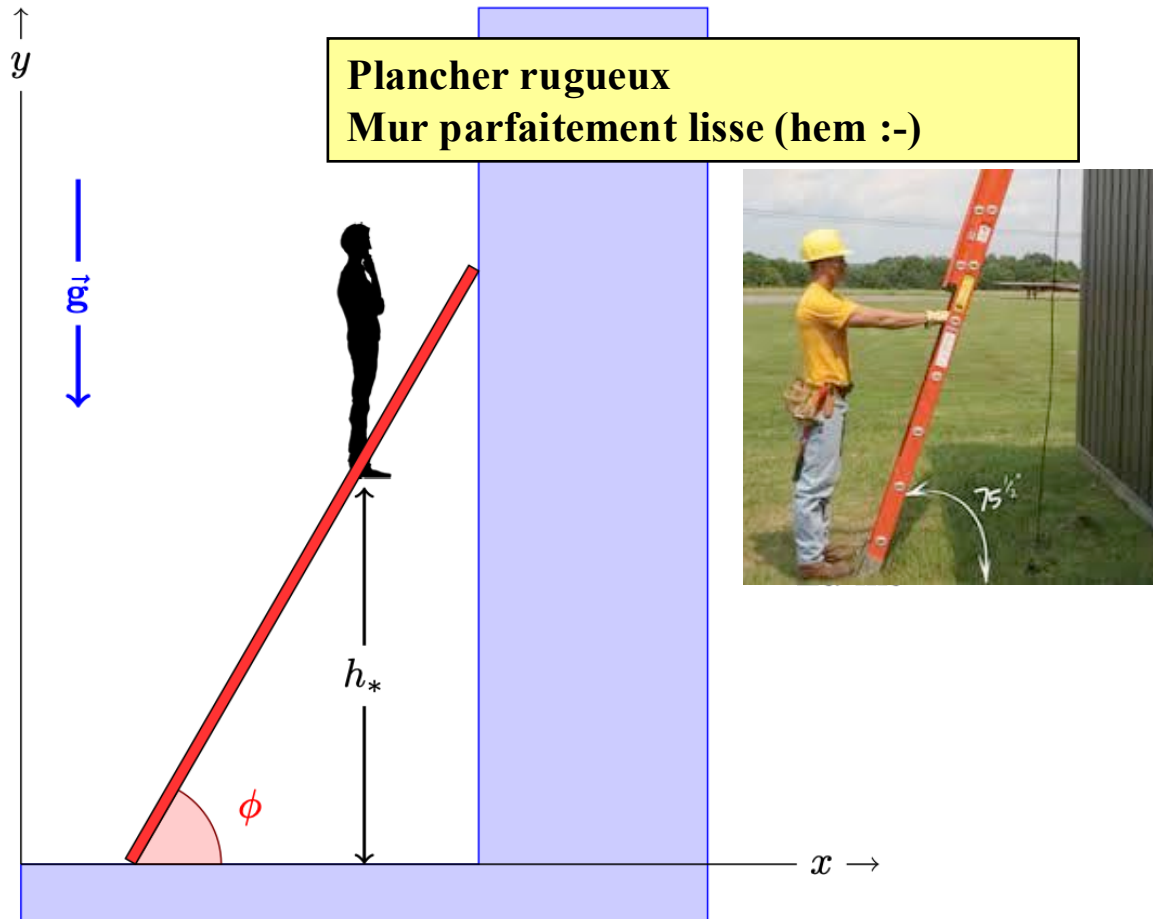
Equilibre de translation

Est-ce que
l'échelle
va glisser ?

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

$$0 = \sum M_i$$



Est-ce que
l'échelle
va glisser ?

