La mécanique d’un corps...

Trois principes fondamentaux !

Conservation de la quantité de mouvement
Conservation de l’énergie
Conservation du moment de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

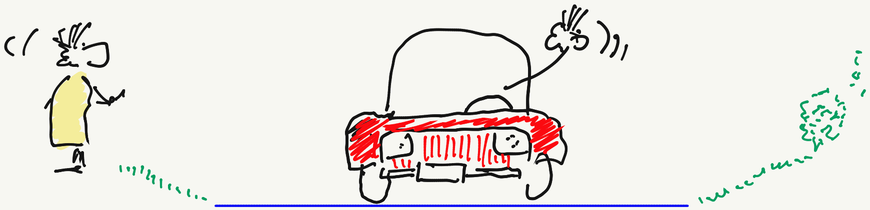
$$\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right) = \sum M_i$$

A quelle vitesse la voiture fera-t-elle un tonneau ?

Equilibre statique

$$0 = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$0 = \sum M_i$$

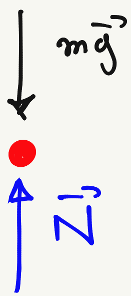


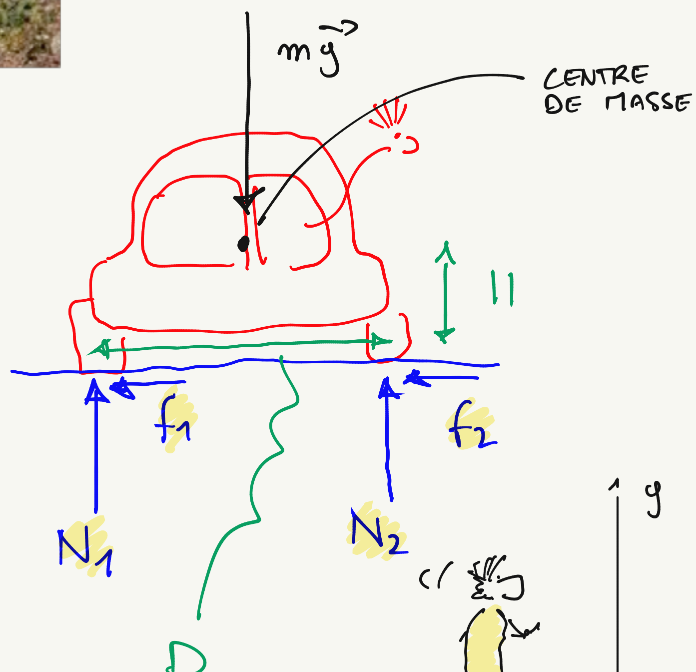
$\boxed{1}$

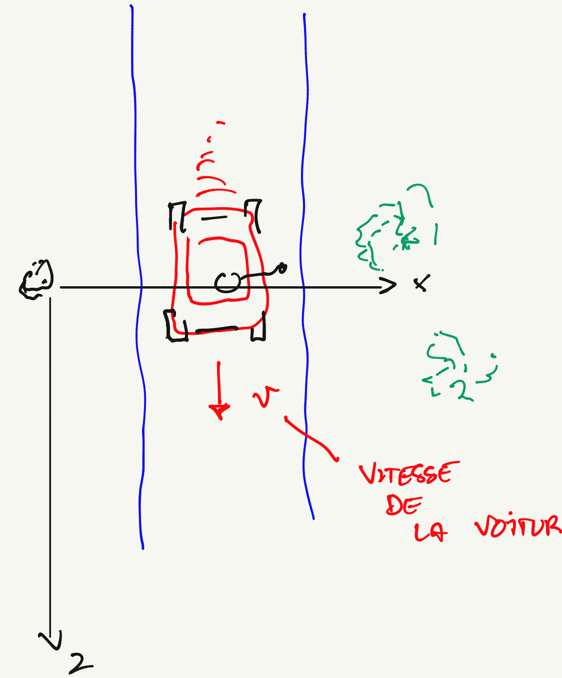
TONNEAU DE LA VOITURE ?

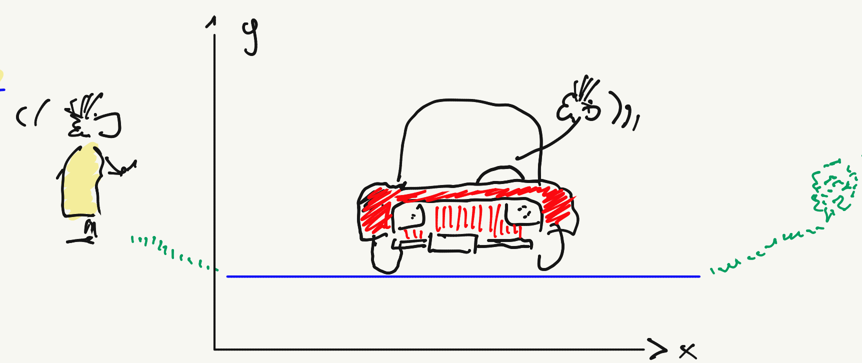
$$\boxed{\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M &= 0 \end{aligned}}$$

3 EQUATIONS
3 INCONNUES







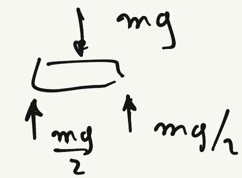


$$\boxed{\begin{aligned}\sum F_x &= 0\\ \sum F_y &= 0\\ \sum M &= 0\end{aligned}}$$

