FSAB1104 : solution de l'examen de janvier 2014

1 It is a piece of integration cake :-)

Pour estimer l'intégrale $I = \int_{-h}^{h} u(x)dx$, comparons la méthode des trapèzes et celle du point milieu :

$$I^h_{trapeze} = h\big(U_{-h} + U_h\big) \quad \approx \quad I$$

$$I^h_{midpoint} = 2hU_0 \quad \approx \quad I$$

1. Ecrire les sept premiers termes du développement de Taylor de la fonction $u(x)$ autour de l'origine.

On écrit tout simplement :

$$\boxed{u(x)) \quad = \quad U_0 + hU_0' + \frac{h^2}{2}U"_0 + \frac{h^3}{6}U_0^{(3)} + \frac{h^4}{24}U_0^{(4)} + \frac{h^5}{120}U_0^{(5)} + \frac{h^6}{720}U_0^{(6)} + \ldots}$$

2. En intégrant ce développement, obtenir l'ordre de précision de la méthode du point milieu et l'expression de l'erreur en termes des dérivées successives de u à l'origine..

Pour estimer l'erreur locale, il suffit donc d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{h} u(x)dx &\approx 2hU_0 + \frac{h^3}{3}U"_0 + \frac{h^5}{60}U_0^{(4)} + \ldots \\ I^h_{midpoint} &= 2hU_0 \end{aligned}$$

Il est impardonnable de ne pas observer que l'intégration des termes impairs est nul !
Ensuite, on obtient l'expression de l'erreur locale en comparant les deux lignes.

$$\boxed{I - I^h_{midpoint} \quad = \quad \frac{h^3}{3}U"_0 + \frac{h^5}{60}U_0^{(4)} + \ldots}$$

Comme l'erreur est en $\mathcal{O}(h^3)$, <u>l'ordre de précision de la méthode est deux</u> (et pas trois, si si !).

3. En procédant de la même manière, obtenir l'ordre de précision et l'erreur pour les trapèzes.

On procède de même en écrivant $U_{\pm h}$ à partir d'un développement en série à l'origine :

$$\int_{-h}^{h} u(x)dx \quad \approx \quad 2hU_0 + \frac{h^3}{3}U"_0 + \frac{h^5}{60}U_0^{(4)} + \ldots$$

$$I^h_{trapeze} \; = \; h\big(U_{-h} + U_h\big) \quad \approx \quad 2h\left(U_0 + \frac{h^2}{2}U_0^{(3)} + \frac{h^4}{24}U_0^{(5)} + \ldots\right)$$

Ensuite, on obtient l'expression de l'erreur locale en comparant les deux lignes.

$$\boxed{I - I^h_{trapeze} \quad = \quad -\frac{2h^3}{3}U"_0 - \frac{4h^5}{60}U_0^{(4)} - \ldots}$$

Comme l'erreur est à nouveau en $\mathcal{O}(h^3)$, l'ordre de précision de la méthode est à nouveau deux.
Notons que l'erreur est maintenant de signe opposé !
Cela peut se voir graphiquement en dessinant l'erreur commise pour intégrer une simple parabole.
Conclusion, c'est vraiment toujours utile de faire un tout petit dessin :-)

4. Calculer α et β afin que la combinaison linéaire

$$I_{extr} = \alpha I^h_{trapeze} + \beta I^h_{midpoint}$$

fournisse la meilleur estimation possible de l'intégrale exacte.

On choisit α et β afin de supprimer les deux premiers termes d'erreur en $\mathcal{O}(h^3)$:

$$I - I_{extr} \quad \approx \quad 2h\,(\alpha+\beta)\,U_0 + (\beta - 2\alpha)\,\frac{h^3}{3}U_0^{(3)} + (\beta - 4\alpha)\,\frac{h^5}{60}U_0^{(5)} + \ldots$$

En annulant les termes en U_0, et U_0'', on obtient directement : $\boxed{\alpha \quad = \quad \frac{1}{3}, \qquad \beta \quad = \quad \frac{2}{3}}$

On retrouve ainsi la méthode de Simpson qui est bien une méthode d'ordre quatre. Quelques étudiants ont subtilement deviné la réponse de cette manière : c'était admis !