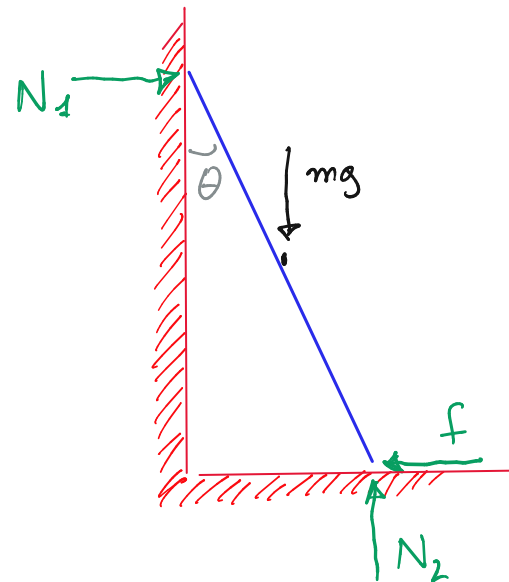


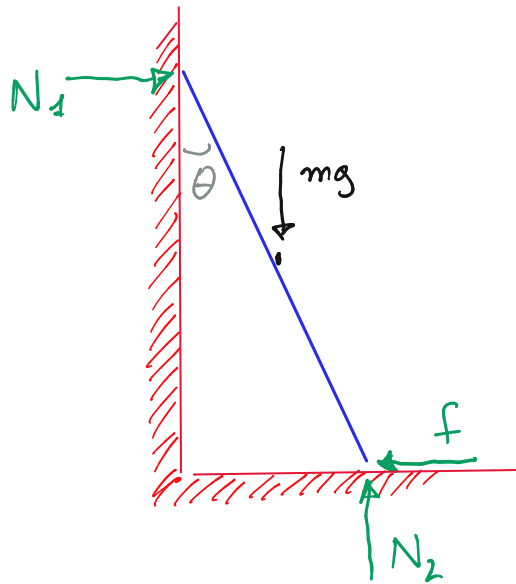
Plancher rugueux
Mur parfaitement lisse (hem :-)

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{F}_i$$

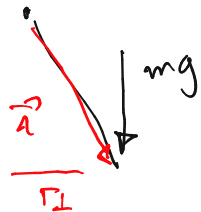
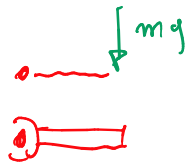
$$0 = \sum M_i$$



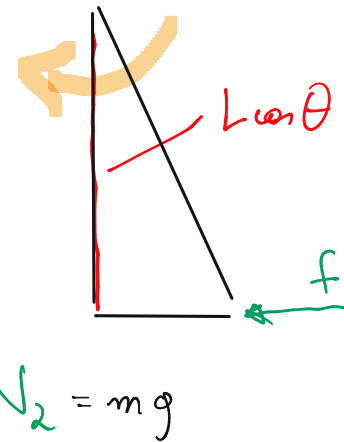
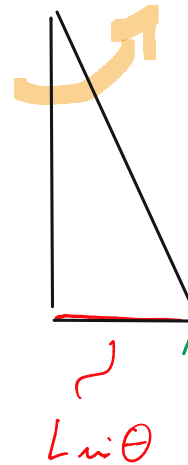
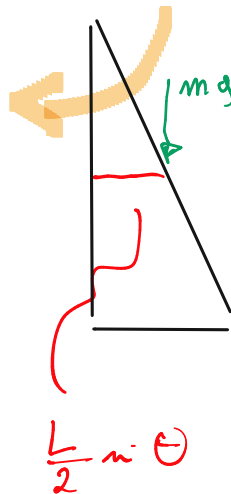
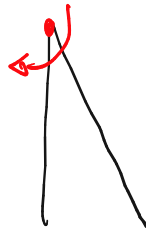


$$N_2 = mg$$

$$N_1 = f$$



$$\vec{r} \times m\vec{g} = r_{\perp} mg$$



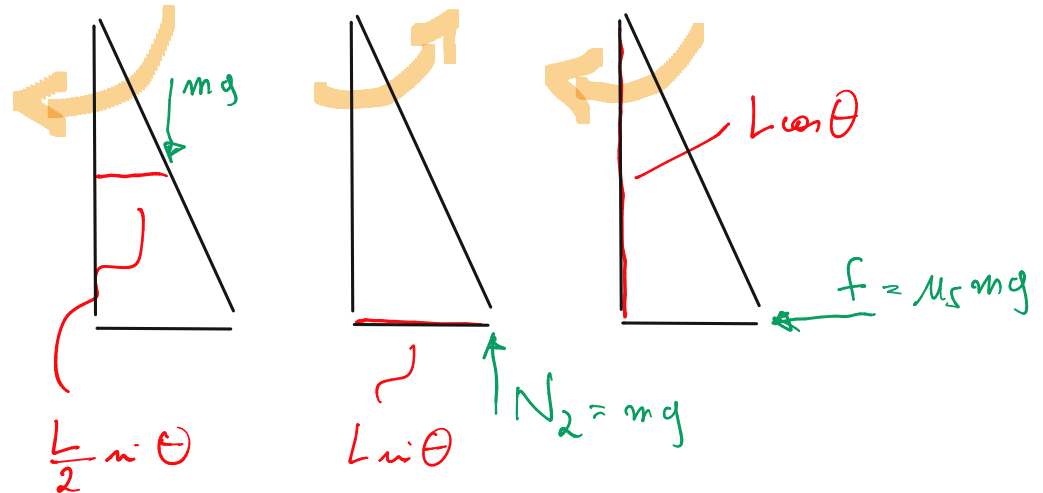
Trois équations !
Trois inconnues !

Par contre, pour un échelle totalement rigide, le problème est mal posé si il y a du frottement sur le sol et sur le mur !