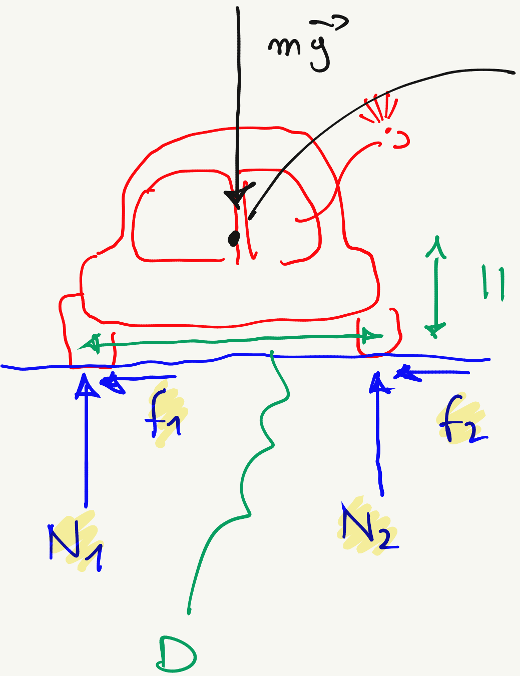
$$f_1 + f_2 = 0$$

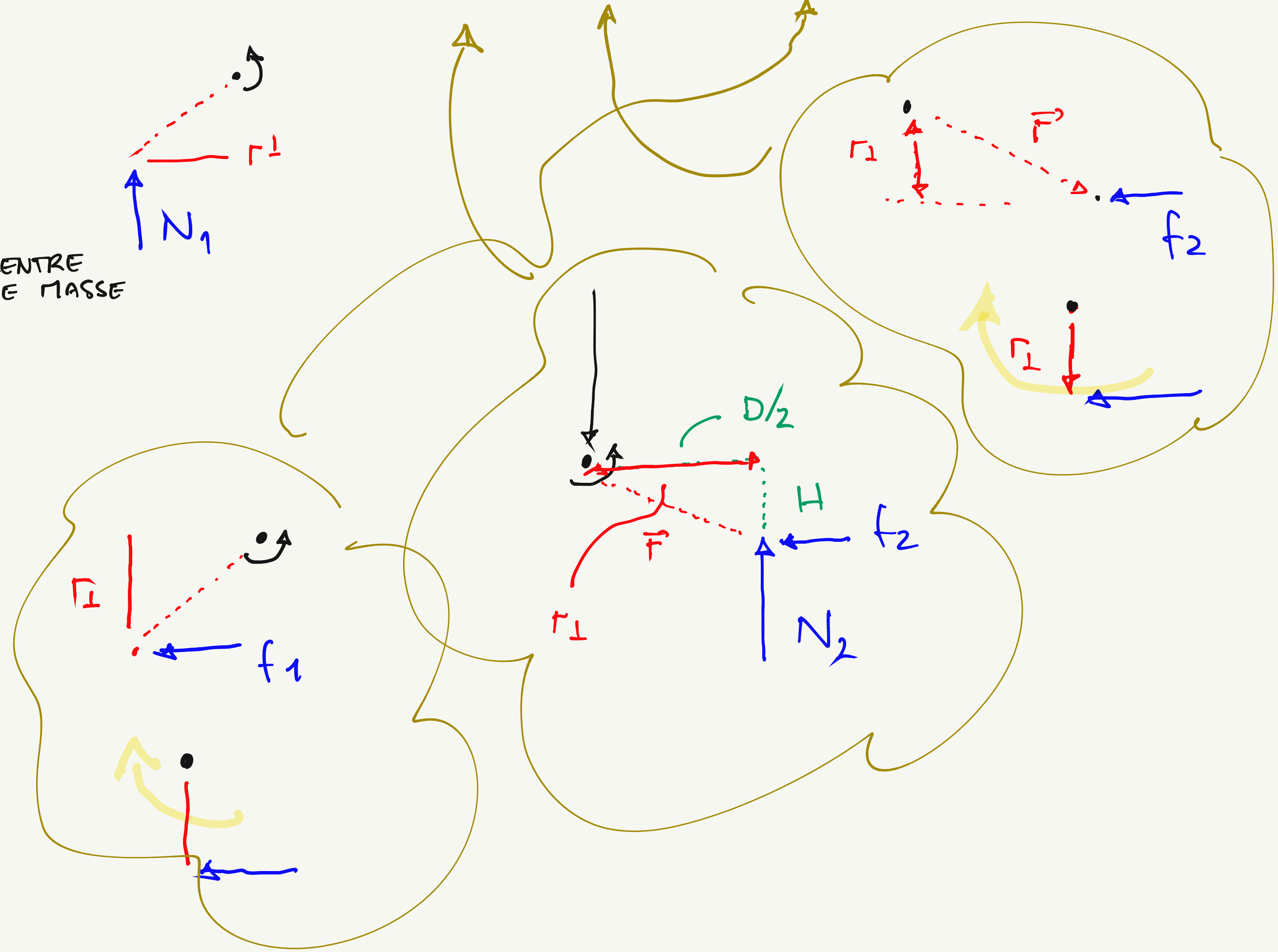
$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

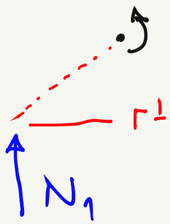
$$N_2 \frac{D}{2} - f_2 H - f_1 H - \frac{N_1 D}{2} = 0$$

