FSAB1104 : solution de l'examen de janvier 2011

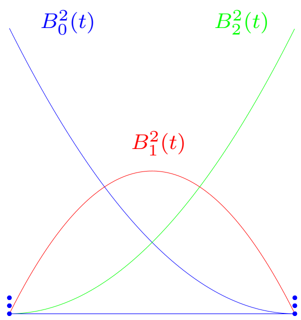
1 Approximation de Bézier

	T_i	U_i
0	0	0
1	1/3	1
2	2/3	0
3	1	2

Nous disposons d'un ensemble de quatre données d'une fonction inconnue $u(t)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Nous souhaitons calculer une approximation au sens des moindres carrés $u^h(t)$ à partir de trois fonctions de Bézier

$$u^h(t) = \sum_{i=0}^{2} a_i B_i^2(t)$$

1. Donner l'expression des trois fonctions de Bézier $B_i^2(t)$ définies pour les six noeuds $[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5] = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$. Esquisser graphiquement l'allure des trois fonctions.



Les trois fonctions sont :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} B_0^3(t) & = & (1-t)^2 \\ B_1^2(t) & = & 2(1-t)t \\ B_2^2(t) & = & t^2 \end{array}}$$

Connaissant l'allure des deux fonctions extrêmes et le fait que la somme des trois fonctions doit toujours valoir l'unité, ce résultat peut être obtenu immédiatement sans faire aucun calcul.
Le maximum de la fonction centrale est 0.5 *et celui des deux autres fonctions est* 1.
Beaucoup d'esquisses étaient en contradiction flagrante avec cette observation !

2. Ecrire la fonction $J(a_0, a_1, a_2)$ qu'il faut minimiser pour résoudre un tel problème.

$$J(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{3} \left(U_i - \sum_{j=0}^{2} a_j \ B_j^2(X_i) \right)^2$$

Cette question est vraiment très simple.
En plus c'est exactement la même que celle posée en janvier 2010...
Il faut l'exposant deux et les deux sommes écrites de manière adéquate. Ne considérer que les 3 premiers points en effectuant donc une simple interpolation est toujours impardonnable.

3. Pour obtenir l'approximation polynomiale d'ordre deux, est-il mieux d'utiliser les fonctions de Bézier ou de choisir les trois monômes 1, x et x^2 comme fonctions de base ?
Justifier brièvement votre réponse !

Comme $\{B_0^2(t), B_1^2(t), B_2^2(t)\}$ *et* $\{x^2, x, 1\}$ *sont deux bases du même sous-espace vectoriel (l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à deux), les deux résultats seront identiques.*

En termes de coût calcul ou d'erreurs d'arrondi, il n'y a strictement aucune différence pertinente ! Certains étudiants ont été particulièrement imaginatifs et créatifs à ce sujet pourtant :-)
Au passage, je signale aussi que les fonctions de Bézier ne sont pas orthogonales ! Eh oui, la question ressemblait à celle de janvier 2010, mais c'était quand-même un brin différent.

4. Compléter le programme MATLAB ci-dessous afin d'obtenir la courbe de l'approximation.

   Sur base de l'observation précédente, la courbe peut être obtenue avec une unique ligne de code

```
T = [0 1 2 3] /3;
U = [0 1 0 2];
t = linspace(0,1,100)
uh = polyval(polyfit(T,U,2),t);
plot(t,uh);
```

   Ecrire un programme n'utilisant pas `polyval` *mais calculant les équations normales était aussi parfaitement admissible. Voilà une autre implémentation qui fournit exactement la même courbe que le précédent :*

```
T = [0 1 2 3] /3;
U = [0 1 0 2];
t = linspace(0,1,100)
Phi = [(1-T).^2 ; 2*T.*(1-T); T.^2]
A = Phi * Phi'
b = Phi * U'
a = A \ b
phi = [(1-t).^2 ; 2*t.*(1-t); t.^2];
uh = a' * phi;
plot(t,uh);
```

   Par contre, s'inspirer directement du programme fourni dans la solution de la première question de janvier 2010 était vraiment une très mauvaise idée, car les fonctions de Bézier ne sont pas orthogonales (contrairement aux cosinus !). Pas mal d'étudiants ont pourtant choisi cette option. Cela a bêtement irrité le correcteur :-)

2 Méthode d'ordre quatre de Johan

On se propose de déterminer une subtile solution numérique du délicat problème de Johan :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u''(x) & = & f(x), \\ \\ u(0) & = & 1, \\ u(1) & = & 1. \end{array} \right.$$

On recherche les valeurs nodales inconnues $U_i = u^h(X_i)$ aux abscisses $X_i = ih$ avec $h = 1/n$.
Les deux valeurs frontières sont évidemment connues : $U_0 = U_n = 1$.
En définissant $F_i = f(X_i)$, Johan suggère d'utiliser les équations suivantes :

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = \frac{F_{i-1} + \alpha F_i + F_{i+1}}{\gamma} + \mathcal{O}(h^4)$$

1. En observant que $F_i = U_i''$, trouver α et γ afin que la méthode numérique soit d'ordre quatre Justifier votre réponse !