C'est pas toujours aussi simple qu'il n'y paraît !



$$f = \mu_s mg$$



$$\cancel{mg} \cancel{\frac{L}{2}} \sin \theta + \cancel{L} \cos \theta \underbrace{\cancel{\mu} \cancel{mg}}_f = \cancel{L} \sin \theta \cancel{mg}$$

Trois équations !
Trois inconnues !



$$\cancel{mg} \cancel{\frac{L}{2}} \sin \theta + \cancel{L} \cos \theta \underbrace{\mu \cancel{mg}}_f = \cancel{L} \sin \theta \cancel{mg}$$

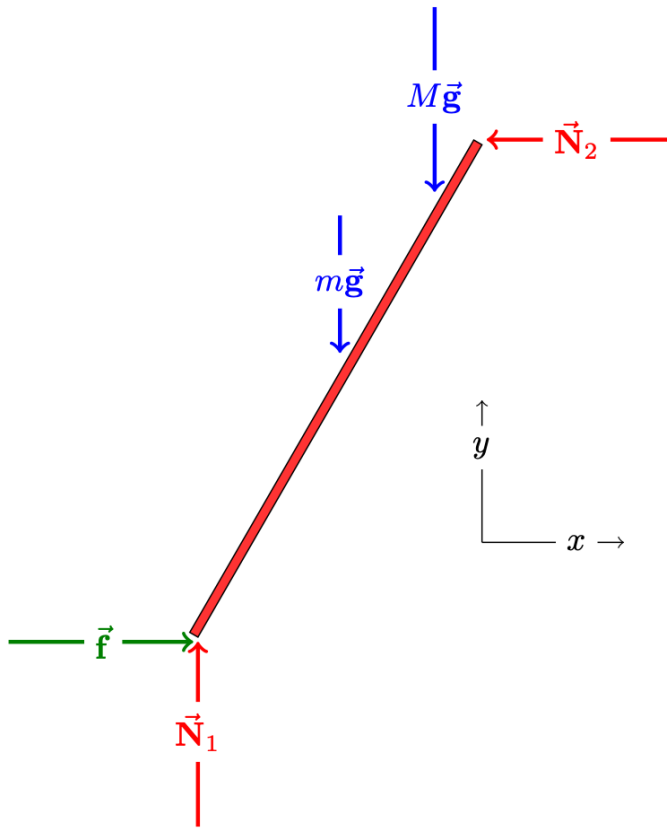
$$2\mu_s \cos \theta = \sin \theta$$

$$\mu_s = \frac{\tan \theta}{2}$$

Calcul de l'angle critique !
C'est l'angle où le frottement est maximal !

Par contre, pour une échelle totalement rigide, le problème est mal posé si il y a du frottement sur le sol et sur le mur !

Ce n'est pas toujours aussi simple qu'il n'y paraît !



- Poids de l'échelle : $m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$
- Poids de l'ouvrier : $M\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$
- Force de réaction normale du sol : $\vec{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ (m+M)g \end{bmatrix}$
- Force de frottement au sol : $\vec{f} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(m+M)g \\ 0 \end{bmatrix}$
- Force de réaction normale du mur : $\vec{N}_2 = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix}$

Trois équations !
Trois inconnues !



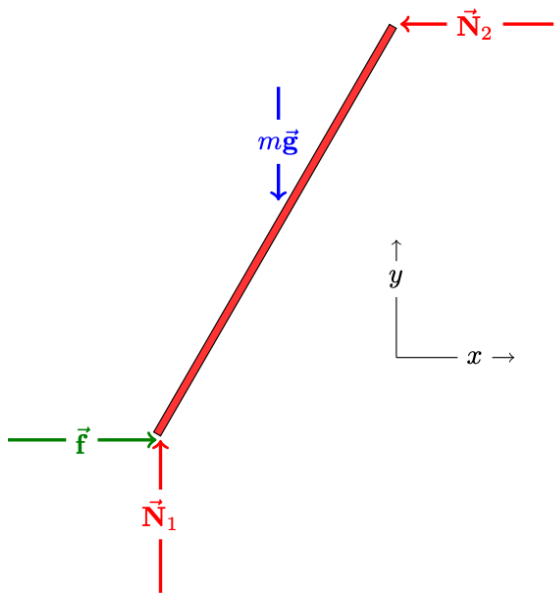
$$0 = \mu_s mg - N_2$$

$$0 = N_2 L \sin(\phi) - mg \frac{L}{2} \cos(\phi)$$



$$\mu_* mg L \underbrace{\sin(\phi)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = mg \frac{L}{2} \underbrace{\cos(\phi)}_{\frac{1}{2}}$$

Echelle = 10 kg et 3 mètres
 Angle de 60 degrés
 Coefficient de frottement statique 0.5
 Coefficient de frottement cinétique 0.1
 Accélération de la gravité = 10 m/s²



$$\mu_* = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.29 < \mu_s$$

Tout d'abord, est-ce que
 l'échelle sans l'ouvrier
 va glisser ?