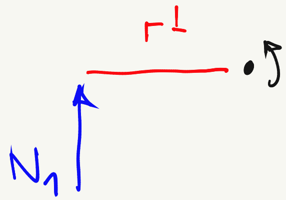


3 EQUATIONS
3 INCONNUES

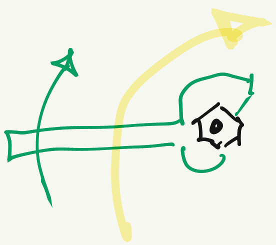








$$-N_1 \frac{D}{2}$$



$$\boxed{\begin{array}{l}\sum F_x = 0\\ \sum F_y = 0\\ \sum M = 0\end{array}}$$

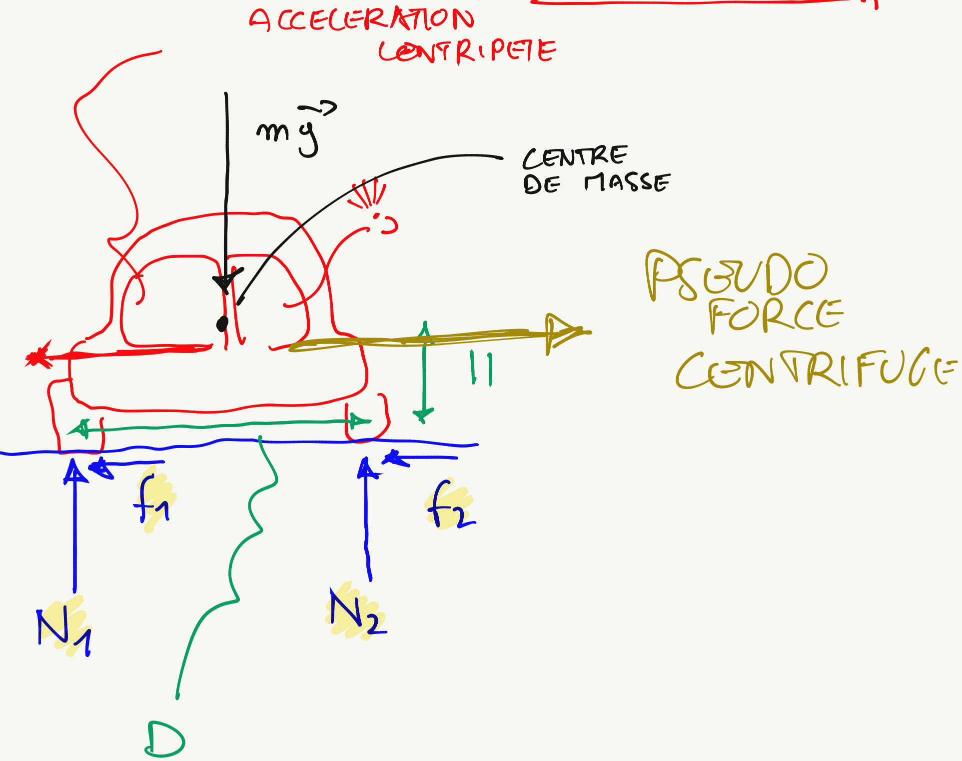
$$f_1 + f_2 = mv^2/R$$

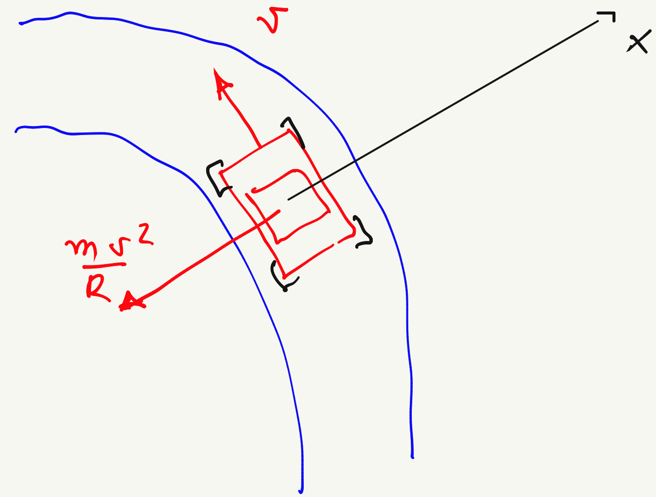
$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

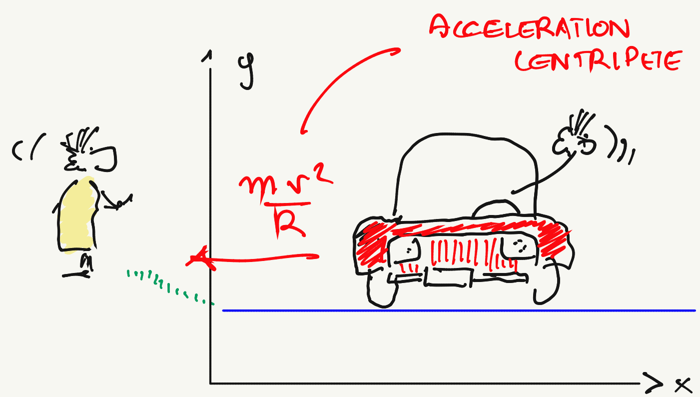
$$N_2 \frac{D}{2} - f_2 H - f_1 H - N_1 \frac{D}{2} = 0$$

3 EQUATIONS
3 INCONNUES

$$\boxed{\begin{array}{ll} f_1 + f_2 & : N_1 \\ & : N_2 \end{array}}$$







$$\boxed{\begin{aligned}\sum F_x &= 0\\ \sum F_y &= 0\\ \sum M &= 0\end{aligned}}$$

