EPL	
S7 : octobre 2015	*Méthodes numériques*
FSAB1104	**Solution**

Méthode de Gauss-Lobatto

	X_i	w_i
0	-1	$1-\beta$
1	$-\alpha$	β
2	α	β
3	1	$1-\beta$

Pour estimer l'intégrale d'une fonction $u(t)$ sur l'intervalle $[-1,1]$, écrivons la formule de quadrature définie par :

$$\int_{-1}^{1} u(x)\ dx \ \approx \ \sum_{i=0}^{3} w_i\ u(X_i)$$

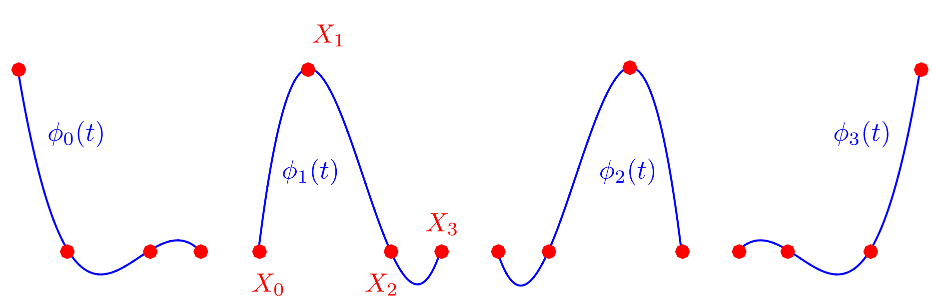
où α et β sont des nombres réels inclus dans l'intervalle $]0,1[$.
L'implémentation sous MATLAB de la version composite de cette quadrature peut s'écrire :

```
function I = compositeGaussLobatto(u,n)
    h = 2/n;  I = 0.0;
    alpha = 0.44721359549995;
    beta  = 0.83333333333333;
    jacobian = ... ;
    shift = ... ;
    X = [-1.0     -alpha alpha 1.0      ] * jacobian - shift;
    W = [ 1.0-beta  beta beta  1.0-beta ] * jacobian;
    for i = 1:n
        X = X + h ;
        I = I + sum(u(X).*W);
    end
end
```

Ce programme divise $[-1,1]$ en n sous-intervalles égaux de longueur $h = 2/n$ et applique la règle de Gauss-Lobatto à quatre points dans chaque sous-intervalle pour obtenir I_h.
Malheureusement, les lignes de code fournissant `shift` et `jacobian` ont été corrompues :-(

1. Esquisser les quatre polynômes $\phi_i(x)$ de Lagrange associés aux abscisses d'intégration X_i.

   Il suffit de tracer les quatre polynômes en procédant comme suit : chaque polynôme de Lagrange vaut l'unité pour l'abscisse correspondante et s'annule aux trois autres abscisses d'intrégartion:-) C'est tout simplement reproduire la Figure 1.3 du syllabus : difficile de faire plus simple !



Et pourtant, énormément d'étudiants n'arrivent pas à faire ce dessin : il y a même un étudiant qui a réussi tout le reste de l'interrogation, mais qui n'arrive pas esquisser ces quatre polynômes. Il est admis d'utiliser des couleurs et de superposer les quatre fonctions sur une même figure.

2. Obtenir une expression symbolique du polynôme de Lagrange $\phi_1(x)$ en fonction de α.

On obtient immédiatement :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \phi_1(x) & = & \dfrac{(x+1)(x-\alpha)(x-1)}{(-\alpha-1)(-2\alpha)(-\alpha-1)} \\ & \Big\downarrow & \textit{En simplifiant...} \\ & = & \dfrac{(x^2-1)(x-\alpha)}{2\alpha(1-\alpha^2)} \end{array}}$$

3. Obtenir ensuite une expression de β en fonction de α afin que la quadrature intègre exactement tout polynôme de degré 3 pour toute valeur de $\alpha \in]0,1[$.

   Pour obtenir une quadrature qui intègre exactement tout polynôme de degré 3, il suffit de choisir les poids qui correspondent à la méthode de Newton-Cotes à quatre points.
   En d'autres mots, il suffit d'intégrer le polynôme de Lagrange qu'on vient d'obtenir :

$$\begin{array}{rcl} \beta & = & \displaystyle\int_{-1}^{1} \phi_1(x)\ dx \\ & \Big\downarrow & \\ & = & \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(x^2-1)(x-\alpha)}{2\alpha(1-\alpha^2)}\ dx \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2\alpha(1-\alpha^2)} \underbrace{\int_{-1}^{1} x^3 - \alpha x^2 - x + \alpha\ dx}_{\alpha\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}} \end{array}$$

On conclut en donnant l'expression demandée : $\boxed{\beta \quad = \quad \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{(1-\alpha^2)}}$

   Il est possible d'obtenir le même résultat en imposant que la quadrature intègre exactement n'importe quel polynôme de degré trois comme nous l'avons fait pour la méthode de Gauss-Legendre : c'est un fifrelin plus long, mais on obtient le même résultat assez aisément aussi :-) Les deux approches ont été admises par le correcteur !

4. Calculer finalement α afin que la quadrature intègre exactement tout polynôme de degré 4. *Tout polynôme de degré 4 se compose d'une partie en x^4 et d'une seconde partie qui n'est rien d'autre qu'un polynôme de degré trois. Ici, il faut bien observer que cette deuxième partie est exactement intégrée avec le poids que nous venons de calculer !*

   En conclusion, pour obtenir une quadrature qui intègre exactement tout polynôme de degré quatre, il suffit tout simplement de choisir α afin d'intégrer exactement le monôme de degré 4.