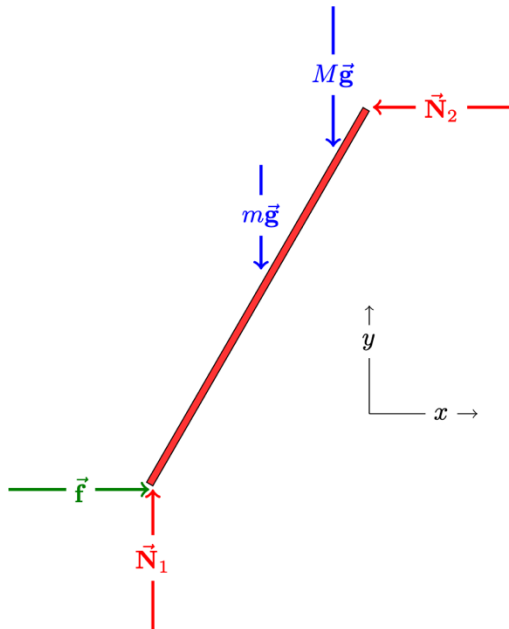


Ouvrier avec sacoche = 120 kg
 Echelle = 10 kg et 3 mètres
 Angle de 60 degrés
 Coefficient de frottement statique 0.5
 Accélération de la gravité = 10 m/s²

$$\mu_s(m + M)gL \sin(\phi) = mg \frac{L}{2} \cos(\phi) + Mg \frac{h_*}{\sin(\phi)} \cos(\phi)$$



$$L \frac{\mu_s(m + M)6 - m\sqrt{3}}{4M} = h_*$$



$$h_* = \frac{390 - 10\sqrt{3}}{160} = 2.33 \text{ m}$$

Quelle hauteur l'ouvrier peut atteindre
 avant que l'échelle ne glisse ?

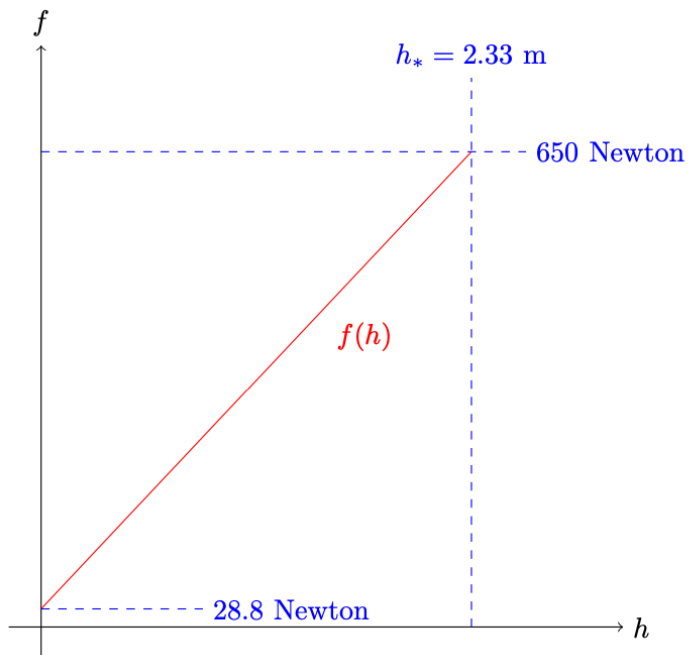
$$f(h) L \sin(\phi) = mg \frac{L}{2} \cos(\phi) + Mg \frac{h}{\sin(\phi)} \cos(\phi)$$

$$\downarrow$$

$$f(h) = \underbrace{\frac{mg \cos(\phi)}{2 \sin(\phi)}}_{28.8675} + h \underbrace{\frac{Mg \cos(\phi)}{L \sin^2(\phi)}}_{266.6667}$$



Ouvrier avec sacoche = 120 kg
 Echelle = 10 kg et 3 mètres
 Angle de 60 degrés
 Coefficient de frottement statique 0.5
 Accélération de la gravité = 10 m/s²



Evolution de la force de frottement en
 fonction de la hauteur de l'ouvrier



- Le moment est le produit du bras de levier par la force.
- L'énergie cinétique d'un corps est la somme de l'énergie du mouvement du centre de masse et de l'énergie de la rotation du corps autour de ce point.
- Pour la rotation d'un corps autour de son centre de masse, les **moments de force**, le **moment cinétique** et le **moment d'inertie** du corps sont l'équivalent des **forces**, de la **quantité de mouvement** et de la **masse** pour le mouvement de ce point !
- Un corps est à l'équilibre si la somme des forces et des moments est nulle : c'est l'équilibre statique.

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \sum \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I \omega^2\right) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt}(I \omega) = \sum M_i$$

Ne pas
oublier !