$$f_1 + f_2 = mv^2/R \quad (♣)$$

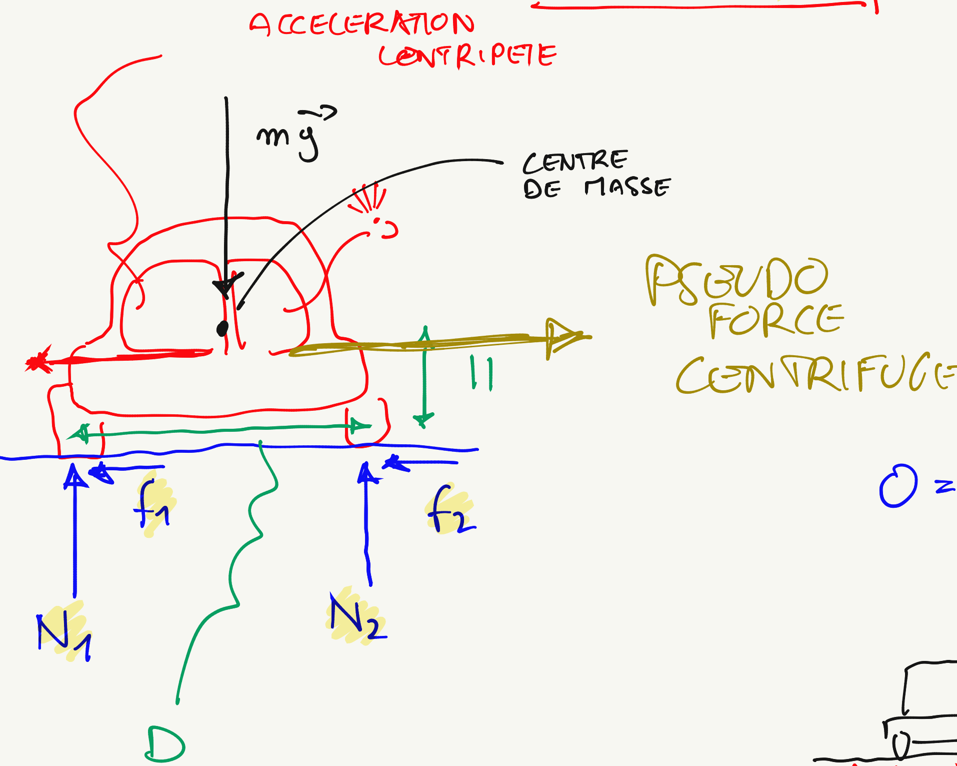
$$N_1 + N_2 - mg = 0 \quad (♡)$$

$$N_2 \frac{D}{2} - f_2 H - f_1 H - N_1 \frac{D}{2} = 0 \quad (♠)$$

3 EQUATIONS

3 INCONNUES

$f_1 + f_2$	N_1
	N_2

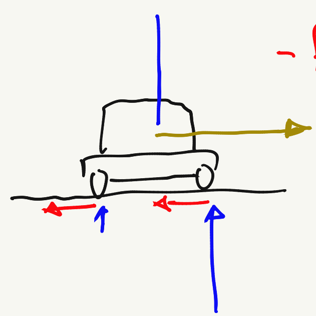


$(♣) \rightarrow \boxed{f_1 + f_2 = \frac{mv^2}{R}}$

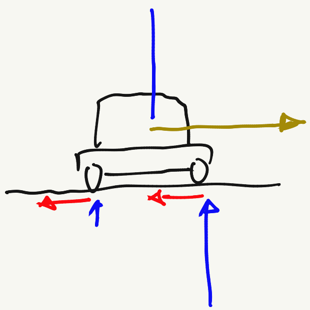
$(♡) \rightarrow \boxed{N_2 = mg - N_1}$

$(♠) \rightarrow$

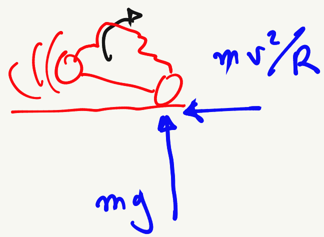
$$0 = \underbrace{-\left(\frac{mv^2}{R}\right)H}_{-f_1 H - f_2 H} - N_1 \frac{D}{2} + (mg - N_1)\frac{D}{2}$$



$$0 = -\left(\frac{mv^2}{R}\right)H - N_1\frac{D}{2} + (mg - N_1)\frac{D}{2}$$



LA VOITURE RISQUE DE COMMENCER A FAIRE UN TONNEAU LORSQUE $N_1 = 0$!



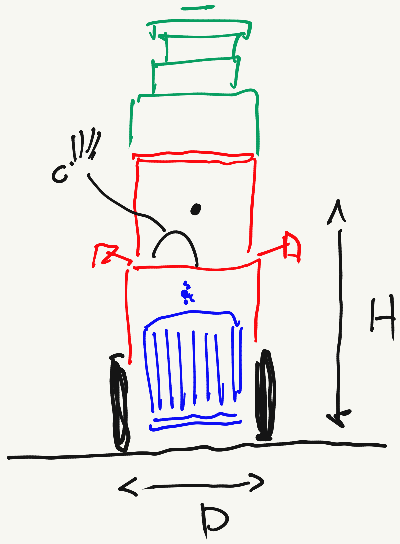
$$\frac{\cancel{m}v^2}{R}H = \cancel{m}g\frac{D}{2}$$

$$v^2 = \frac{RDg}{H2}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{gRD}{2H}}}$$

$$H \searrow \quad g \nearrow \quad R \nearrow \quad D \nearrow$$

CELA PERMET DE PRENDRE LE TOURNANT À UNE VITESSE PLUS GRANDE !



$$\frac{\cancel{m}\, v^2}{R} H = \cancel{m}\, g \frac{D}{2}$$

$$\downarrow$$

$$v^2 = \frac{RDg}{H2}$$

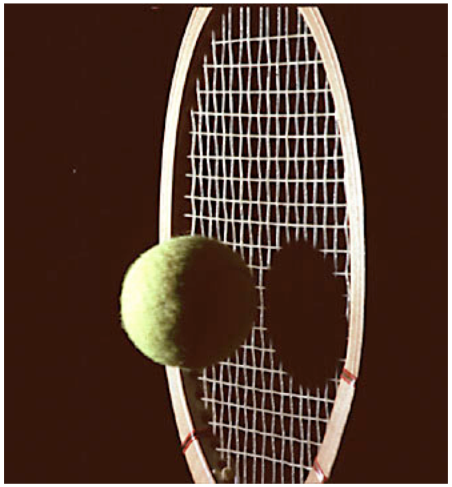
$$\downarrow$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{gRD}{2H}}}$$

$$\underbrace{H \searrow}\quad \underbrace{g \nearrow \;\; R \nearrow \;\; D \nearrow}$$

CELA PERMET
DE PRENDRE
LE TOURNANT À UNE
VITESSE
PLUS GRANDE !

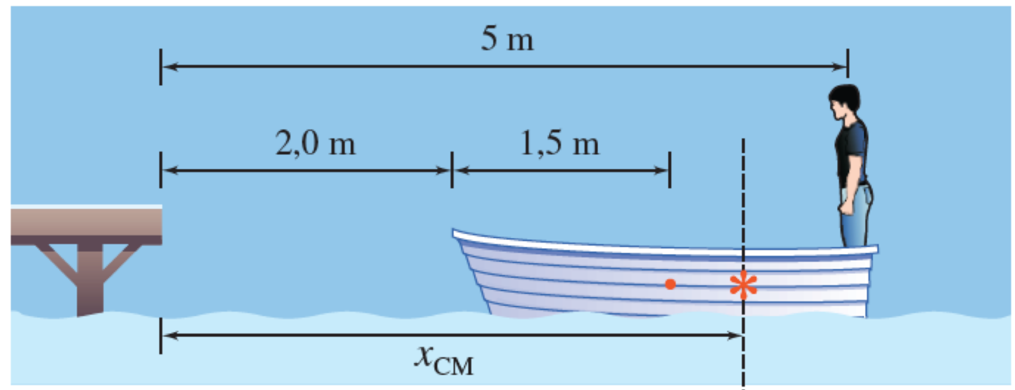
Un corps, cela peut aussi être un paquet de corps !



**On peut appliquer la conservation
de la quantité de mouvement ou de l'énergie
pour l'ensemble du système.**

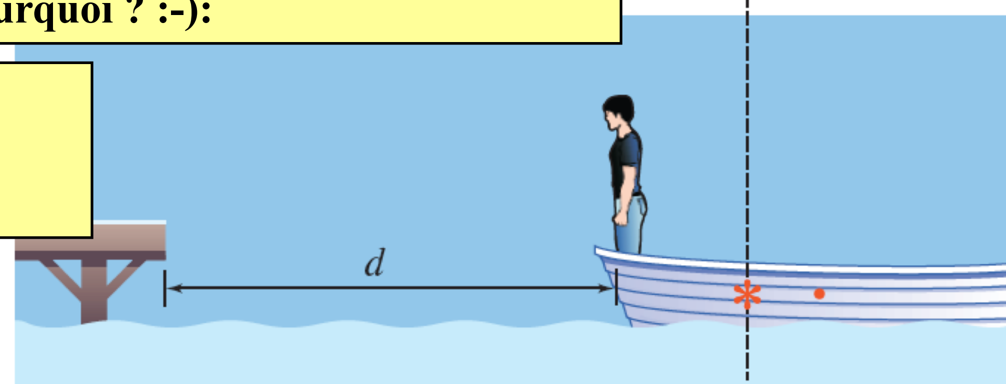
C'est ce qu'on a fait pour analyser les chocs !