Ce n'est pas une extrapolation de Richardson, même si il existe une grosse analogie : les deux coefficients sont ici positifs ! Evidemment, dans ce jeu pervers, pas mal d'étudiants sont tombés dans un piège assez grossier... en recopiant servilement et bêtement des coefficients de Richardson.

5. Donner l'expression de l'erreur de I_{extr}.

On déduit servilement : $\boxed{\left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{3}\right)\frac{h^4 5}{60}U_0^{(5)} \quad = \quad -\frac{h^5}{90}U_0^{(5)}}$

Notons qu'on retrouve exactement l'expression de l'erreur de la méthode de Simpson du syllabus.
Recopier bêtement le formulaire fournissait la bonne réponse (pour une fois :-).

2 Méditation rectorale..

Nous connaissons trois points de la trajectoire d'un candidat recteur qui médite en parcourant toutes les 4 secondes la même boucle dans la salle du Sénat académique des Halles universitaires.

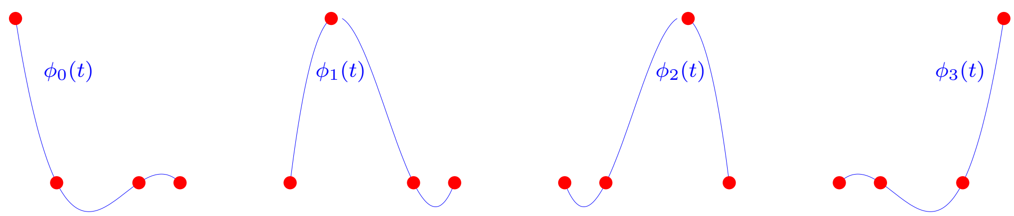
En $t = 0$, il se trouve au premier point, puis au second et au troisième en $t = 1$ et $t = 3$ respectivement. Et finalement, il repasse au point initial en $t = 4$ et continuera à répéter indéfiniment la même trajectoire...

	t_i	(X_i, Y_i)
0	0.00	(0.00 , 0.00)
1	1.00	(2.00 , 1.00)
2	3.00	(0.00 , 1.00)
3	4.00	(0.00 , 0.00)

Nous allons estimer la représentation paramétrique C^0 de cette trajectoire avec une interpolation polynomiale et une interpolation C^2 avec des splines cubiques usuelles.

1. Esquisser les quatre polynômes de Lagrange $\phi_i(t)$ associés à $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$ et $T_3 = 4$.

   C'est une question élémentaire !
   Et pourtant, beaucoup d'étudiants produisent des dessins vraiment lamentables...

   Il n'y a vraiment aucune raison d'imposer une dérivée nulle (erreur fréquente) aux deux extrémités. Le dessin peut être très approximatif, mais doit ressembler à une fonction cubique avec un unique maximum et un unique minimum. Même si une très grande tolérance a été admise pour le dessin, c'était vraiment facile et même en n'ayant strictement rien étudié, vous auriez dû tous réussir cette question : c'est très loin d'être le cas :-)

   On note -au passage- que quelques étudiants frustrés de ne pouvoir dessiner des NURBS ont décidé d'autorité de changer la question. Faut-il le répéter ? Oui, il faut lire l'énoncé !

   Il n'était ni nécessaire, ni demandé d'écrire les expressions des fonctions de Lagrange.

2. Donner l'expression de l'interpolation polynomiale paramétrique : $(x(t), y(t))$.
   En déduire ensuite la position atteinte en $t = \frac{1}{2}$.

$$x(t) = \sum_{i=0}^{3} X_i \phi_i(t) \qquad y(t) = \sum_{i=0}^{3} Y_i \phi_i(t)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$= 2\phi_1(t) \qquad = \phi_1(t) + \phi_2(t)$$

$$= \frac{t(t-3)(t-4)}{3} \qquad = \frac{t(t-3)(t-4)}{6} - \frac{t(t-1)(t-4)}{6}$$

En $t = \frac{1}{2}$, on en déduit la position : $\boxed{\left(\frac{35}{24}, \frac{14}{24}\right)}$

Globalement, cette question purement calculatoire et fortement inspirée d'un exercice du syllabus a été remarquablement bien réussie :-) Comme quoi, malgré la fatigue de fin de session, certains d'entre vous ont eu le courage de faire ce petit effort qui leur fera sauver deux mois de vacances, pour pas mal d'entre vous.