Le MRUA :-)

$$y''(t) = a$$

$$y'(t) = \overbrace{v_0 + a t}^{v(t)}$$

$$y(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2}$$



**Des millions de gens ont vu tomber une pomme,
Newton est le seul qui se soit demandé pourquoi...
(Bernard Baruch)**

Le MCUA :-)

$$\theta''(t) = \alpha$$

$$\theta'(t) = \overbrace{\omega_0 + \alpha t}^{\omega(t)}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

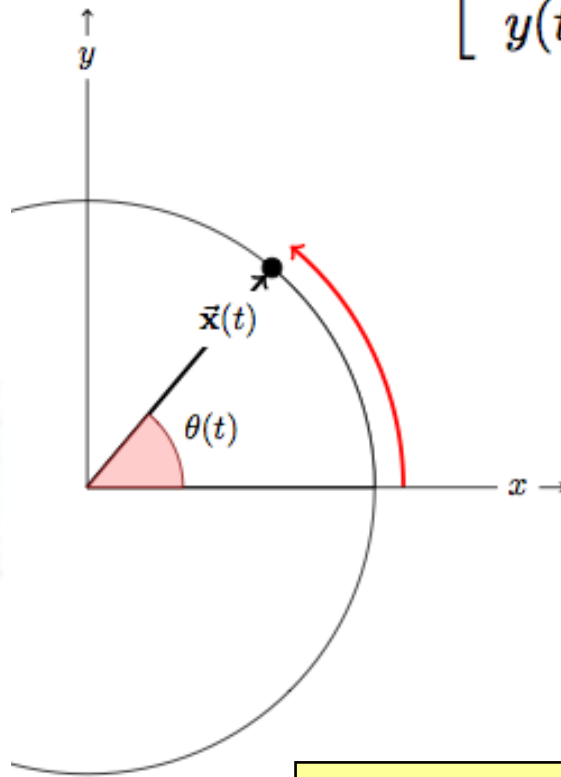


Maintenant, faisons strictement et exactement la même chose avec un mouvement circulaire !

Définissons le MCUA !

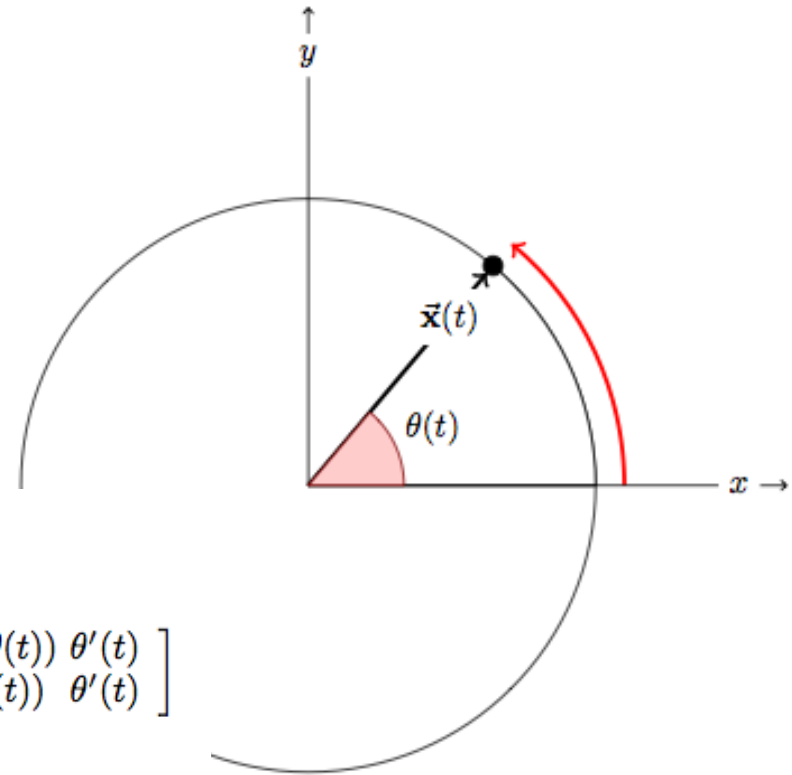
Le MCUA :-)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta(t)) \\ r \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$



Mouvement circulaire non-uniforme...
Vitesse angulaire non-constante
Accélération angulaire constante

Calculons la vitesse et l'accélération !



$$\vec{v}(t) = r \omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = r\omega'(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) & \theta'(t) \\ -\sin(\theta(t)) & \theta'(t) \end{bmatrix}$$



$$= r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

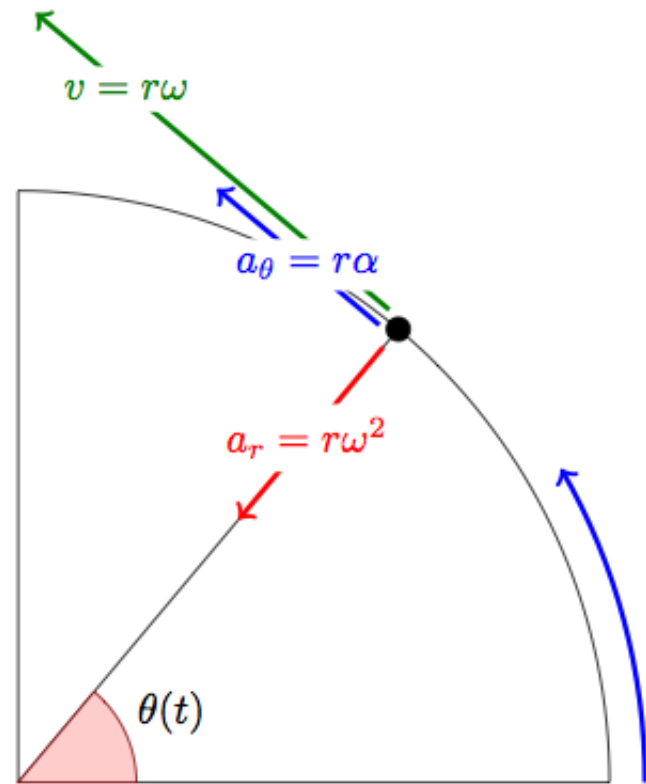
La vitesse est toujours bien tangente au mouvement !
Mais son module est désormais variable
car la vitesse angulaire n'est pas constante !