Deux corps comme un unique système...



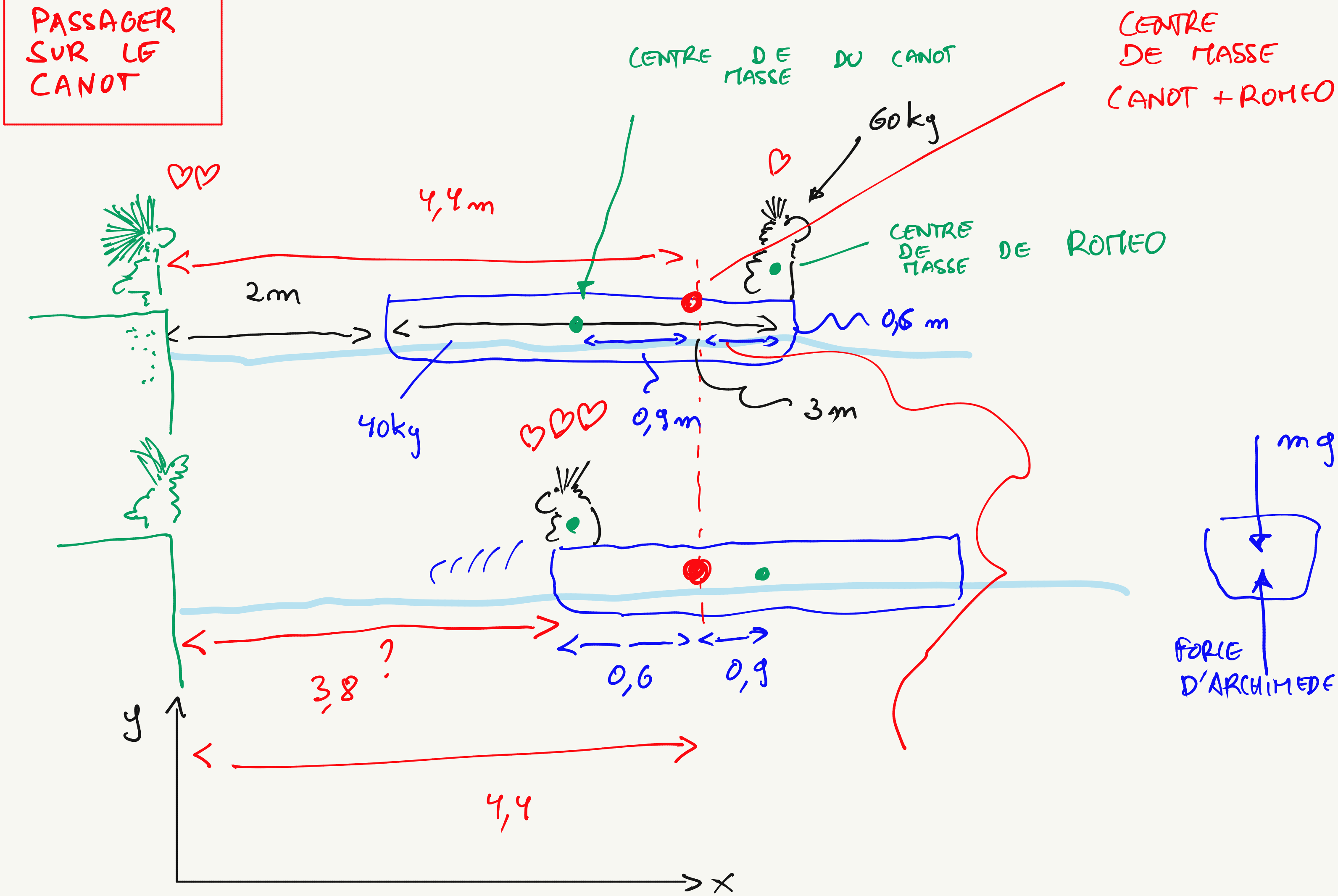
C’est vraiment une manière très efficace de résoudre certains problèmes !
Ici, on suppose qu’aucune force extérieure agit sur la barque.
C’est une approximation un peu fausse (pourquoi ? :-):

Ensuite, on peut appliquer la conservation
de la quantité de mouvement
pour l’ensemble du système.



2

PASSAGER SUR LE CANOT



$$\boxed{\vec{x} = \frac{m_{BATEAU}}{100}\,\vec{x}_{BATEAU} + \frac{m_{ROMEO}}{100}\,\vec{x}_{ROMEO}}$$

$$\vec{x} = \underbrace{0,4 \times 3,5}_{1,4} + \underbrace{0,6 \times 5}_{3} = 4,4$$

Un obus qui explose en deux parties...

On peut déduire le mouvement d'un des morceaux à partir du mouvement de l'autre fragment !

Le centre de masse poursuit la trajectoire parabolique initiale…

... et la collision tout-à-fait inélastique entre deux voitures !

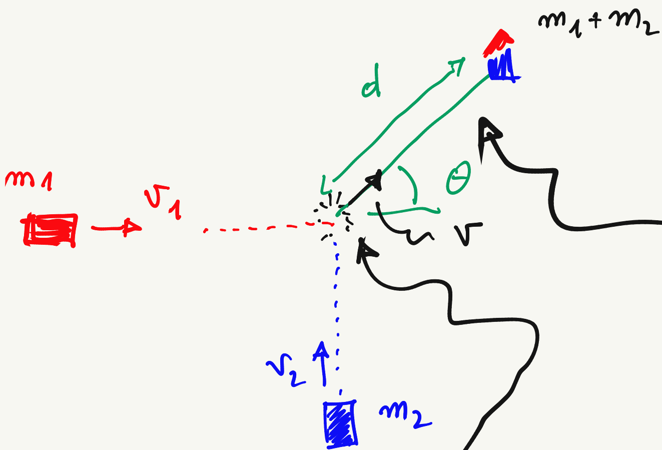
3

ACCIDENT DE VOITURES

θ ANGLE $\quad d$ DISTANCE $\quad \underbrace{m_1 \quad m_2}_{\text{MASSES DE VOITURES}} \quad \mu$

DONNÉES

QUESTION QUE VALENT v_1 ET v_2 ?



