FSAB1104 : solution de l'examen de janvier 2012

1 Une bête équation aux dérivées partielles

On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$

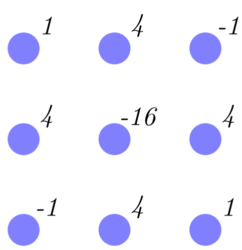
avec $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. On impose que $u(x, y) = 0$ sur les côtés du domaine.
Afin d'obtenir une solution numérique, définissons :

$$U_{i,j} \approx u(X_i, Y_j)$$

pour $X_i = ih$ et $Y_j = jh$ avec $h = 1/n$.

1. Ecrire les équations que doivent satisfaire $U_{i,j}$ pour des différences finies centrées d'ordre deux.

Les différences finies centrées d'ordre deux sont :



$$\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+i,j} + U_{i-i,j} - 2U_{i,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 2U_{i,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial x \partial y} \approx \frac{1}{2h}\left(\frac{\partial U_{i+1,j}}{\partial y} - \frac{\partial U_{i-1,j}}{\partial y}\right)$$

En remplaçant $\frac{\partial U_{i+1,j}}{\partial y}$ *par* $\frac{U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j-1}}{2h}$

$$\approx \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}}{4h^2}$$

Les $(n-1)^2$ *équations pour les noeuds intérieurs sont donc :*

$$\boxed{\begin{array}{r} \dfrac{U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1} - 4U_{i,j}}{h^2} + \dfrac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}}{4h^2} \quad = \quad 1 \\[2ex] i = 1, \ldots, n-1 \\ j = 1, \ldots, n-1 \end{array}}$$

Pour les noeuds frontières, il suffit d'imposer $U_{i,j} = 0$*, lorsque l'un des indices vaut* 0 *ou* n*.*
Oublier le terme croisé est évidemment impardonnable : ceci n'est pas un laplacien !
Quelques étudiants semblent croire que la dérivée croisée est le produit des deux dérivées premières: ce n'est vraiment pas une bonne idée :-(

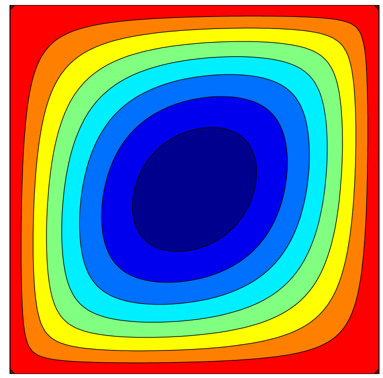
2. Ecrire une fonction MATLAB

```
function u =  edp(n)
```

qui retourne une matrice contenant les valeurs nodales $U_{i,j}$.
Soyez bien attentifs à définir et initialiser les matrices correctement.

Une implémentation possible est :

```
function u = edp(n);
h = 1/n;
n = n+1;       % Petite facétie :-)
A = speye(n^2);
b = zeros(n^2,1);
indexpt = [n-1 n n+1 -1   0 1 -n-1 -n -n+1];
pattern = [ -1 4   1  4 -16 4    1  4   -1];
for i = 2:n-1
  for j = 2:n-1
    index = i + (j-1)*n;
    A(index,index+indexpt) = pattern;
    b(index) = 4*h*h;
  end
end
u = reshape(A\b,n,n);
end
```



Quasiment tous les étudiants écrivent les 16 équations comme je l'avais fait au cours : cela est évidemment admis, mais nécessite un petit travail fastidieux de scribe. Les points importants sont l'initialisation d'une matrice creuse et la prise en compte des conditions aux frontières. Remplacer `speye` *par* `sparse` *est une erreur. Ne pas utiliser de matrices creuses pour ce problème est aussi considérée comme une erreur. Oublier de redimensionner le vecteur final est aussi une erreur.*

La taille de la matrice est $(n+1)^2$. *Un maillage de* $m \times m$ *points est caractérisé par un pas* $h = 1/(m-1)$. *Cette toute petite astuce n'était que très légèrement pénalisée pour ceux qui ne l'avaient pas observée. Attention, remplacer* `h=1/n; n=n+1;` *par* `h=1\(n-1)` *est une erreur !*

Recopier le programme de Poisson des transparents sans y faire les adaptations utiles pour le problème posé et la définition de `n` *ne rapporte quasiment rien. En général, l'humeur du correcte devient vraiment très négative si l'étudiant est -en outre- incapable de fournir les équations qui sont résolues par ce programme :-(*

Quelques étudiants proposent des solutions d'une inutile complexité : c'est souvent l'occasion d'écrire beaucoup de bêtises et donc de perdre des points. Simple et compact sont souvent la clé du succès.