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = r\omega(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = r\alpha \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + r\omega^2(t) \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

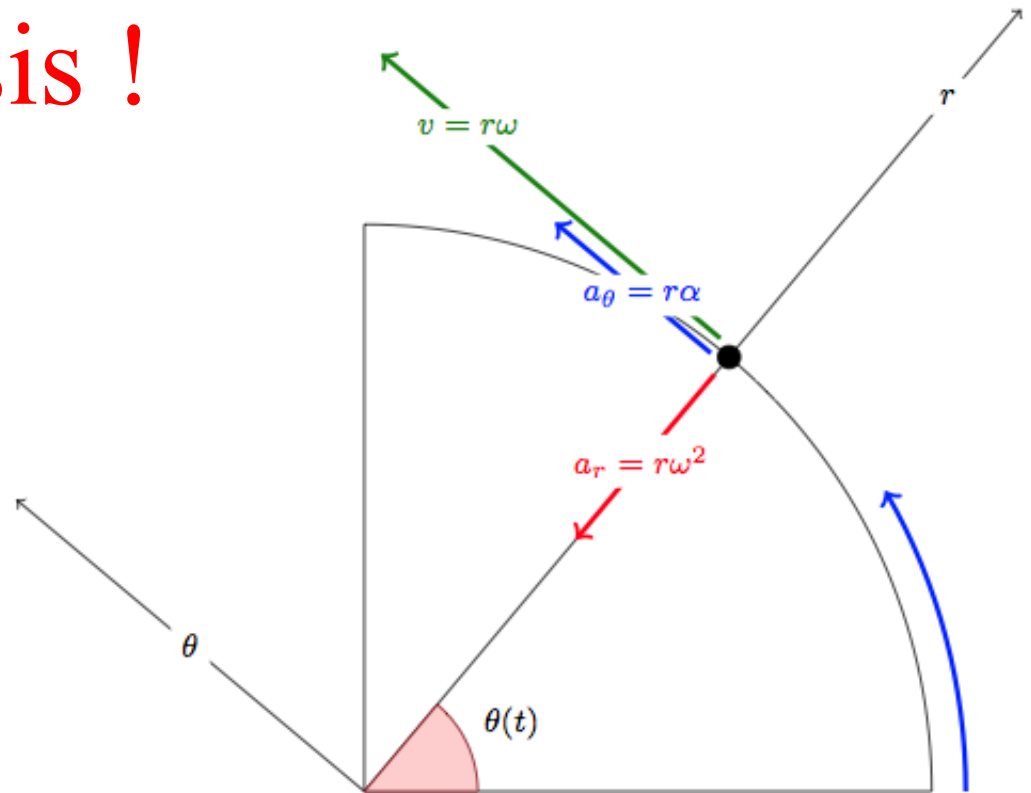
Accélération
tangentielle



Accélération
centripète

Avec des
axes bien choisis !

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix} \\ \vec{a}(t) &= \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \\ r\alpha \end{bmatrix}\end{aligned}$$



Vitesse : $v = r\omega$ [m/s]

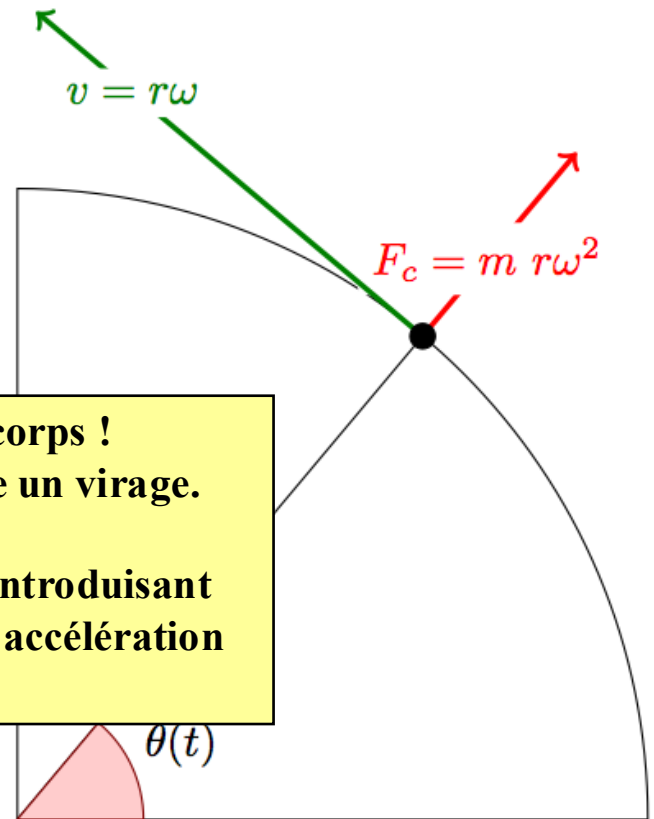
Accélération : $a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2}$ [m/s²]