2

APRES LE CHOC....

$$\underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2}_{\text{ENERGIE CINETIQUE JUSTE APRES LE CHOC}} = \underbrace{\mu\,(m_1+m_2)g\,d}_{\text{TRAVAIL DU FROTTEMENT}}$$

1

CHOC INELASTIQUE

CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MVT GLOBALE

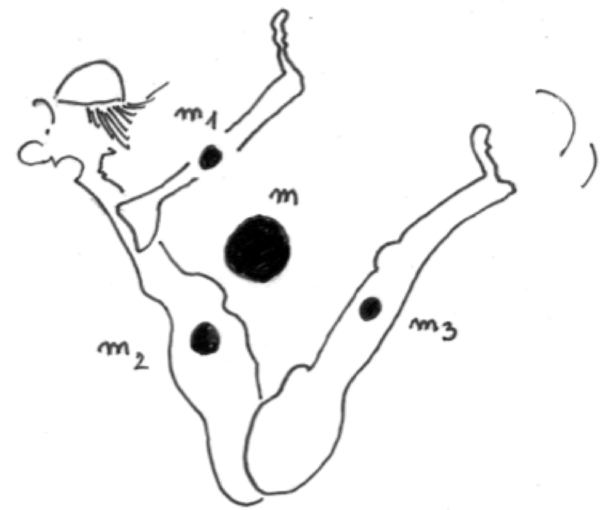
$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 v_1 \\ m_2 v_2 \end{bmatrix}}_{\text{AVANT LE CHOC}} = \underbrace{(m_1+m_2)\begin{bmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{bmatrix}}_{\text{JUSTE APRES LE CHOC}}$$

La somme de moments de forces de gravité...

$$\sum m_i\, \vec{\mathbf{x}}(t) = \sum m_i\, \vec{\mathbf{x}}_i(t)$$

$$0 = \sum m_i \left(\vec{\mathbf{x}}_i(t) - \vec{\mathbf{x}}(t)\right)$$

$$0 = \sum m_i \vec{\mathbf{g}} \times \underbrace{\left(\vec{\mathbf{x}}_i(t) - \vec{\mathbf{x}}(t)\right)}_{\vec{\mathbf{r}}_i(t)}$$

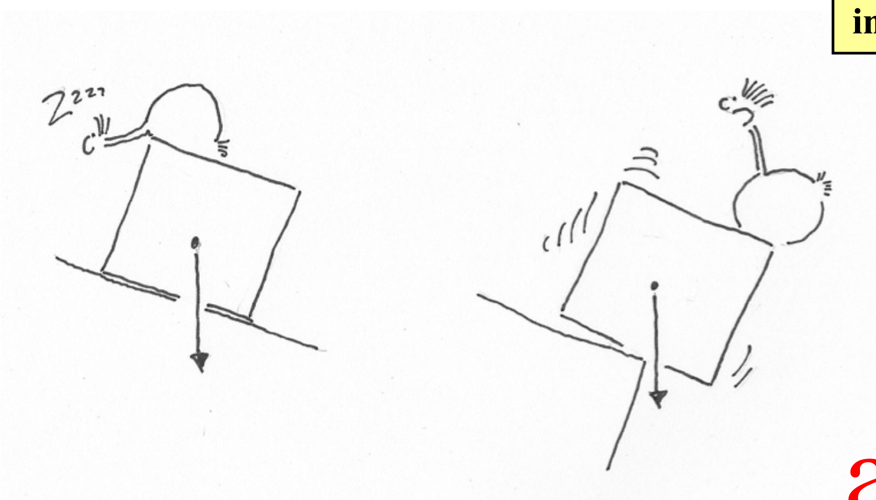


... par rapport au centre de gravité est nulle

La somme de moments de forces de gravité...

Le centre de gravité est le point d'application de la résultante des forces de gravité !

La connaissance de la position du centre de gravité est indispensable pour déterminer la stabilité d'un objet !



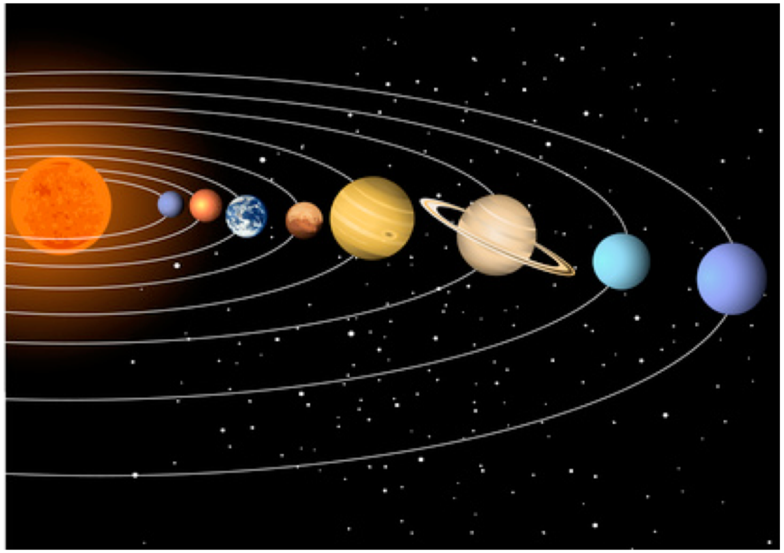
... par rapport au centre de gravité est nulle

Centre de gravité...

$$0 = \sum m_i \vec{\mathbf{g}}_i \times \left(\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_{\text{gravité}}\right)$$

C'est différent uniquement si l'accélération de la gravité n'est pas constante !

Pour prédire le mouvement des planètes, c'est important !
Pour prédire le mouvement du corps humain, ce n'est vraiment pas bien important !



$$0 = \sum m_i \left(\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_{\text{masse}}\right)$$

... et centre de masse

Moments

$$\frac{d}{dt}\left(I\ \omega\right) \quad = \quad \sum M_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \vec{\mathbf{v}}\right) \quad = \quad \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$

Forces

La cause :
la force !