   Il suffit d'écrire les développements de Taylor (où il est possible de directement omettre tous les termes impairs en raison de caractère symétrique des équations de Johan !)

$$\begin{array}{rcl} U_{i\pm i} & = & U_i + \cdots + \dfrac{h^2}{2} U_i'' + \cdots + \dfrac{h^4}{24} U_i'''' + \cdots + \mathcal{O}(h^6) \\ \\ U''_{i\pm i} & = & U_i'' + \cdots + \dfrac{h^2}{2} U_i'''' + \cdots + \mathcal{O}(h^4) \end{array}$$

Ensuite, on écrit les équations de Johan :

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = \frac{F_{i-1} + \alpha F_i + F_{i+1}}{\gamma}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En remplaçant } F \textit{ par } U''$$

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = \frac{U''_{i-1} + \alpha U''_i + U''_{i+1}}{\gamma}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En y incluant le développement de Taylor de } U_{i\pm i} + U_{i\pm i}$$

$$U''_i + \frac{h^2}{12} U''''_i + \mathcal{O}(h^4) = \frac{2+\alpha}{\gamma} U''_i + \frac{h^2}{\gamma} U''''_i + \mathcal{O}(h^4)$$

En identifiant les termes, on conclut donc que : $\boxed{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 10 \\ \beta & = & 12 \end{array}}$

2. Pour une fonction f quelconque, écrire le programme MATLAB :

```
function u = johan(n,f)
```

qui calcule les `n+1` valeurs nodales par la méthode numérique de Johan.

Une implémentation possible est :

```
function U = johan(n,f)
  h = 1/n; A = speye(n+1,n+1);
  for i=2:n
     A(i,i)   = -2;
     A(i,i+1) =  1;
     A(i,i-1) =  1;
  end

  F = f(0:h:1);
  b = ones(n+1,1);
  b(2:n) = (h*h)*(F(1:n-1) + 10*F(2:n) + F(3:n+1))/12;

  U =A \b;
end
```

Quelques étudiants proposent également une implémentation de la méthode du tir en considérant que la méthode de Johan est une méthode d'intégration à pas multiples. Il faut alors effectuer, par exemple, une méthode de bissection pour trouver la valeur de U_2 requise pour lancer le calcul. Une implémentation correcte d'une telle approche a aussi été admise. Par contre, proposer un programme qui fournit une solution qui ne satisferait pas une des deux conditions aux limites est considéré comme une erreur impardonnable.

3 Schéma symplectique de Bart

Bart souhaite résoudre le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Au}(t)},$$

avec $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$. Bart se propose d'utiliser le schéma suivant :

$$\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_i + h\ (\beta \mathbf{AU}_{i+1} + (1-\beta)\mathbf{AU}_i).$$

1. Calculer les deux valeurs propres λ_i de la matrice $\mathbf{A}$.

   Il suffit juste résoudre :

   $$\begin{array}{rcl} \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} & = & 0 \\ & \downarrow & \\ \lambda^2 + 1 & = & 0 \end{array}$$

   On conclut finalement que : $\boxed{\lambda = \pm i}$

   De manière pas vraiment surprenante, certains étudiants estiment impossible d'avoir des valeurs complexes et les corrigent d'autorité par deux valeurs réelles unitaires : c'est pas une bonne idée !

2. Donner la solution analytique et observer que celle-ci reste toujours sur le cercle de rayon unitaire.

   La représentation paramétrique adéquate du cercle est : $\boxed{\begin{array}{rcl} x(t) & = & cos(-t) \\ y(t) & = & sin(-t) \end{array}}$