Vitesse angulaire ω [radians/s] et accélération angulaire α [radians/s²]



**On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.**

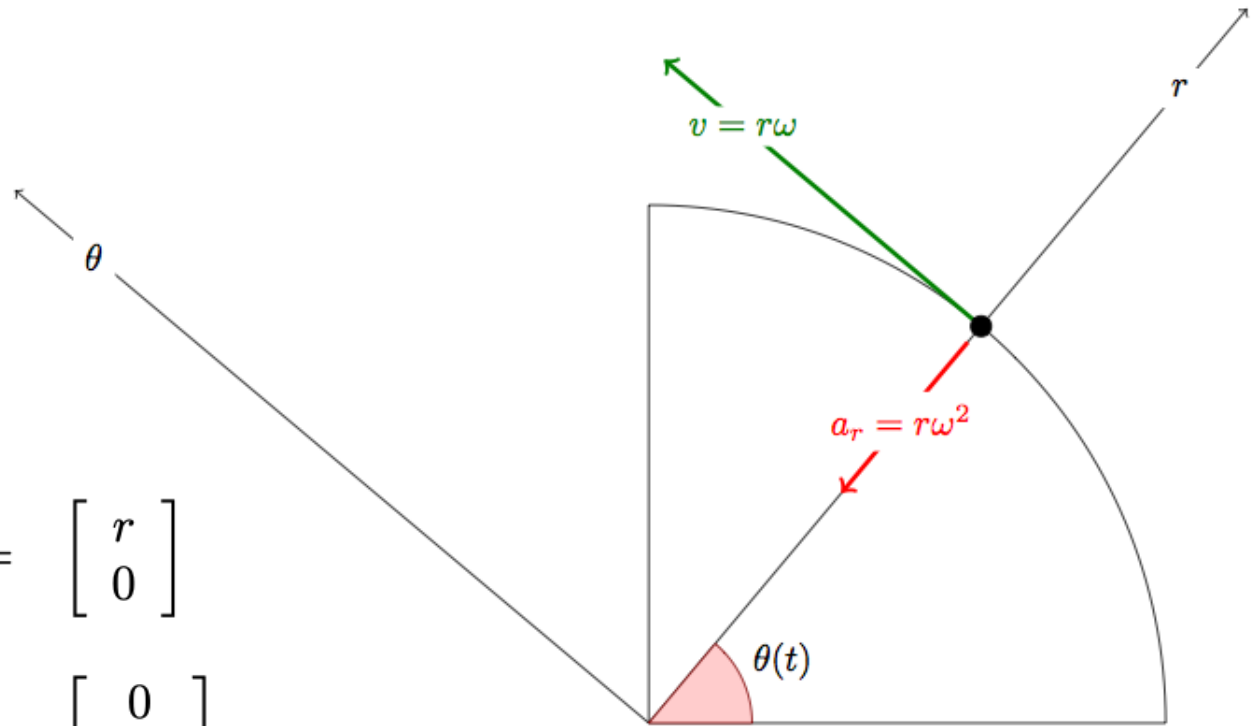
Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant une pseudo-force centrifuge qui aura le même effet que l'accélération centripète qu'on obtient dans un repère fixe !



**Remplacer
l'accélération centripète
par la pseudo-force centrifuge !**

$$\vec{\mathbf{x}}(t) : \begin{bmatrix} x_r \\ x_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) : \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \end{bmatrix}$$



La vitesse
est-elle toujours
la dérivée de la position ?

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = r \vec{\mathbf{e}}_r(t)$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}(t) = r \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_r}{dt}(t)}_{\omega \vec{\mathbf{e}}_\theta(t)}$$

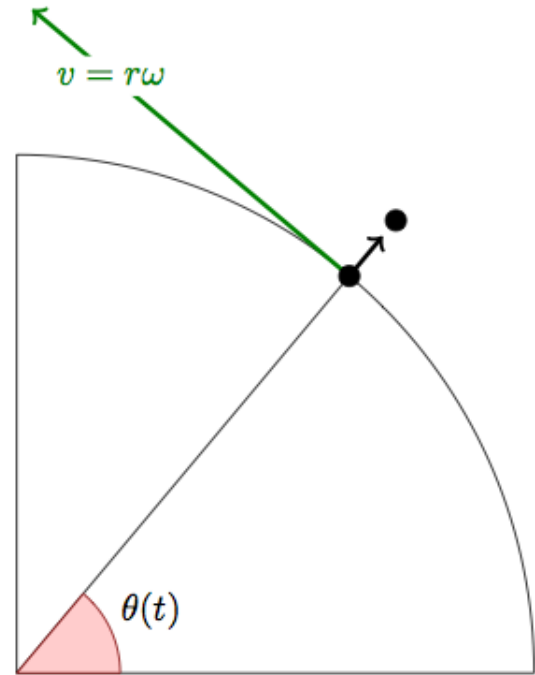
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}(t) = r \omega \underbrace{\frac{d\vec{\mathbf{e}}_\theta}{dt}(t)}_{-\omega \vec{\mathbf{e}}_r(t)}$$

Oui, oui, oui !