Résistance au
mouvement = masse

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{\mathbf{v}}\right)} = \boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}_i}$$

La conséquence :
l'accélération !

Quelle est la voiture qui va accélérer
le plus vite pour la même force motrice ?

Bilan
de la quantité
de mouvement

La cause :
le moment de force !

Résistance à la rotation
= moment d'inertie

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(I\,\omega\right)} = \boxed{\sum M_i}$$

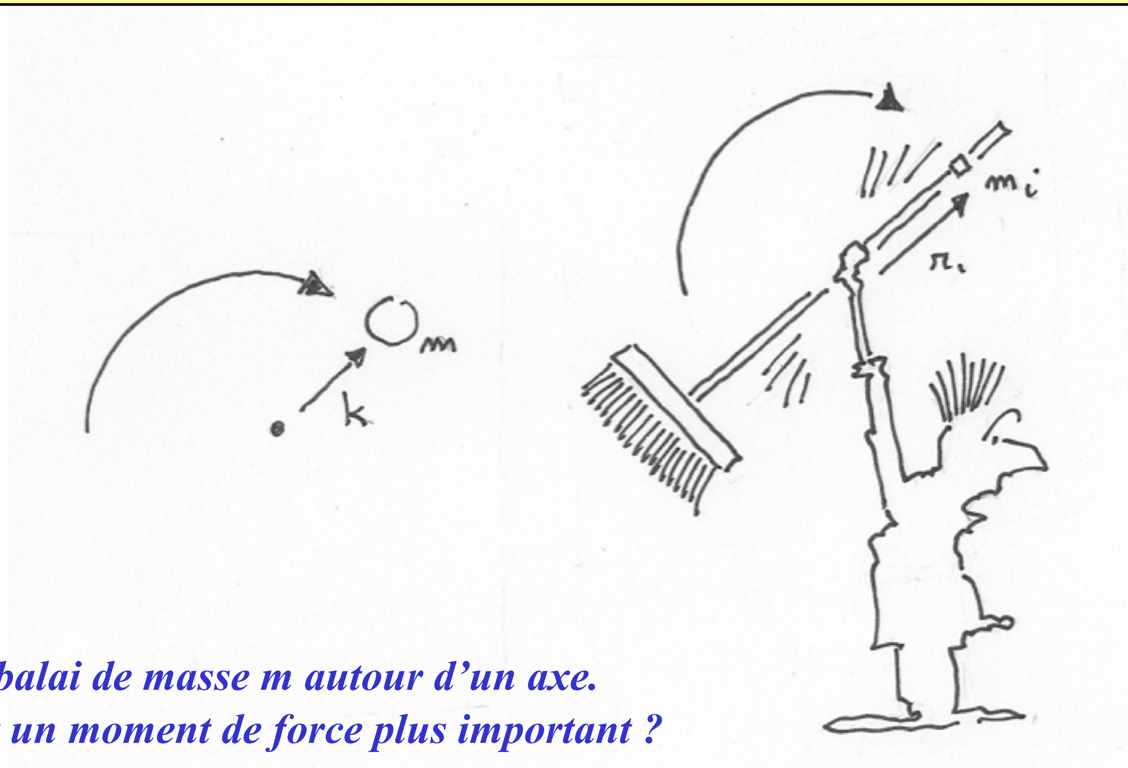
La conséquence :
l'accélération angulaire !

Bilan du moment cinétique

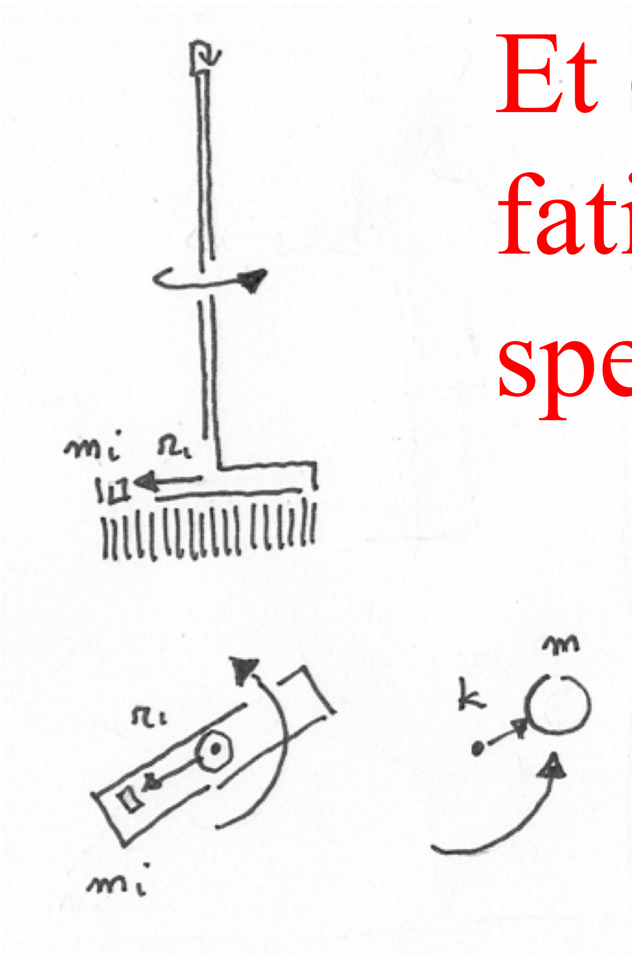
Que fait la danseuse pour tourner plus vite sur elle-même ?

Qu'est ce qui influence le moment d'inertie ?

Le moment d'inertie dépend de :
- la masse du balai
- la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation



On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?



Et ceci est moins fatiguant et moins spectaculaire !

On veut faire tourner un balai de masse m autour d'un axe.
Quel mouvement requiert un moment de force plus important ?