2 Newton, Raphson et Euler tous ensemble !

On considère le problème non-linéaire de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & -\Big(u(t)\Big)^3 + \cos(t), \\ \\ u(0) & = & 0. \end{array}\right.$$

On souhaite utiliser la méthode d'Euler implicite pour les instants $T_n = nh$ avec $n = 0, 1, 2, \ldots, m$. Comme le schéma d'Euler est implicite, il faut utiliser une méthode itérative pour résoudre le problème non-linéaire à chaque pas. Ici, on se propose de faire appel à la méthode de Newton-Raphson.

1. Donner la relation (non-linéaire) liant U^{n+1} et U^n pour le schéma d'Euler implicite. L'indice n réfère aux itérations du schéma de Newton-Raphson.

   L'itération d'Euler implicite s'écrit : $\boxed{U^{n+1} \;=\; U^n + h\Big(\cos((n+1)h) - \big(U^{n+1}\big)^3\Big)}$

2. Ecrire l'itération de Newton-Raphson donnant U^{n+1}_{i+1} à partir de U^{n+1}_i. Le candidat initial est $U^{n+1}_0 = U^n$. L'indice i réfère aux itérations du schéma de Newton-Raphson.

   Le problème non linéaire à résoudre est $\underbrace{U^{n+1} + h\big(U^{n+1}\big)^3 - U^n - h\ \cos((n+1)h)}_{f(U^{n+1}) = f(x)} = 0.$

   Bien noter que l'inconnue est U^{n+1} *pour l'itération de Newton* $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

   On conclut donc : $\boxed{U^{n+1}_{i+1} \;=\; U^{n+1}_i - \dfrac{U^{n+1}_i + h\big(U^{n+1}_i\big)^3 - U^n - h\cos((n+1)h)}{1 + 3h\big(U^{n+1}_i\big)^2}}$

   Il ne faut évidemment pas dériver le cosinus !
   Inclure un indice i à la valeur précédente U^n est une erreur !
   La plupart des étudiants n'arrivent pas à écrire cette relation :-(
   Comme annoncé, simplement changer les notations vous perturbent totalement comme prévu.

3. Calculer les trois premières approximations U^1_0, U^1_1 et U^1_2 pour le premier pas d'Euler implicite U^1.

   L'application mécanique de la formule donne : $\boxed{\begin{array}{lcl} U^1_0 & = & U^0 \;=\; 0 \\ U^1_1 & = & h\cos(h) \\ U^1_2 & = & \dfrac{h\cos(h) + 2h^4\cos^3(h)}{1 + 3h^3 cos^2(h)} \end{array}}$

4. Proposer un critère d'arrêt du schéma de Newton-Raphson.
   Justifier votre choix[1].

   Le critère d'erreur doit impliquer un incrément maximal toléré et un nombre maximal d'itérations. On peut choisir deux valeurs arbitraires.

   ```
   while (abs(delta) >= tol && i < imax)
   ```

   Toutefois, cela aurait du sens de lier l'incrément maximal avec l'erreur locale commise à chaque pas de temps par le schéma d'Euler implicite. Cette erreur locale peut-être estimée de deux manières. Elle est proportionnelle à h^2. Elle peut aussi être estimée par $\mid U^{n-1} - U^n \mid$ obtenue au pas précédent.

   Comme d'habitude, la plupart des étudiants pensent utile de baratiner le correcteur en lui déversant une quantité de banalités, alors qu'une seule phrase suffit :-) C'est inutile et c'est souvent l'occasion d'écrire des âneries qui vous font perdre des points... Ne dites que ce qui vous semble pertinent.

5. Ecrire une fonction MATLAB

   ```
   function u = eulerImplicite(h,m)
   ```

   qui calcule, par l'usage conjoint de la technique de la méthode de Newton-Raphson et de celle d'Euler implicite, la solution numérique du problème de Cauchy pour `m` pas de taille `h`.
   Les valeurs $[u(0), u(h), u(2h), u(3h) \ldots u(mh)]$ seront fournies dans le vecteur `u`.

   Une implémentation possible est :

   ```
   function U = eulerImplicite(h,m)
   T = linspace(0,h*m,m+1);
   U(1) = 0; imax =  50; du = 1;
   for n=1:m
       tol = 0.01 * max(du,1);
       i = 0; delta = tol + 1; x = U(n);
       while (abs(delta) >= tol && i < imax)
           i = i + 1;
           delta = - (x + h*x^3 - U(n) - h*cos(T(n)))/(1+3*h*x*x);
           x = x + delta;
       end
       U(n+1) = x;
       du = abs(U(n+1)-U(n));
   end
   end
   ```

[1] Il n'y a pas de réponse unique à cette question : il suffit donc de justifier votre choix avec un minimum de bon sens !

3 Trajectoire d'un monstre maléfique

	X_i	Y_i	Z_i
0	4	0	0
1	4	0	α
2	-8	16	α
3	0	4	0

Afin d'annihiler un monstre maléfique, il s'agit de calculer le paramètre α. Sur l'intervalle de temps $t \in [T_2, T_4] = [-1, 1]$, la trajectoire du monstre est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{3} B_i^2(t) X_i \\ y(t) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{3} B_i^2(t) Y_i \\ z(t) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{3} B_i^2(t) Z_i \end{array}\right.$$

où $B_i^2(t)$ sont les fonctions B-splines pour les noeuds $\mathbf{T} = [T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6] = [-1, -1, -1, 0, 1, 2, 3]$.