En d'autres mots, il suffit d'exiger que :

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^4 \, dx}_{\frac{2}{5}} = \sum_{i=0}^{3} w_i \, X_i^4$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En remplaçant les poids et les abscisses par leurs expressions...}$$

$$\frac{2}{5} = 2\Big[(1-\beta) + \beta\alpha^4\Big]$$

Avec un peu d'algèbre élémentaire...

$$\frac{2}{5} = 2 - \frac{4}{3}\frac{1}{(1-\alpha^2)} + \frac{4}{3}\frac{\alpha^4}{(1-\alpha^2)}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2-6\alpha^2+4\alpha^4}{3(1-\alpha^2)}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{Si on suppose que } \alpha^2 \neq 1$$

$$6 - 6\alpha^2 = 10 - 30\alpha^2 + 20\alpha^4$$

$$5\alpha^4 - 6\alpha^2 + 1 = 0$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En résolvant cette équation du second degré en } \alpha^2\textit{...}$$

$$\alpha^2 = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{10}$$

En ne prenant que l'unique racine admissible[1]*, on peut donc conclure :* $\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}}$

Ce calcul n'est pas trop compliqué et pas mal d'étudiants obtiennent la bonne valeur : notez au passage que vous pouvez vérifier avec le code MATLAB fourni si votre réponse est correcte. Les quelques petits futés qui répondent en allant chercher directement la valeur du code informatique ont fait sourire le correcteur mais n'ont pas été récompensé pour cette astuce : il faut avoir la justification correcte et le développement algébrique pour être crédité des points de la sous-question.

5. Quel est le degré de précision de Gauss-Lobatto à quatre points ?
   Justifier brièvement votre réponse !

   Comme l'intégrale d'un terme impair en x^5 est nulle sur un intervalle symétrique, et comme la règle de Gauss-Lobatto est bien foutue et symétrique : intégrer numériquement x^5 avec Gauss-Lobatto produira aussi un résultat nul !

[1] Les deux racines du second degré sont respectivement 10/10 et 2/10. Mais la solution $\alpha^2 = 1$ n'est pas admissible et n'a d'ailleurs strictement aucun intérêt !

On a gagné le degré bonus : la méthode intégre aussi parfaitement un polynôme de degré cinq. Par contre, ce n'est plus le cas pour un polynôme de degré six : le vérifier aurait été prudent si le temps le permettait !

Il suffit donc juste de dire :

> *Le degré de précision de la méthode de Gauss-Lobatto est cinq*
> *Et l'ordre de précision de la méthode est $\mathcal{O}(h^6)$*

6. Compléter le code MATLAB en y indiquant comment calculer les variables `jacobian` et `shift` !

   Le jacobien de la transformation est le rapport des longueurs.

   Il faut ensuite veiller à placer le premier sous-intervalle au bon endroit avant d'entamer la boucle sur les sous-intervalles.

   Il suffit donc de corriger le programme comme suit :

```
jacobian = h / 2.0,
shift = 1.0 + h/ 2.0;
```

   Pas mal d'étudiants font ici preuve d'une imagination débordante et démontrent ainsi qu'il n'ont strictement rien compris au programme.

7. Donner γ et δ afin que la combinaison linéaire $I_{extr} = \gamma I_{h/2} + \delta I_h$ fournisse la meilleure estimation possible à partir de deux quadratures faites avec $2n$ et n intervalles respectivement.
   Justifier brièvement votre réponse !

   Comme il s'agit d'éliminer un terme d'ordre 6, on écrit : $$\boxed{I_{extr} = \frac{\Big(64I_{h/2} - I_h\Big)}{63}}$$

   L'erreur de cette extrapolation sera en $\mathcal{O}(h^8)$,
   car il n'y a pas de termes impairs
   en raison du caractère symétrique de la formule de Gauss-Lobatto.

La pondération (approximative) des sept sous-questions était respectivement $(2, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$.
L'interrogation était plus simple que les années précédentes : c'était dû au fait que vous aviez moins de temps que d'habitude et que les quatre interrogations étaient organisées le même jour. I n'y avait pas vraiment de questions faciles et même des questions très facile, avec l'éternelle extrapolation de Richardson et le degré de précision qui étaient des points qui pouvaient être très facilement obtenus.. Malencontreusement, la connaissance de pas mal d'étudiants se limite à l'écriture des polynômes de Lagrange : c'est un peu court !

Finalement, la moyenne est assez bonne et le taux d'échecs n'est pas supérieur à l'habitude. Il y a pas mal étudiants qui ont vraiment très bien réussi cette interrogation (au dessus de 17/20 :-)
En particulier cinq étudiants ont obtenu 20/20 : preuve que c'était largement faisable ! Par contre, un étudiant sur quatre n'a pas présenté l'interrogation : c'est le plus mauvais taux de participation depuis très longtemps et le résultat d'une mauvaise stratégie qui consiste à choisir certaines interrogations et à faire l'impasses sur les autres : c'est une mauvaise idée, car l'intérêt est de pouvoir s'entrainer à passer les quatre interrogations.

Comme les enseignants sont très déçus de la participation, nous allons imaginer une nouvelle approche où être absent à une des quatre interrogations de la journée empêchera de valider les résultats des trois autres.... Mais, cela ce sera pour l'année prochaine !