Le moment d’inertie dépend de :
- **la masse du balai**
- **la distribution de la masse par rapport à l’axe de rotation**

Moment d’inertie

$$\boxed{I} = \sum m_i \, r_i^2$$

Rayon de giration

$$m \, \boxed{k^2} = \sum m_i \, r_i^2$$

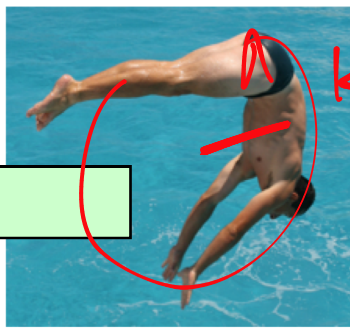
Inertie - rayon de giration

Moment d’inertie du plongeur

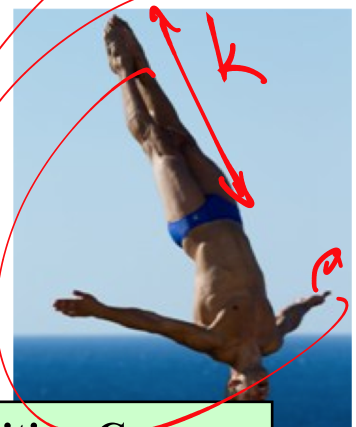
Le moment d’inertie dépend de :
- **la masse du plongeur**
- **la distribution de la masse par rapport à l’axe de rotation**

Position A

Position B



Position C



Pour quelles positions, le plongeur a le plus grand moment d’inertie et le plus petit moment d’inertie ?

$I = m\,k^2$

Rayon de giration

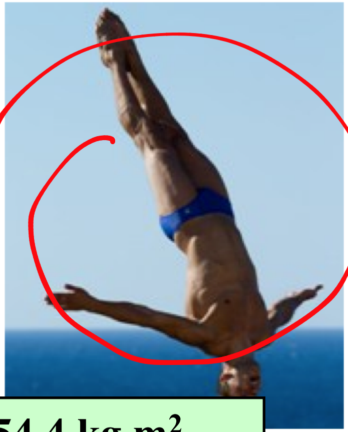
$$m\,k^2 = \sum m_i\,r_i^2$$

Moment d'inertie du plongeur

Le moment d'inertie dépend de :
- **la masse du plongeur**
- **la distribution de la masse par rapport à l'axe de rotation**

$I = 12.6$ kg m^2

$I = 23.8$ kg m^2

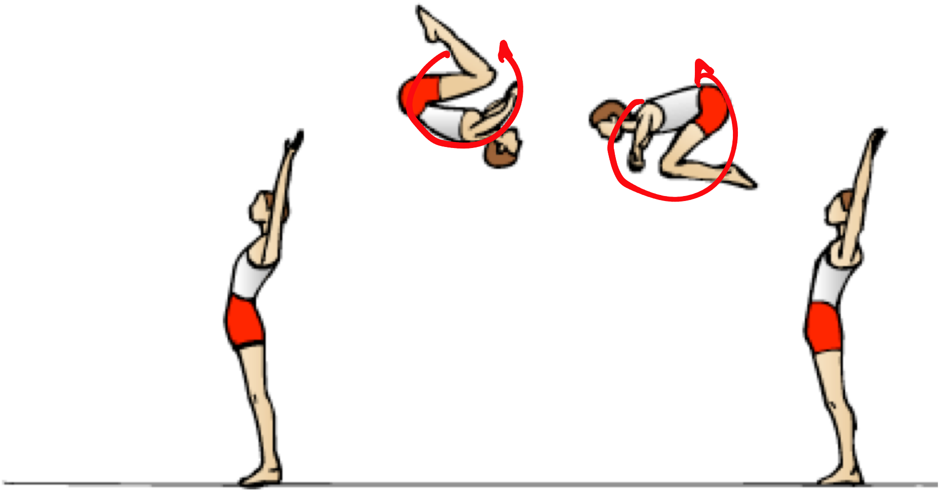


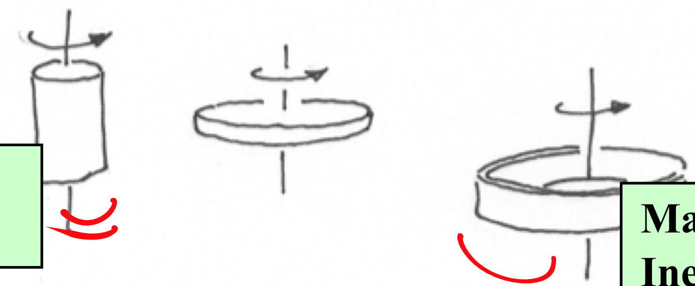
$I = 54.4$ kg m^2

Rayon de giration

$$m\,k^2 = \sum m_i\, r_i^2$$

Pourquoi est-ce que
la gymnaste se recroqueville
pour faire la pirouette ?





Masse identique
Inertie minimale

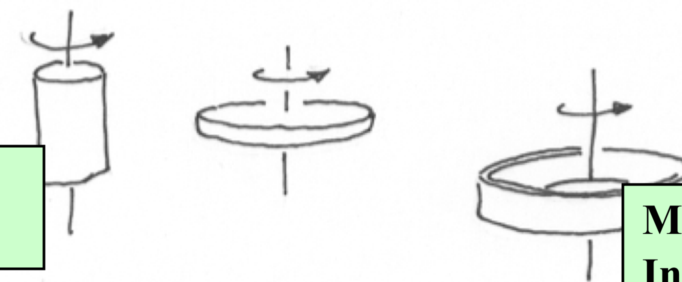
Masse identique
Inertie maximale

Cylindre, disque, anneau...
Veaux, vaches, cochons !

Une bibliothèque de moments d'inertie

Moment d'inertie

$$I = \sum m_i \, r_i^2$$

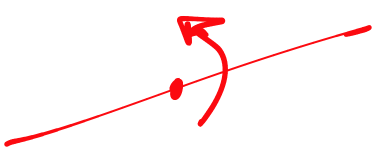


Masse identique
Inertie minimale

Masse identique
Inertie maximale

Moments d'inertie de corps rigides homogènes

Cylindre creux tournant autour de l'axe de révolution	$I = m\,R^2$
Cylindre plein tournant autour de l'axe de révolution	$I = m\,\dfrac{R^2}{2}$
Barre tournant autour d'un axe perpendiculaire central	$I = m\,\dfrac{L^2}{12}$



- La masse mesure la résistance d’un corps à une accélération causée par une force.
- Le moment d’inertie mesure la résistance d’un corps à une accélération angulaire causée par un moment de force.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(m\ \vec{\mathbf{v}}\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}m\ v^2 + \tfrac{1}{2}I\ \omega^2\Big) &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \\
\frac{d}{dt}\Big(I\ \omega\Big) &= \sum M_i
\end{aligned}
$$

Equilibre statique

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\
0 &= \sum M_i
\end{aligned}
$$