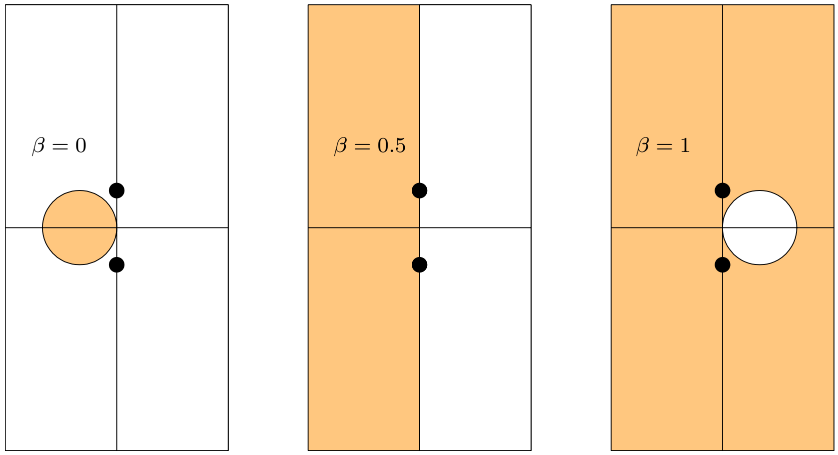
   Les conditions initiales et les deux équations différentielles ordinaires sont bien satisfaites.
   L'écriture en termes d'exponentielles complexes est aussi admise.
   L'oubli du signe négatif n'a été que très faiblement pénalisé :-)
   Par contre, l'ajout de termes constants a fait bondir le correcteur !

3. Pour quelles valeurs de β, la méthode de Bart est-elle explicite ?

   La méthode est explicite si $\beta = 0$ et implicite dans tous les autres cas.

4. Esquisser les zones de stabilité numérique pour $\beta = 0$, $\beta = 1$ et $\beta = \frac{1}{2}$ dans le plan complexe $h\lambda$.

5. Que va-t-on observer si on résout ce système avec la méthode d'Euler explicite ? La solution numérique va-t-elle rester sur le cercle, osciller autour du cercle, s'éloigner vers l'infini ou tendre vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini ?
   Et avec la méthode d'Euler implicite, que va-t-il se passer ?



Comme la solution s'écrit comme une combinaison linéaire des deux fonctions propres et que le facteur d'amplification est identique pour les deux valeurs propres complexes conjugées, l'évolution du rayon est directement donnée par ce facteur d'amplification. On conclut immédiatement que :

- *avec* $\beta = 0$ *(Euler explicite), on a une spirale qui tend vers l'infini,*
- *avec* $\beta = 0.5$ *(Crank-Nicolson), la solution reste toujours sur le cercle de rayon un,*
- *avec* $\beta = 1$ *(Euler implicite), on a une spirale qui tend vers zéro.*

Il est important d'observer que la méthode d'Euler implicite est aussi mauvaise que la méthode d'Euler explicite ! Honte donc à l'immense majorité des étudiants qui ont condamné, sans appel, le pauvre Euler explicite et qui ont acclamé un Euler implicite tout aussi pervers...
En effet, si on effectue une itération avec chaque méthode, on observe que :

Euler explicite : $\mathcal{O}(h)$ $R_2 = \sqrt{1+h^2} > 1$	$\left[\begin{array}{c} X_2 \\ Y_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -h \end{array}\right]$
Euler implicite : $\mathcal{O}(h)$ $R_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+h^2}} < 1$	$\left[\begin{array}{cc} 1 & -h \\ h & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} X_2 \\ Y_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c} X_2 \\ Y_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{1+h^2} \\ \frac{-h}{1+h^2} \end{array}\right]$
Crank-Nicolson : $\mathcal{O}(h^2)$ $R_2 = \sqrt{\dfrac{4+h^4-8h^2+16h^2}{(4+h^2)^2}} = 1$	$\left[\begin{array}{cc} 1 & -h/2 \\ h/2 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} X_2 \\ Y_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -h/2 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c} X_2 \\ Y_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{4-h^2}{4+h^2} \\ \frac{-4h}{4+h^4} \end{array}\right]$

Strictement personne n'a effectué le calcul algébrique pour déterminer β à partir des équations et je reconnais bien volontiers que c'est monstrueusement calculatoire...
Toutefois, poser correctement le problème était apprécié par le correcteur !

Dernière toute petite remarque : le cercle du diagramme de phase et les deux cercles des diagrammes de stabilité n'ont strictement aucun lien entre eux :-)

6. Identifier β afin que la solution discrète reste sur le cercle unitaire à tout instant.
   On dira alors que le schéma est un intégrateur symplectique pour le système.

   La méthode de Bart est tout simplement celle de Crank-Nicolson $\beta = 0.5$.

7. Quel est l'ordre de cette méthode symplectique de Bart ?

   L'ordre de précision de Crank-Nicolson est deux.
   Si, si ! Bien combiner deux méthodes d'ordre un permet d'obtenir une méthode d'ordre deux...
   Il n'est évidemment absolument pas possible de répondre à cette question, si vous n'avez aucune idée de la réponse à la question précédente (beh oui et quoi encore, vous rêvez d'un gouvernement pour le retour de vos vacances ? Que nenni, bois de l'eau claire et révise ta chimie).
   Choisir -au hasard- un ordre de précision est donc se foutre de la gueule du correcteur :-)