La vitesse est bien

la dérivée de la position !

$$\vec{x}(t) = r(t) \vec{e}_r(t)$$



Et si on bouge
radialement
sur un plateau
qui tourne ?



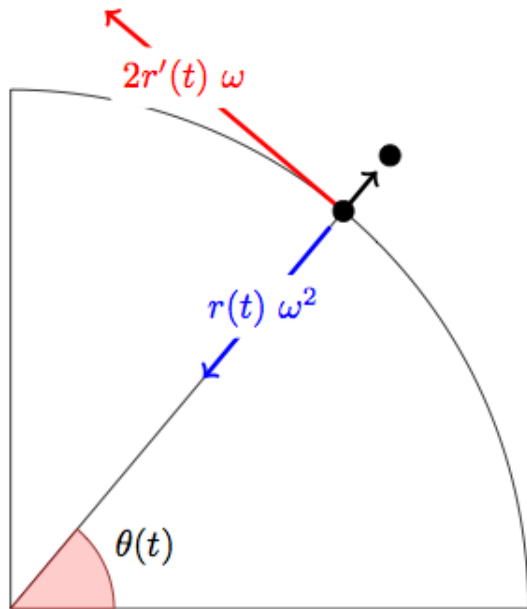
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}(t) = r'(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}(t)}_{\omega \vec{e}_\theta(t)}$$

Avec un peu d'algèbre
un brin fastidieuse...

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) &= r''(t) \vec{e}_r(t) + r'(t) \underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}(t)}_{\omega \vec{e}_\theta(t)} + r'(t) \omega \vec{e}_\theta(t) + r(t) \omega \underbrace{\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}(t)}_{-\omega \vec{e}_r(t)} \\ &\downarrow \\ &= r''(t) \vec{e}_r(t) + 2r'(t) \omega \vec{e}_\theta(t) - r(t) \omega^2 \vec{e}_r(t) \end{aligned}$$

Accélération de Coriolis

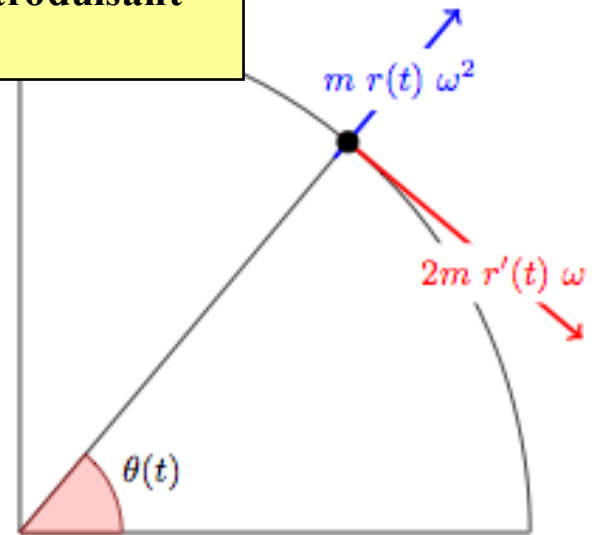
$$\vec{a}(t) = r''(t) \vec{e}_r(t) + 2r'(t) \omega \vec{e}_\theta(t) - r(t) \omega^2 \vec{e}_r(t)$$



Accélération
centripète

**On effectue tous les calculs dans un repère mobile lié au corps !
Par exemple, on attache le repère à la voiture qui effectue un virage.**

Ensuite, on tient compte du fait que le repère tourne, en introduisant des pseudo-forces centrifuge et de Coriolis



**Remplacer
l'accélération de Coriolis
par la pseudo-force de Coriolis !**

La résultante de la force de Coriolis et de la force due au gradient de pression atmosphérique fait tourner l'air autour des zones de basse et de haute pression !

Eh oui : la Terre tourne !



**Et voilà le résultat
de la pseudo-force de Coriolis !**



**Et bien non, contrairement à la légende,
l'eau du lavabo ne tourne pas à l'envers dans l'hémisphère sud.**

**L'impact de la force de Coriolis est *très très très* faible à petite échelle !
Le sens de rotation dépendra davantage de la forme du lavabo
et de l'impulsion initiale lorsque vous retirez le bouchon... (si, si :-)**

Mais, ceci est une légende urbaine !