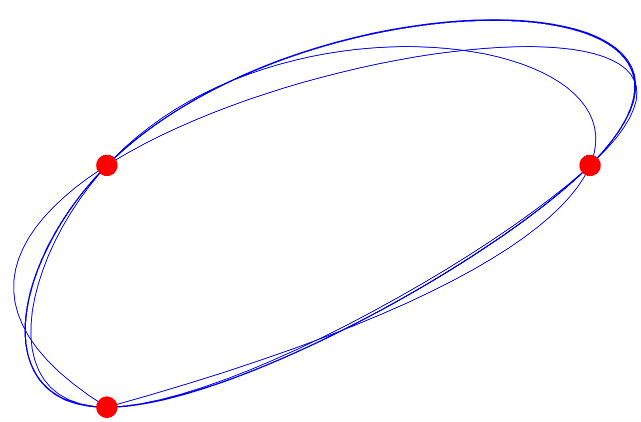
3. Compléter ce programme MATLAB pour tracer la trajectoire rectorale avec une interpolation C^2 avec des splines cubiques.

   Il suffit juste d'ajouter les quatre lignes suivantes sans autre forme de procès :

```
function theRectorMeditationCurve()
T = [0 1 3 4];
X = [0 2 0 0];
Y = [0 1 1 0];
t = linspace(0,4,100);
plot(spline(T,X,t),spline(T,Y,t),'-r'); end
```

   Alors, comme dirait Léopold : "ça m'a l'air trop simple, j'ai zappé quelque chose ?"
   Eh ben non, j'ai rien demandé d'autre. Espérer imposer la stricte périodicité de la trajectoire (ce qui n'était pas demandé !) en répétant les points de passage avant et après ne permettra pas de l'obtenir en plus.... A titre d'illustration, répéter dix fois les points d'intégration va bien générer des trajectoires de plus en plus proches mais jamais parfaitement et strictement périodiques : d'ailleurs, la solution 26.4 du syllabus d'exercice est erronée au passage et je devrais la modifier. Comme quoi pour tous les étudiants avides de bonus, oui il avait encore des erreurs que vous n'avez pas trouvées : et na :-)

   Toutefois, le correcteur a quand-même été vraiment très compréhensif envers les quelques étudiants si enthousiastes de montrer qu'ils avaient étudié tous les exercices du syllabus et qui reproduisaient cette solution non demandée et erronée : oui, l'enseignant est parfois de bien mauvaise foi.



   Oui : cette question était vraiment honteusement simple et a d'ailleurs permis de compenser la difficulté de la suivante :-)

3 Une convergence en or !

Considérons la méthode de la sécante pour la recherche d'une racine x simple : nous avons donc $f'(x) \neq 0$.

$$\boxed{x_{i+1} \quad = \quad x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}}$$

L'erreur commise à chaque itération i est définie par $e_i = x_i - x$.

1. Ecrire le code MATLAB de `function x = secante(x0,x1,tol,nmax,f)` implémentant la méthode de la sécante pour trouver une racine d'une fonction `f` avec une tolérance `tol` et un nombre maximal d'itérations `nmax`. Deux premières valeurs pour lancer la méthode itérative sont données dans `x0` et `x1` .

   Une implémentation possible est :

```
function x= secante(x0,x1,tol,nmax,f)
n = 0; delta = tol + 1; f0 = f(x0);
while abs(delta) >= tol && n < nmax
     n = n + 1;
     f1 = f(x1);
     delta = -f1*(x1-x0)/(f1-f0);
     x0 = x1;  f0 = f1; x1 = x1 + delta;
 end
```

   Une implémentation efficace ne nécessite qu'un unique calcul de la fonction f par itération. C'est cela qui définit le vrai coût de la méthode par itération. En conséquence, le correcteur a retiré un point par évaluation inutile de cette fonction. Et donc (sans doute à l'étonnement de beaucoup d'étudiants), cette question qui paraissait très simple a été très souvent désastreuse pour tous ceux qui se sont bêtement contentés de recopier la formule de manière servile.

   En d'autres mots, il ne sert à rien de venir voir sa copie pour constater le désastre, si vous avez obtenu un seul point malgré l'écriture d'un très long code agrémenté de multiples commentaires totalement inutiles !