1. Donner la position du monstre en $t = 0$.

Comme $B_0^2(0) = B_3^2(0) = 0$ *et* $B_1^2(0) = B_2^2(0) = \frac{1}{2}$, *on a :* $\boxed{\mathbf{x}(0) \quad = \quad \Big(-2, 8, \alpha \Big)}$

2. Donner les expressions de $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$, $B_2^2(t)$ et $B_3^2(t)$ pour $t = [T_2, T_3] = [-1, 0]$. Afin d'éviter de vous égarer dans une algèbre purement calculatoire, nous vous donnons les expressions de toutes les autres fonctions sur les deux intervalles utiles avec $\mathbf{T} = [-1, -1, -1, 0, 1, 2, 3]$:

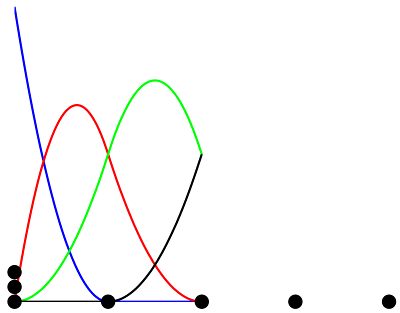
	$t \in [-1, 0[$	$t \in [0, 1[$		$t \in [-1, 0[$	$t \in [0, 1[$
$B_0^1(t) =$	0	0	$B_0^2(t) =$	$\ldots$	0
$B_1^1(t) =$	$-t$	0	$B_1^2(t) =$	$\ldots$	$(1 - 2t + t^2)/2$
$B_2^1(t) =$	$(t + 1)$	$(1 - t)$	$B_2^2(t) =$	$\ldots$	$(1 + 2t - 2t^2)/2$
$B_3^1(t) =$	0	t	$B_3^2(t) =$	$\ldots$	$t^2/2$

En observant que sur l'intervalle $[T_2, T_3]$, *seules les fonctions* $B_1^1(t) = -t$ *et* $B_2^1(t) = (t + 1)$ *sont non nulles, on obtient en appliquant posément la définition :*

$$\boxed{\begin{array}{rcccccl} B_0^2(t) & = & 0 & + & \frac{(0-t)}{1} B_1^1(t) & = & t^2 \\ B_1^2(t) & = & \frac{(1+t)}{1} B_1^1(t) & + & \frac{(1-t)}{2} B_2^1(t) & = & (1 - 2t - 3t^2)/2 \\ B_2^2(t) & = & \frac{(1+t)}{2} B_1^2(t) & + & 0 & = & (1 + 2t + t^2)/2 \\ B_3^2(t) & = & 0 & + & 0 & = & 0 \end{array}}$$

La plupart des étudiants arrivent à réaliser ce petit calcul élémentaire :-)

3. Esquisser les fonctions $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$, $B_2^2(t)$ et $B_3^2(t)$ pour $t = [T_2, T_4] = [-1, 1]$.



Comme prévu, réaliser cette esquisse a été une tâche compliquée ! Pourtant, en sachant que

$$\sum_{i=0}^{3} B_i^2(t) = 1$$

sur les deux intervalles, le graphe pouvait être très aisément construit de manière tout-à-fait intuitive des valeurs connues aux noeuds.

Il faut avoir l'allure générale des 4 courbes et ne pas dessiner de points de rebroussement sur vos courbes qui sont $\mathcal{C}^2$. Seule, la courbe de $B_0^2(t)$ atteint une valeur unitaire en $t = -1$, puisque ce noeud est triple. L'obtention de graphes complètement bizarres ne semble pas trop inquiéter les étudiants. Beaucoup dessinent des courbes symétriques : ce qui est illogique pour les noeuds choisis. Par contre, c'est normal que la figure ne soit pas symétrique : l'inverse serait plus étonnant !

4. Calculer la valeur de α afin que $z(1/2) = 8$

Comme toutes les fonctions B-splines entre $[0, 1[$ étaient fournies dans l'énoncé, on écrit :

$$\begin{aligned} 8 &= \alpha\ B_1^2(\tfrac{1}{2}) + \alpha\ B_2^2(\tfrac{1}{2}) \\ 8 &= \alpha\ \frac{1}{8} + \alpha\ \frac{3}{4} \\ &\downarrow \\ 8 &= \frac{7}{8}\ \alpha \end{aligned}$$

On conclut donc que : $\boxed{\alpha = \dfrac{64}{7}}$

Il est donc possible d'obtenir ce résultat en n'ayant pas répondu aux trois sous-questions précédentes. Conclusion : parfois, commencer par la fin peut être une bonne idée :-)