2. Définir le taux de convergence α d'une méthode itérative.

   Si les itérations convergent et s'il existe deux constantes strictement positives $C < 1$ et $r > 1$ telles que

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|e_i|}{|e_{i-1}|^\alpha} = C$$

   on dit que la séquence converge avec un taux de convergence *α.*

3. (*) Calculer[1] ce taux de convergence sachant qu'ill existe une constante réelle D telle que

$$e_{i+1} = D \; e_i e_{i-1}$$

   lorsque la méthode de la sécante converge et que $i \to \infty$.

   Lorsque $i \to \infty$, on peut écrire que :

[1] Attention, il faut justifier votre réponse : juste recopier la valeur donnée dans le syllabus ne rapporte rien :-(

$$
\begin{aligned}
e_{i+1} &= D\ e_i e_{i-1} \\
&\Big\downarrow \quad \textit{Asymptotiquement, on peut écrire } e_{i+1} = C\,(e_i)^\alpha \\
C^\alpha\,(e_{i+1})^{\alpha\alpha} &= DC\,(e_{i-1})^\alpha\, e_{i-1} \\
C^\alpha\,(e_{i+1})^{\alpha^2} &= DC\,(e_{i-1})^{\alpha+1}
\end{aligned}
$$

Cette égalité ne peut être satisfaite que si $\alpha^2 = \alpha + 1$.
L'unique racine positive de cette équation du second degré est le nombre d'or.

Nous avons donc bien une convergence en or : $\boxed{\alpha \;=\; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \;=\; 1.618}$

C'est un peu futé, mais parfaitement faisable et on utilise la même idée que celle adoptée pour l'analyse de stabilité de méthode à pas liés. Quelques étudiants (pas beaucoup, j'en conviens) ont trouvé la solution. Il existe d'autres manières de démontrer le même résultat en particulier en faisant appel à des logarithmes...

4. (**) Ensuite, calculer[2] l'expression de la constante D en termes de $f'(x)$ et $f''(x)$.

   Si la méthode converge, la fonction f tend progressivement vers zéro, on peut donc écrire :

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \\
e_{i+1} &= e_i - \frac{f(x+e_i)(e_i - e_{i-1})}{f(x+e_i) - f(x+e_{i-1})} \\
e_{i+1} &= \frac{e_i f(x+e_i) - e_i f(x+e_{i-1}) - e_i f(x+e_i) + e_{i-1} f(x+e_i)}{f(x+e_i) - f(x+e_{i-1})} \\
e_{i+1} &= \frac{e_{i-1} f(x+e_i) - e_i f(x+e_{i-1})}{f(x+e_i) - f(x+e_{i-1})} \\
&\Big\downarrow \quad \textit{En effectuant les développements en série de Taylor :} \\
e_{i+1} &= \frac{e_{i-1}\left(e_i f'(x) + e_i^2 \frac{f''(x)}{2}\right) - e_i\left(e_{i-1} f'(x) + e_{i-1}^2 \frac{f''(x)}{2}\right))}{\Big(e_i - e_{i-1}\Big) f'(x)} \\
e_{i+1} &= \Big(e_{i-1} e_i\Big)\ \frac{\Big(e_i - e_{i-1}\Big) f''(x)}{\Big(e_i - e_{i-1}\Big) 2 f'(x)}
\end{aligned}
$$

---

[2] Indication : il semble assez judicieux d'utiliser des développement de Taylor tels que :

$$
f(x+e_i) = \underbrace{f(x)}_{=0} + e_i f'(x) + e_i^2 \frac{f''(x)}{2} + \mathcal{O}(e_i^3)
$$

On obtient alors finalement : $\boxed{D \quad = \quad \dfrac{f''(x)}{2f'(x)}}$

Obtenir le bon rapport n'est pas aisé, je le reconnais bien volontiers ! C'est une question difficile que peu d'étudiants ont vraiment abordée. Toutefois, j'ai été assez très agréablement surpris d'observer que quelques étudiants ont parfaitement résolu l'entièreté de cette troisième question.

Pour une raison mystérieuse (hem :-), un nombre incalculable d'étudiants a terminé sa copie en soumettant une petite blague pour rendre le correcteur plus souriant. Parmi les inévitables blagues scabreuses d'ingénieurs mal dégrossis, je vous livre une de celles qui m'ont laissé un peu perplexe...

- Quelle est la clé de la réussite ?
- Eviter de dire tout ce que l'on sait.